Matematická analýza III.

(prezentácia k prednáške MAN2c/10)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MAN2c.html
Prednáška 5

20. októbra 2023

Pozorovanie: ohraničenosť nestačí k $\mathscr{R}$-integrovateľnosti!

Veta (nutná podmienka $\mathscr{R}$-integrovateľnosti)

Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak f je ohraničená na $\langle a, b\rangle$.

Náčrt dôkazu: Ak f nie je ohraničená na $\langle a, b\rangle$, tak pre každé $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ je f neohraničená na aspoň jednom čiastkovom intervale $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ delenia D. To znamená, že volením reprezentantov $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ vieme urobiť integrálny súčet

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

ľubovoľne veľký pre ľubovoľné dostatočne jemné delenie. Limita integrálneho súčtu nemôže byť vlastná, a teda $f \notin \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

$\mathscr{R}$-integrál ako funkcia hornej hranice

> Most students conceptualize the definite integral as an area. What does it mean to say that distance is the definite integral of the velocity? Usually, they don't understand how a distance can be an area...

Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, aké vlastnosti má funkcia $F(x) = (\mathscr{R})\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ \ x \in \langle a, b\rangle$?

Pozorovanie: ohraničenosť nestačí k $\mathscr{R}$-integrovateľnosti!

Veta (nutná podmienka $\mathscr{R}$-integrovateľnosti)

Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak f je ohraničená na $\langle a, b\rangle$.

Náčrt dôkazu: Ak f nie je ohraničená na $\langle a, b\rangle$, tak pre každé $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ je f neohraničená na aspoň jednom čiastkovom intervale $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ delenia D. To znamená, že volením reprezentantov $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ vieme urobiť integrálny súčet

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

ľubovoľne veľký pre ľubovoľné dostatočne jemné delenie. Limita integrálneho súčtu nemôže byť vlastná, a teda $f \notin \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

$\mathscr{R}$-integrál ako funkcia hornej hranice

> Most students conceptualize the definite integral as an area. What does it mean to say that distance is the definite integral of the velocity? Usually, they don't understand how a distance can be an area...

Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, aké vlastnosti má funkcia $F(x) = (\mathscr{R})\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ \ x \in \langle a, b\rangle$?

Pozorovanie: ohraničenosť nestačí k $\mathscr{R}$-integrovateľnosti!

Veta (nutná podmienka $\mathscr{R}$-integrovateľnosti)

Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak f je ohraničená na $\langle a, b\rangle$.

Náčrt dôkazu: Ak f nie je ohraničená na $\langle a, b\rangle$, tak pre každé $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ je f neohraničená na aspoň jednom čiastkovom intervale $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ delenia D. To znamená, že volením reprezentantov $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ vieme urobiť integrálny súčet

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

ľubovoľne veľký pre ľubovoľné dostatočne jemné delenie. Limita integrálneho súčtu nemôže byť vlastná, a teda $f \notin \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

$\mathscr{R}$-integrál ako funkcia hornej hranice

Most students conceptualize the definite integral as an area. What does it mean to say that distance is the definite integral of the velocity? Usually, they don't understand how a distance can be an area...

Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, aké vlastnosti má funkcia $F(x) = (\mathscr{R})\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \;\; x \in \langle a, b\rangle$?

Pozorovanie: ohraničenosť nestačí k $\mathscr{R}$-integrovateľnosti!

Veta (nutná podmienka $\mathscr{R}$-integrovateľnosti)

Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak f je ohraničená na $\langle a, b\rangle$.

Náčrt dôkazu: Ak f nie je ohraničená na $\langle a, b\rangle$, tak pre každé $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ je f neohraničená na aspoň jednom čiastkovom intervale $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ delenia D. To znamená, že volením reprezentantov $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ vieme urobiť integrálny súčet

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

ľubovoľne veľký pre ľubovoľné dostatočne jemné delenie. Limita integrálneho súčtu nemôže byť vlastná, a teda $f \notin \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

$\mathscr{R}$-integrál ako funkcia hornej hranice

> Most students conceptualize the definite integral as an area. What does it mean to say that distance is the definite integral of the velocity? Usually, they don't understand how a distance can be an area...

Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, aké vlastnosti má funkcia $F(x) = (\mathscr{R})\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \;\; x \in \langle a, b\rangle$?

Pozorovanie: ohraničenosť nestačí k $\mathscr{R}$-integrovateľnosti!

Veta (nutná podmienka $\mathscr{R}$-integrovateľnosti)

Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak f je ohraničená na $\langle a, b\rangle$.

Náčrt dôkazu: Ak f nie je ohraničená na $\langle a, b\rangle$, tak pre každé $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ je f neohraničená na aspoň jednom čiastkovom intervale $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ delenia D. To znamená, že volením reprezentantov $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ vieme urobiť integrálny súčet

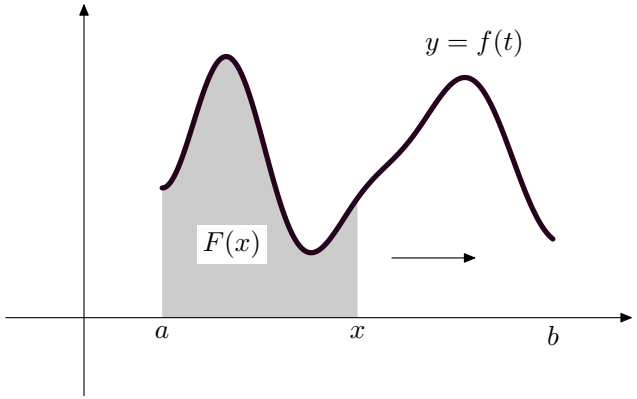
$$\mathscr{S}(f, D, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

ľubovoľne veľký pre ľubovoľné dostatočne jemné delenie. Limita integrálneho súčtu nemôže byť vlastná, a teda $f \notin \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

$\mathscr{R}$-integrál ako funkcia hornej hranice

> Most students conceptualize the definite integral as an area. What does it mean to say that distance is the definite integral of the velocity? Usually, they don't understand how a distance can be an area...

Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, aké vlastnosti má funkcia $F(x) = (\mathscr{R})\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \;\; x \in \langle a, b\rangle$?



To find the nature of the crooked line [curve] whose area is expressed by any given equation.

Newton: *Tract on Fluxions* (unpublished) (October 1666)

Fundamentálna veta integrálneho kalkulu

Nech $a < b$, $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a $F(x) = (\mathscr{R}) \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in \langle a, b\rangle$. Potom

(i) $F \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$;

(ii) ak f je spojitá v bode $x_0 \in \langle a, b\rangle$, potom F je diferencovateľná v x_0 a platí $F'(x_0) = f(x_0)$.

En troisième lieu, soit

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

et supposons que $f(x)$ soit continue pour la valeur $x = x_0$. Alors, dans l'intervalle $(x_0, x_0 + h)$, $f(x)$ sera comprise entre $f(x_0) + \sigma$ et $f(x_0) - \sigma$, σ tendant vers zéro avec h. On aura donc

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx < h\,[f(x_0) + \sigma],$$
$$> h\,[f(x_0) - \sigma],$$

$$f(x_0) - \sigma < \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} < f(x_0) + \sigma,$$

d'où

$$\lim \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Ainsi *la fonction* $f(x)$ *sera la dérivée de* $F(x)$, *pour toutes les valeurs de* x *pour lesquelles* $f(x)$ *est continue.*

Darboux: *Mémoire sur les fonctions discontinues* (1875)

To find the nature of the crooked line [curve] whose area is expressed by any given equation.

Newton: *Tract on Fluxions* (unpublished) (October 1666)

Veta (o existencii primitívnej funkcie k spojitej funkcii)

Každá spojitá funkcia na $\langle a, b\rangle$ má primitívnu funkciu na $\langle a, b\rangle$. Naviac, každá primitívna funkcia F k $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ má tvar

$$F(x) = (\mathscr{R})\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

En troisième lieu, soit

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

et supposons que $f(x)$ soit continue pour la valeur $x = x_0$. Alors, dans l'intervalle $(x_0, x_0 + h)$, $f(x)$ sera comprise entre $f(x_0) + \sigma$ et $f(x_0) - \sigma$, σ tendant vers zéro avec h. On aura donc

$$\mathrm{F}(x_0 + h) - \mathrm{F}(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx < h\,[f(x_0) + \sigma],$$
$$> h\,[f(x_0) - \sigma],$$

$$f(x_0) - \sigma < \frac{\mathrm{F}(x_0 + h) - \mathrm{F}(x_0)}{h} < f(x_0) + \sigma,$$

d'où

$$\lim \frac{\mathrm{F}(x_0 + h) - \mathrm{F}(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Ainsi *la fonction* $f(x)$ *sera la dérivée de* $\mathrm{F}(x)$, *pour toutes les valeurs de* x *pour lesquelles* $f(x)$ *est continue.*

Darboux: *Mémoire sur les fonctions discontinues* (1875)

Newtonova-Leibnizova formula = vzťah $\mathscr{R}$- a $\mathscr{N}$-integrálu

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

- Podľa definície $\mathscr{N}$-integrálu má uvedená rovnosť zmysel, keď funkcia F je primitívna k funkcii f na $\langle a, b\rangle$!!!
- Za akých podmienok má táto rovnosť zmysel aj pre $\mathscr{R}$-integrál?
- Ak f má primitívnu funkciu, nemusí byť $\mathscr{R}$-integrovateľná, napr.

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- Čo ale ak f je ohraničená a má primitívnu funkciu F?

VITO VOLTERRA (1881): aj tak NIE!, pretože existuje diferencovateľná funkcia V s ohraničenou deriváciou V' taká, že

$$(\mathscr{R})\int_0^1 V'(x)\,\mathrm{d}x \neq V(1) - V(0) = (\mathscr{N})\int_0^1 V'(x)\,\mathrm{d}x$$

Newtonova-Leibnizova formula = vzťah $\mathscr{R}$- a $\mathscr{N}$-integrálu

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

- Podľa definície $\mathscr{N}$-integrálu má uvedená rovnosť zmysel, keď funkcia F je primitívna k funkcii f na $\langle a, b\rangle$!!!
- Za akých podmienok má táto rovnosť zmysel aj pre $\mathscr{R}$-integrál?
- Ak f má primitívnu funkciu, nemusí byť $\mathscr{R}$-integrovateľná, napr.

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- Čo ale ak f je ohraničená a má primitívnu funkciu F?

VITO VOLTERRA (1881): aj tak NIE!, pretože existuje diferencovateľná funkcia V s ohraničenou deriváciou V' taká, že

$$(\mathscr{R})\int_0^1 V'(x)\,\mathrm{d}x \neq V(1) - V(0) = (\mathscr{N})\int_0^1 V'(x)\,\mathrm{d}x$$

Newtonova-Leibnizova formula = vzťah $\mathscr{R}$- a $\mathscr{N}$-integrálu

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

- Podľa definície $\mathscr{N}$-integrálu má uvedená rovnosť zmysel, keď funkcia F je primitívna k funkcii f na $\langle a, b\rangle$!!!
- Za akých podmienok má táto rovnosť zmysel aj pre $\mathscr{R}$-integrál?
- Ak f má primitívnu funkciu, nemusí byť $\mathscr{R}$-integrovateľná, napr.

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- Čo ale ak f je ohraničená a má primitívnu funkciu F?

VITO VOLTERRA (1881): aj tak NIE!, pretože existuje diferencovateľná funkcia V s ohraničenou deriváciou V' taká, že

$$(\mathscr{R})\int_0^1 V'(x)\,\mathrm{d}x \neq V(1) - V(0) = (\mathscr{N})\int_0^1 V'(x)\,\mathrm{d}x$$

Newtonova-Leibnizova formula = vzťah $\mathscr{R}$- a $\mathscr{N}$-integrálu

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

- Podľa definície $\mathscr{N}$-integrálu má uvedená rovnosť zmysel, keď funkcia F je primitívna k funkcii f na $\langle a, b\rangle$!!!
- Za akých podmienok má táto rovnosť zmysel aj pre $\mathscr{R}$-integrál?
- Ak f má primitívnu funkciu, nemusí byť $\mathscr{R}$-integrovateľná, napr.

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- Čo ale ak f je ohraničená a má primitívnu funkciu F?

VITO VOLTERRA (1881): aj tak NIE!, pretože existuje diferencovateľná funkcia V s ohraničenou deriváciou V' taká, že

$$(\mathscr{R})\int_0^1 V'(x)\,\mathrm{d}x \neq V(1) - V(0) = (\mathscr{N})\int_0^1 V'(x)\,\mathrm{d}x$$

Newtonova-Leibnizova formula = vzťah $\mathscr{R}$- a $\mathscr{N}$-integrálu

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

- Podľa definície $\mathscr{N}$-integrálu má uvedená rovnosť zmysel, keď funkcia F je primitívna k funkcii f na $\langle a, b\rangle$!!!
- Za akých podmienok má táto rovnosť zmysel aj pre $\mathscr{R}$-integrál?
- Ak f má primitívnu funkciu, nemusí byť $\mathscr{R}$-integrovateľná, napr.

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- Čo ale ak f je ohraničená a má primitívnu funkciu F?

VITO VOLTERRA (1881): aj tak NIE!, pretože existuje diferencovateľná funkcia V s ohraničenou deriváciou V' taká, že

$$(\mathscr{R})\int_0^1 V'(x)\,\mathrm{d}x \neq V(1) - V(0) = (\mathscr{N})\int_0^1 V'(x)\,\mathrm{d}x$$

...si une fonction susceptible d'intégration $f(x)$ est la dérivée d'une autre fonction $F(x)$, on a nécessairement

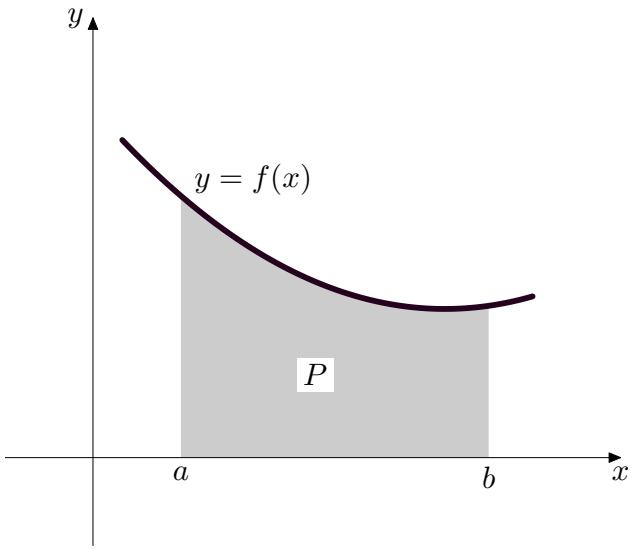
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

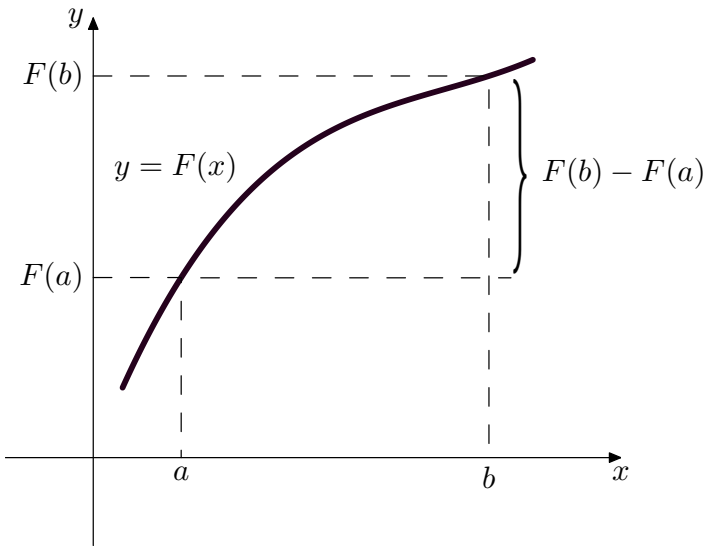
Darboux: *Mémoire sur les fonctions discontinues* (1875)

Za akých podmienok teda platí $(\mathscr{R})\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$?

Veta (o vzťahu $\mathscr{R}$- a $\mathscr{N}$-integrálu)

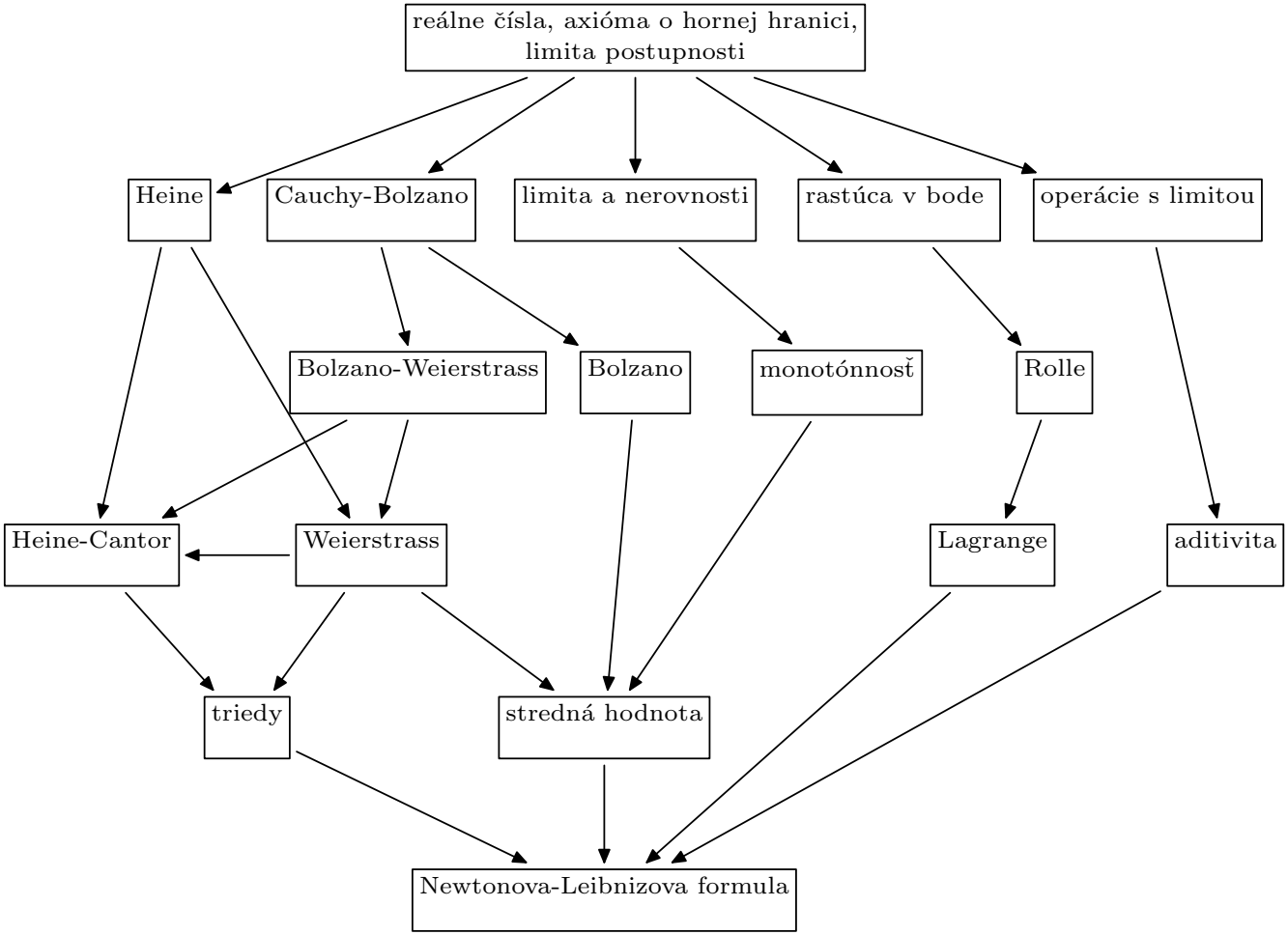
Ak $f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle \cap \mathscr{N}\langle a,b\rangle$, potom $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.





Genealógia Newtonovej-Leibnizovej formuly:

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$



Vennove diagramy

Dif $\subset$ Spoj $\subset$ Prim
Spoj $\subset \mathscr{R}$
Mon $\subset \mathscr{R}$