Matematická analýza III.

(prezentácia k prednáške MAN2c/10)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MAN2c.html
Prednáška 6

27. októbra 2023

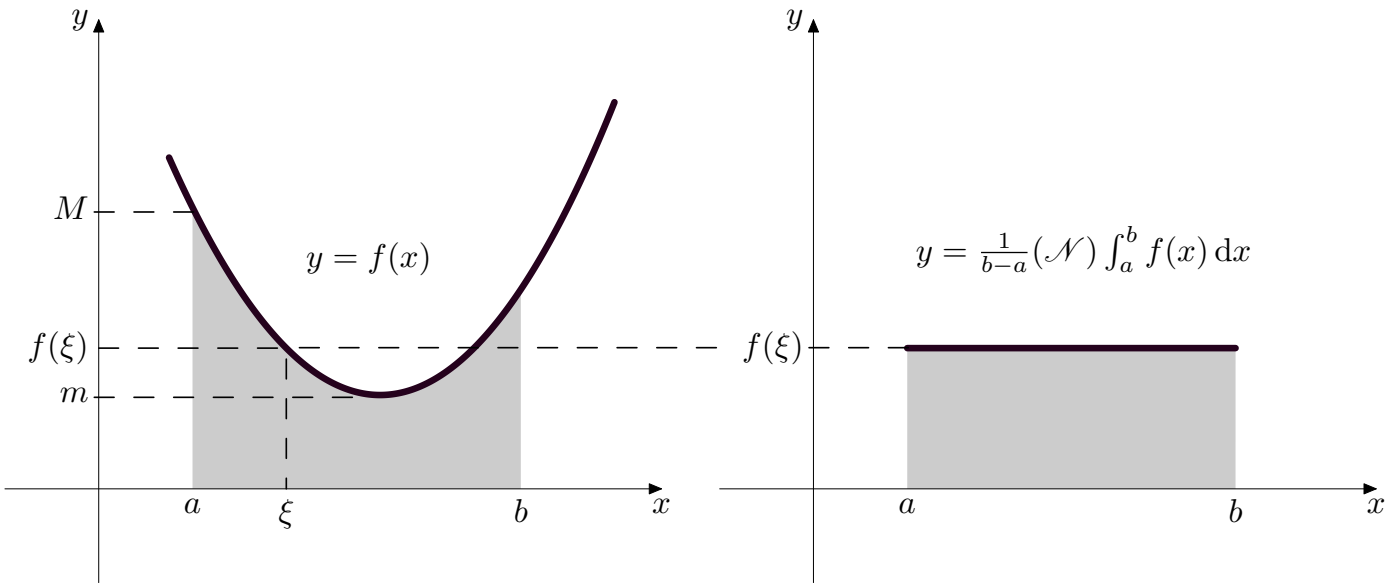
Stredné hodnoty integrálneho počtu

Pripomeňme si opäť Newtonov integrál

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := F(b) - F(a)$$

- F je primitívna funkcia k f na $\langle a, b\rangle$, t.j. $(\forall x \in \langle a, b\rangle)\, F'(x) = f(x)$;
- všadeprítomná Lagrangeova veta:

$$(\exists \xi \in (a, b))\; F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a) = f(\xi)(b - a);$$



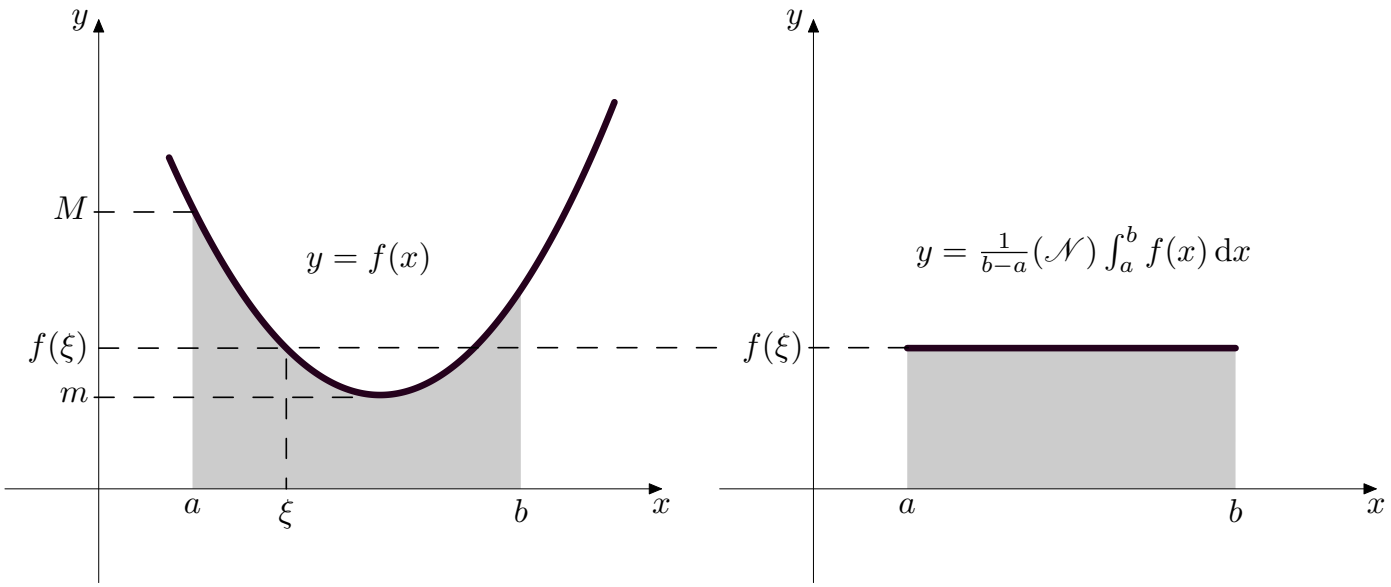
Stredné hodnoty integrálneho počtu

Pripomeňme si opäť Newtonov integrál

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := F(b)-F(a)=f(\xi)(b-a)$$

- F je primitívna funkcia k f na $\langle a,b\rangle$, t.j. $(\forall x\in\langle a,b\rangle)\,F'(x)=f(x)$;
- všadeprítomná Lagrangeova veta:

$$(\exists\xi\in(a,b))\;F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)=f(\xi)(b-a);$$



Veta (prvá o strednej hodnote)

Nech $f, g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $g(x) \geq 0$. Potom existuje také $\alpha \in \mathbb{R}$, že $m \leq \alpha \leq M$ a

$$(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot (\mathscr{R}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $m = \inf\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$ a $M = \sup\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$.

Dôsledok (Cauchy 1821)

Nech $g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $g(x) \geq 0$ alebo $g(x) \leq 0$. Ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$, potom existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ také, že

$$(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(\mathscr{R}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Alternatívny dôkaz: aplikovať Cauchyho vetu na funkcie $F(x) = (\mathscr{R}) \int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ a $G(x) = (\mathscr{R}) \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ na $\langle a, b\rangle$ (iba pre $f, g \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$!)

Veta (prvá o strednej hodnote)

Nech $f, g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $g(x) \geq 0$. Potom existuje také $\alpha \in \mathbb{R}$, že $m \leq \alpha \leq M$ a

$$(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot (\mathscr{R}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $m = \inf\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$ a $M = \sup\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$.

Dôsledok (Cauchy 1821)

Nech $g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $g(x) \geq 0$ alebo $g(x) \leq 0$. Ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$, potom existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ také, že

$$(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(\mathscr{R}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Alternatívny dôkaz: aplikovať Cauchyho vetu na funkcie $F(x) = (\mathscr{R}) \int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ a $G(x) = (\mathscr{R}) \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ na $\langle a, b\rangle$ (iba pre $f, g \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$!)

Veta (prvá o strednej hodnote)

Nech $f, g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $g(x) \geq 0$. Potom existuje také $\alpha \in \mathbb{R}$, že $m \leq \alpha \leq M$ a

$$(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot (\mathscr{R}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $m = \inf\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$ a $M = \sup\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$.

Dôsledok (Cauchy 1821)

Nech $g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $g(x) \geq 0$ alebo $g(x) \leq 0$. Ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$, potom existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ také, že

$$(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(\mathscr{R}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Alternatívny dôkaz: aplikovať Cauchyho vetu na funkcie $F(x) = (\mathscr{R}) \int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ a $G(x) = (\mathscr{R}) \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ na $\langle a, b\rangle$ (iba pre $f, g \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$!)

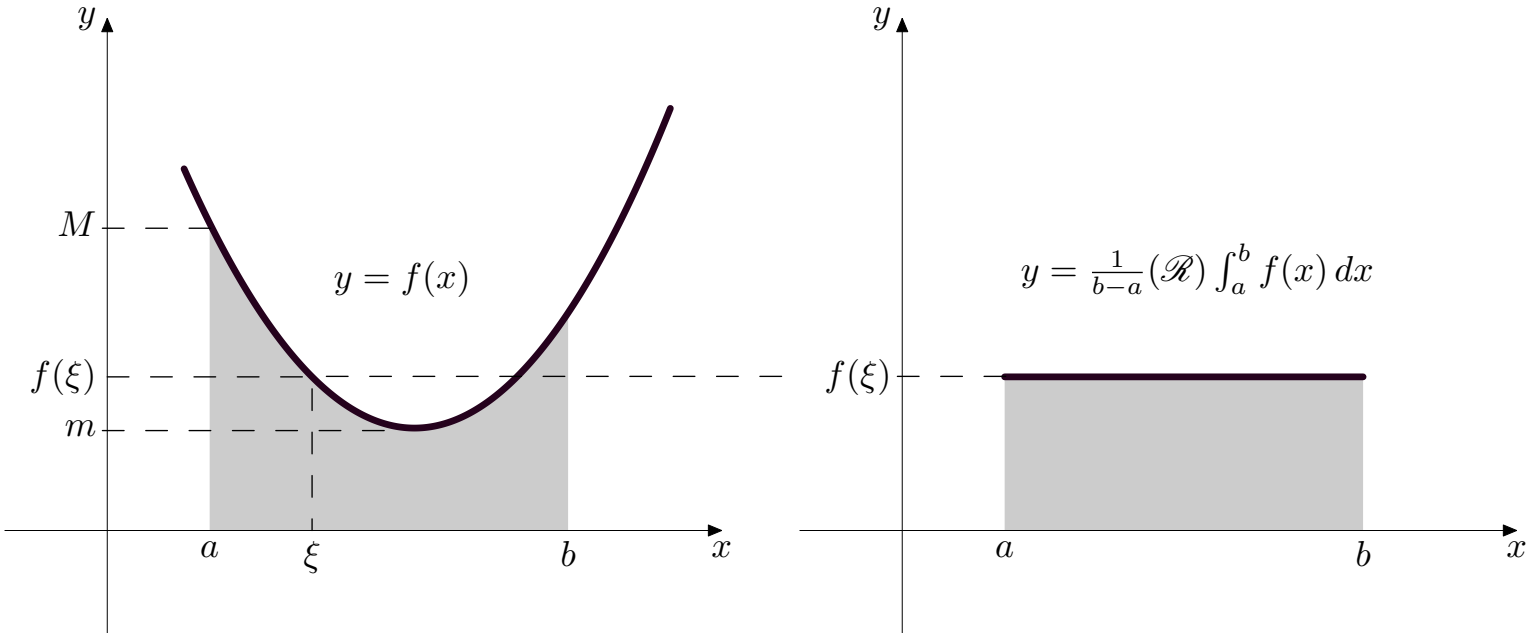
Dôsledok

Ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$, potom existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ také, že

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Alternatívny dôkaz I: aplikovať Lagrangeovu vetu na funkciu $F(x) = (\mathscr{R})\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ na intervale $\langle a, b\rangle$

Alternatívny dôkaz II: keďže $\mathscr{C}\langle a, b\rangle \subset \mathscr{R}\langle a, b\rangle \cap \mathscr{N}\langle a, b\rangle$, stačí použiť výsledok pre $\mathscr{N}$-integrál a Vetu o vzťahu $\mathscr{R}$- a $\mathscr{N}$-integrálu



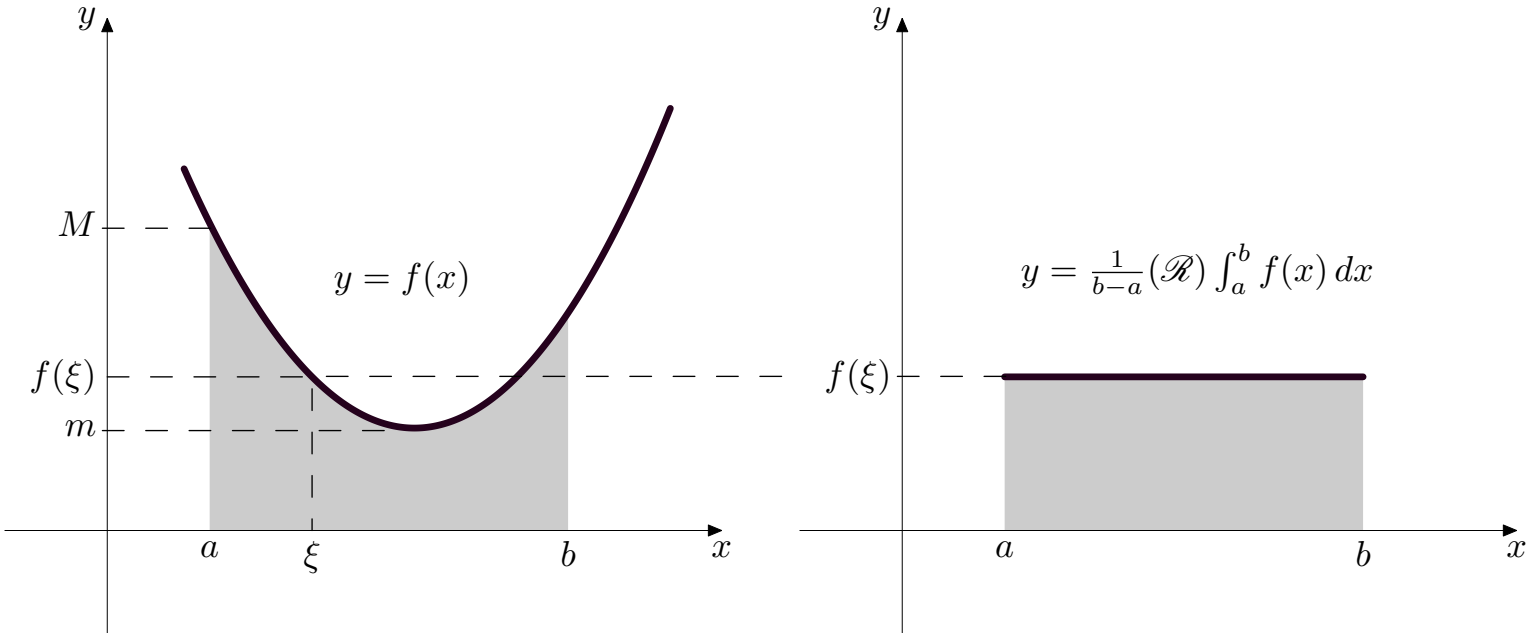
Dôsledok

Ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$, potom existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ také, že

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Alternatívny dôkaz I: aplikovať Lagrangeovu vetu na funkciu $F(x) = (\mathscr{R})\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ na intervale $\langle a, b\rangle$

Alternatívny dôkaz II: keďže $\mathscr{C}\langle a, b\rangle \subset \mathscr{R}\langle a, b\rangle \cap \mathscr{N}\langle a, b\rangle$, stačí použiť výsledok pre $\mathscr{N}$-integrál a Vetu o vzťahu $\mathscr{R}$- a $\mathscr{N}$-integrálu



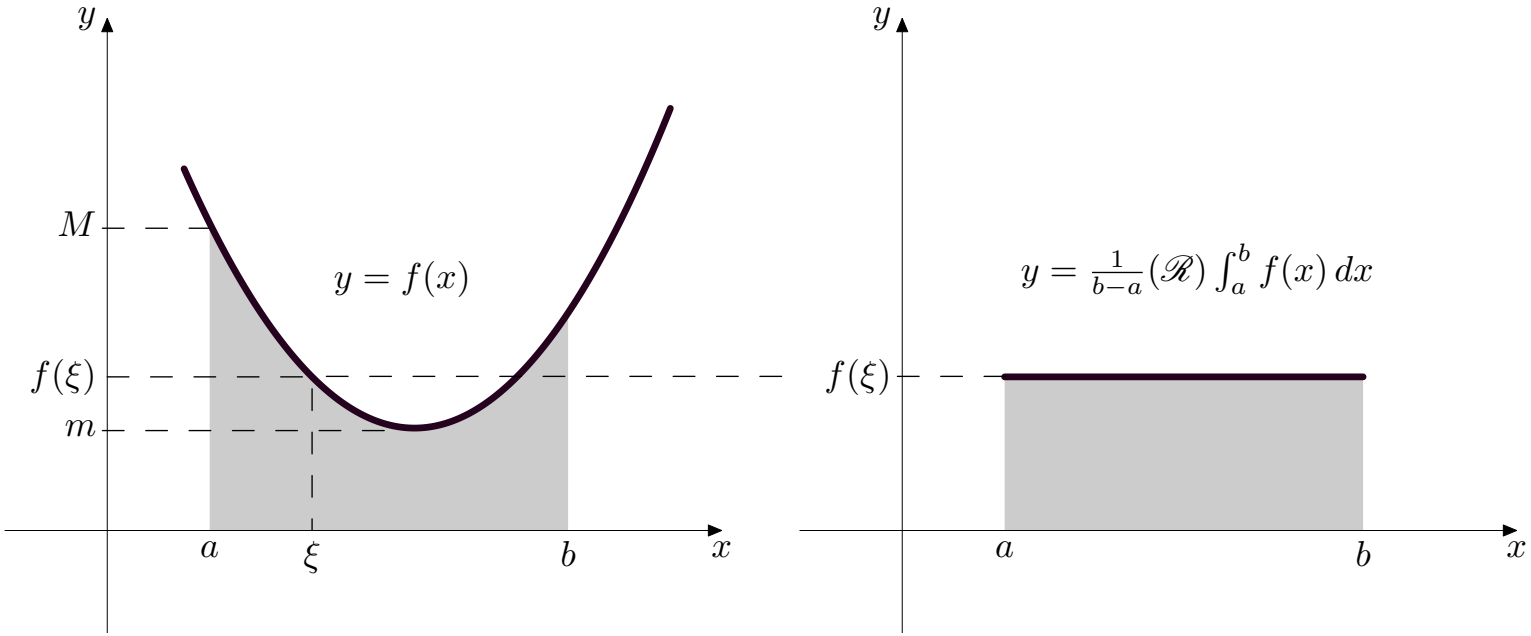
Dôsledok

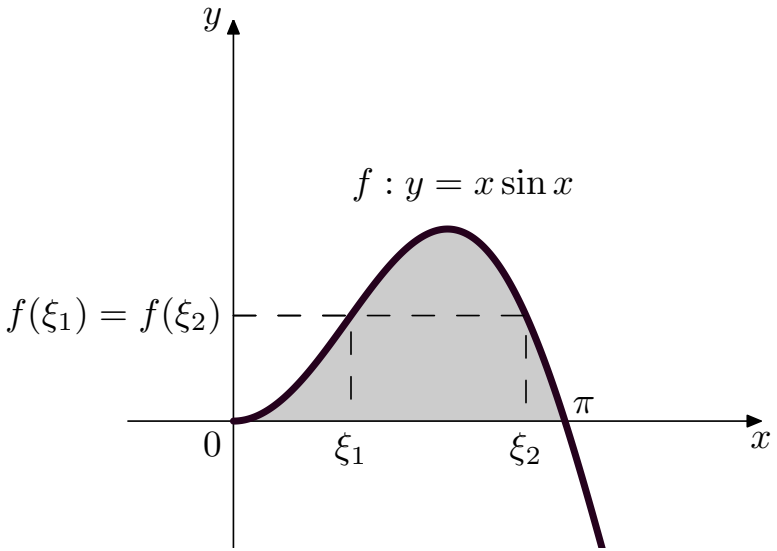
Ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$, potom existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ také, že

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Alternatívny dôkaz I: aplikovať Lagrangeovu vetu na funkciu $F(x) = (\mathscr{R})\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ na intervale $\langle a, b\rangle$

Alternatívny dôkaz II: keďže $\mathscr{C}\langle a, b\rangle \subset \mathscr{R}\langle a, b\rangle \cap \mathscr{N}\langle a, b\rangle$, stačí použiť výsledok pre $\mathscr{N}$-integrál a Vetu o vzťahu $\mathscr{R}$- a $\mathscr{N}$-integrálu



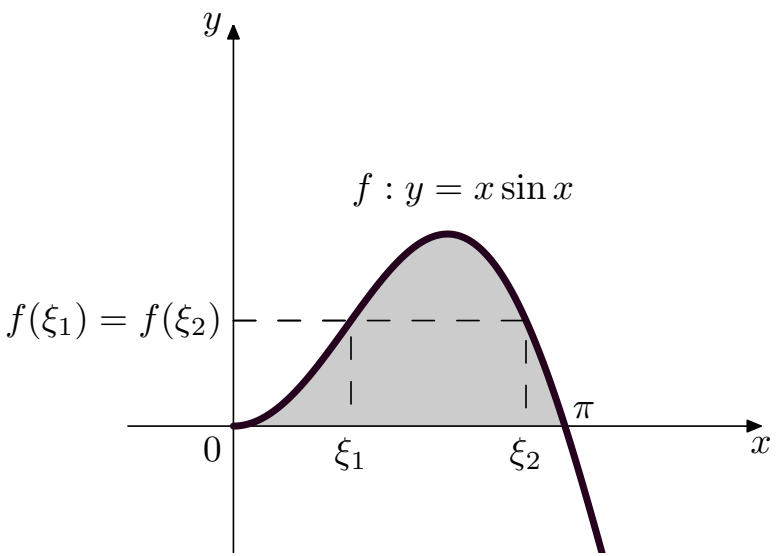


Veta (druhá o strednej hodnote)

Nech f je monotónna na $\langle a, b\rangle$ a $g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Potom existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ také, že

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\cdot(\mathscr{R})\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\cdot(\mathscr{R})\int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Náčrt dôkazu: za predpokladu diferencovateľnosti funkcie f a spojitosti funkcie g použiť per partes na funkcie $u = f$ a $v' = g$ a na vzniknutý integrál aplikovať 1. vetu o strednej hodnote.



Veta (druhá o strednej hodnote)

Nech f je monotónna na $\langle a, b\rangle$ a $g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Potom existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ také, že

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\cdot(\mathscr{R})\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\cdot(\mathscr{R})\int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Náčrt dôkazu: za predpokladu diferencovateľnosti funkcie f a spojitosti funkcie g použiť per partes na funkcie $u = f$ a $v' = g$ a na vzniknutý integrál aplikovať 1. vetu o strednej hodnote.

Dva dôležité predpoklady pri konštrukcii $\mathscr{R}$-integrálu boli:

(a) interval $\langle a, b\rangle$ je konečnej dĺžky;

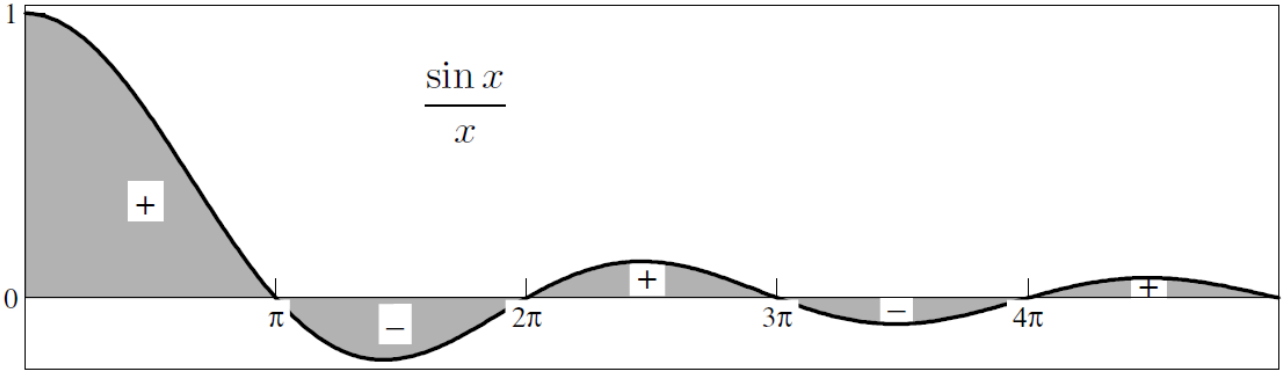
(b) funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená.

Čo ak nie je splnená aspoň jedna z uvedených podmienok?

Definícia – $\mathscr{R}$-integrál ohraničenej funkcie na neohraničenom intervale

Nech f je definovaná na $\langle a, +\infty)$ a pre každé $\xi \geq a$ je $f \in \mathscr{R}\langle a, \xi\rangle$. Hovoríme, že nevlastný $\mathscr{R}$-integrál funkcie f na $\langle a, +\infty)$ existuje (resp. konverguje), akk existuje vlastná limita $\lim\limits_{\xi\to\infty} (\mathscr{R}) \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$ a vtedy kladieme

$$(\mathscr{R}) \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to\infty} (\mathscr{R}) \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Dva dôležité predpoklady pri konštrukcii $\mathscr{R}$-integrálu boli:

(a) interval $\langle a, b\rangle$ je konečnej dĺžky;

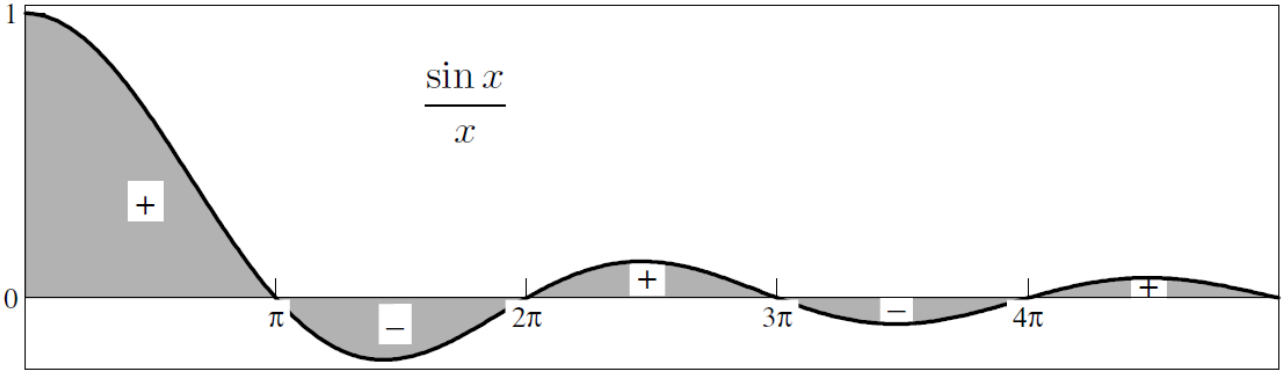
(b) funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená.

Čo ak nie je splnená aspoň jedna z uvedených podmienok?

Definícia – $\mathscr{R}$-integrál ohraničenej funkcie na neohraničenom intervale

Nech f je definovaná na $\langle a, +\infty)$ a pre každé $\xi \geq a$ je $f \in \mathscr{R}\langle a, \xi\rangle$. Hovoríme, že nevlastný $\mathscr{R}$-integrál funkcie f na $\langle a, +\infty)$ existuje (resp. konverguje), akk existuje vlastná limita $\lim\limits_{\xi\to\infty} (\mathscr{R}) \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$ a vtedy kladieme

$$(\mathscr{R}) \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to\infty} (\mathscr{R}) \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Dva dôležité predpoklady pri konštrukcii $\mathscr{R}$-integrálu boli:

(a) interval $\langle a, b\rangle$ je konečnej dĺžky;

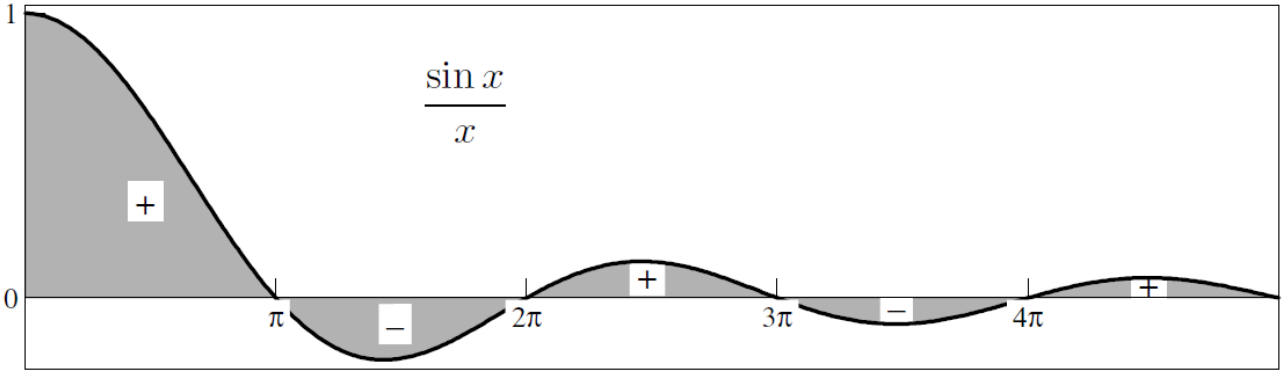
(b) funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená.

Čo ak nie je splnená aspoň jedna z uvedených podmienok?

Definícia – $\mathscr{R}$-integrál ohraničenej funkcie na neohraničenom intervale

Nech f je definovaná na $\langle a, +\infty)$ a pre každé $\xi \geq a$ je $f \in \mathscr{R}\langle a, \xi\rangle$. Hovoríme, že nevlastný $\mathscr{R}$-integrál funkcie f na $\langle a, +\infty)$ existuje (resp. konverguje), akk existuje vlastná limita $\lim\limits_{\xi\to\infty} (\mathscr{R}) \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$ a vtedy kladieme

$$(\mathscr{R}) \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to\infty} (\mathscr{R}) \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Dva dôležité predpoklady pri konštrukcii $\mathscr{R}$-integrálu boli:

(a) interval $\langle a, b\rangle$ je konečnej dĺžky;

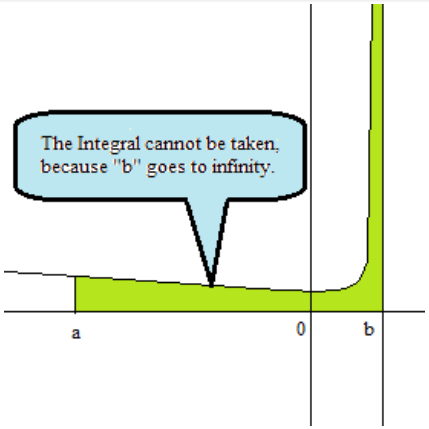
(b) funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená.

Čo ak nie je splnená aspoň jedna z uvedených podmienok?

Definícia – $\mathscr{R}$-integrál neohraničenej funkcie na ohraničenom intervale

Nech f je definovaná na $\langle a, b\rangle$ a pre každé $\langle a, \eta\rangle \subset \langle a, b\rangle$ je $f \in \mathscr{R}\langle a, \eta\rangle$. Hovoríme, že nevlastný $\mathscr{R}$-integrál funkcie f na $\langle a, b\rangle$ existuje, akk existuje vlastná limita $\lim\limits_{\eta\to b^-} (\mathscr{R}) \int_a^\eta f(x)\,\mathrm{d}x$ a vtedy kladieme

$$(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to b^-} (\mathscr{R}) \int_a^\eta f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Dva dôležité predpoklady pri konštrukcii $\mathscr{R}$-integrálu boli:

(a) interval $\langle a, b\rangle$ je konečnej dĺžky;

(b) funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená.

Čo ak nie je splnená aspoň jedna z uvedených podmienok?

Definícia – kritický (singulárny) bod

Bod $x_0 \in \mathbb{R}$ nazývame kritický (singulárny) bod funkcie f, akk nastane jeden z prípadov

(i) existuje $\delta_0 > 0$ také, že f je definovaná na $(x_0 - \delta_0, x_0)$ a neohraničená na $(x_0 - \delta, x_0)$ pre ľubovoľné $0 < \delta < \delta_0$;

(ii) existuje $\delta_0 > 0$ také, že f je definovaná na $(x_0, x_0 + \delta_0)$ a neohraničená na $(x_0, x_0 + \delta)$ pre ľubovoľné $0 < \delta < \delta_0$.

Poznámka: Nevlastné číslo $+\infty$ $[-\infty]$ nazývame kritický bod funkcie f, akk f je definovaná na intervale $(K, +\infty)$ $[(-\infty, K)]$ pre nejaké $K \in \mathbb{R}$.

Dva dôležité predpoklady pri konštrukcii $\mathscr{R}$-integrálu boli:

(a) interval $\langle a, b\rangle$ je konečnej dĺžky;

(b) funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená.

Čo ak nie je splnená aspoň jedna z uvedených podmienok?

Definícia – kritický (singulárny) bod

Bod $x_0 \in \mathbb{R}$ nazývame kritický (singulárny) bod funkcie f, akk nastane jeden z prípadov

(i) existuje $\delta_0 > 0$ také, že f je definovaná na $(x_0 - \delta_0, x_0)$ a neohraničená na $(x_0 - \delta, x_0)$ pre ľubovoľné $0 < \delta < \delta_0$;

(ii) existuje $\delta_0 > 0$ také, že f je definovaná na $(x_0, x_0 + \delta_0)$ a neohraničená na $(x_0, x_0 + \delta)$ pre ľubovoľné $0 < \delta < \delta_0$.

Poznámka: Nevlastné číslo $+\infty$ $[-\infty]$ nazývame kritický bod funkcie f, akk f je definovaná na intervale $(K, +\infty)$ $[(-\infty, K)]$ pre nejaké $K \in \mathbb{R}$.

Definícia – všeobecný prípad nevlastného $\mathscr{R}$-integrálu

Nech f je definovaná na $\langle a, b\rangle$ s výnimkou konečného počtu kritických bodov $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Nech f je $\mathscr{R}$-integrovateľná na každom podintervale (a, b) neobsahujúcom kritický bod. Hovoríme, že nevlastný $\mathscr{R}$-integrál funkcie f na $\langle a, b\rangle$ existuje, akk pre každú postupnosť bodov

$$a < d_0 < c_1 < d_1 < \cdots < d_{k-1} < c_k < d_k < b$$

existujú $\mathscr{R}$-integrály

$$(\mathscr{R})\int_a^{d_0} f(x)\,\mathrm{d}x, (\mathscr{R})\int_{d_0}^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x, \ldots, (\mathscr{R})\int_{c_k}^{d_k} f(x)\,\mathrm{d}x, (\mathscr{R})\int_{d_k}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

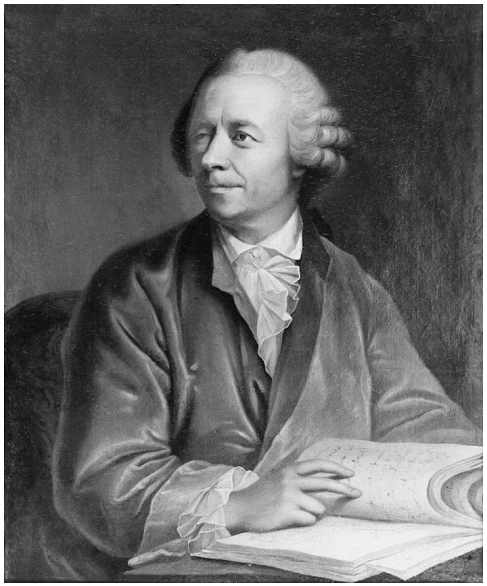
Súčet týchto integrálov budeme nazývať nevlastný $\mathscr{R}$-integrál.

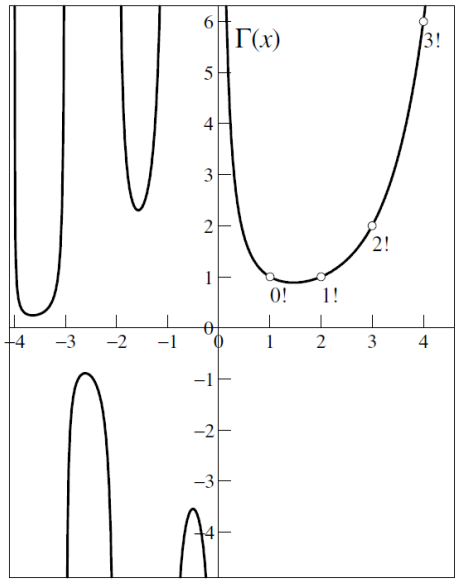
Only wimps do the general case. True teachers tackle examples.

Parlett: *Math. Intelligencer* **14** (1), p.35

Eulerova Gama funkcia (1781)

$$\Gamma(\alpha) := (\mathscr{R}) \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x, \quad \alpha > 0$$



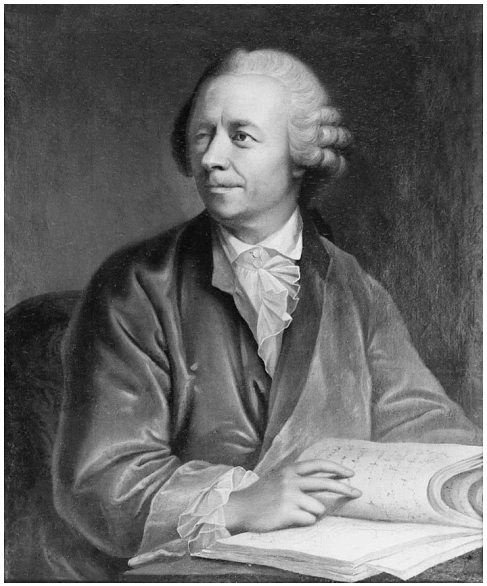


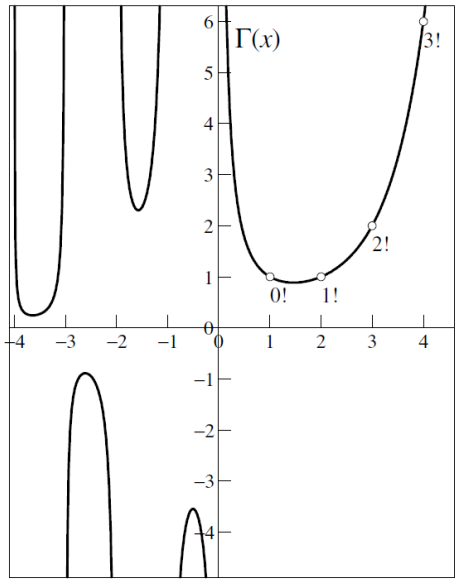
LEONHARD EULER (1707–1783)

- interpoluje faktoriál, t.j. $\Gamma(n+1) = n! = (\mathscr{R}) \int_0^\infty x^n \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$
- na základe vlastnosti $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ vieme definovať $\Gamma(\alpha)$ aj pre záporné $\alpha \neq -1, -2, -3, \ldots$ položením $\Gamma(\alpha-1) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha-1}$
- aplikácie: analytická teória čísel, pravdepodobnosť a štatistika, teória strún, atď.

Eulerova Gama funkcia (1781)

$$\Gamma(\alpha) := (\mathscr{R}) \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x, \quad \alpha > 0$$



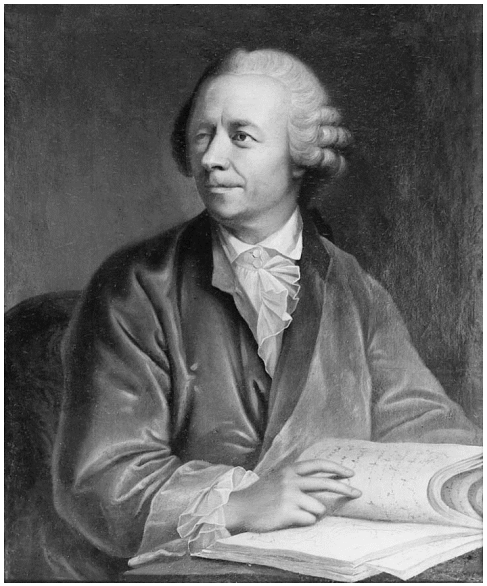


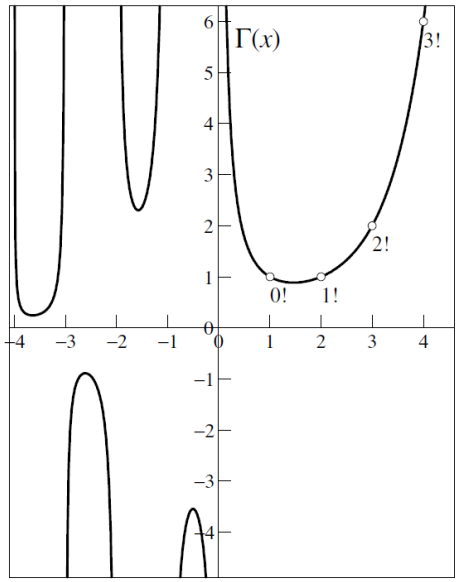
LEONHARD EULER (1707–1783)

- interpoluje faktoriál, t.j. $\Gamma(n+1) = n! = (\mathscr{R}) \int_0^\infty x^n \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$
- na základe vlastnosti $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ vieme definovať $\Gamma(\alpha)$ aj pre záporné $\alpha \neq -1, -2, -3, \ldots$ položením $\Gamma(\alpha-1) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha-1}$
- aplikácie: analytická teória čísel, pravdepodobnosť a štatistika, teória strún, atď.

Eulerova Gama funkcia (1781)

$$\Gamma(\alpha) := (\mathscr{R}) \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x, \quad \alpha > 0$$



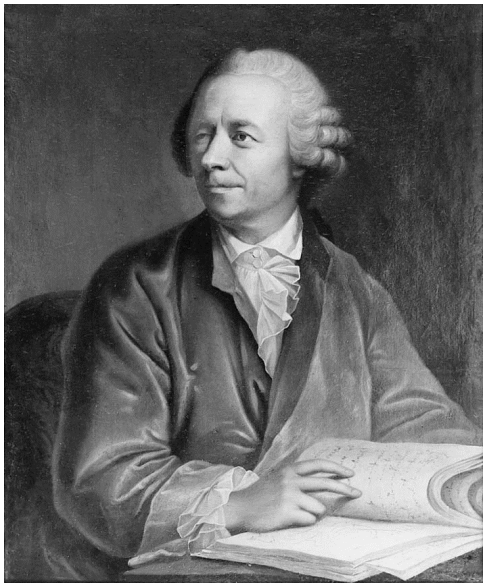


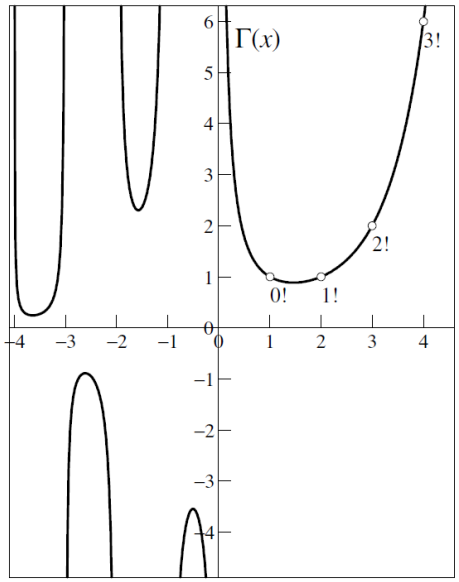
LEONHARD EULER (1707–1783)

- interpoluje faktoriál, t.j. $\Gamma(n+1) = n! = (\mathscr{R}) \int_0^\infty x^n \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$
- na základe vlastnosti $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ vieme definovať $\Gamma(\alpha)$ aj pre záporné $\alpha \neq -1, -2, -3, \ldots$ položením $\Gamma(\alpha-1) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha-1}$
- aplikácie: analytická teória čísel, pravdepodobnosť a štatistika, teória strún, atď.

Eulerova Gama funkcia (1781)

$$\Gamma(\alpha) := (\mathscr{R}) \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x, \quad \alpha > 0$$





LEONHARD EULER (1707–1783)

- interpoluje faktoriál, t.j. $\Gamma(n+1) = n! = (\mathscr{R}) \int_0^\infty x^n \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$
- na základe vlastnosti $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ vieme definovať $\Gamma(\alpha)$ aj pre záporné $\alpha \neq -1, -2, -3, \ldots$ položením $\Gamma(\alpha-1) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha-1}$
- aplikácie: analytická teória čísel, pravdepodobnosť a štatistika, teória strún, atď.