Matematická analýza III.

(prezentácia k prednáške MAN2c/10)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MAN2c.html
Prednáška 7

3. novembra 2023

Pozorovanie: ak $f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$, potom pre každé $u,w,v \in \langle a,b\rangle$ s vlastnosťou $u < v < w$ platí aditivita

$$(\mathscr{R})\int_u^w f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_v^w f(x)\,\mathrm{d}x,$$

t.j. zobrazenie $\varphi_f(\langle a,b\rangle) = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je aditívne.

Definícia (aditívna funkcia intervalu)

Reálnu funkciu φ definovanú na množine všetkých podintervalov intervalu $\langle a,b\rangle$ takú, že pre každé $u,w,v \in \langle a,b\rangle$, $u < v < w$ platí

$$\varphi(\langle u,w\rangle) = \varphi(\langle u,v\rangle) + \varphi(\langle v,w\rangle)$$

nazývame aditívna funkcia intervalu na $\langle a,b\rangle$.

Poznámky a príklady:

- ak $g : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ je ľubovoľná funkcia, potom pre $\langle u,v\rangle \subseteq \langle a,b\rangle$ funkcia daná predpisom

  $$\varphi(\langle u,v\rangle) = g(v) - g(u)$$

  je aditívna funkcia intervalu na $\langle a,b\rangle$

Pozorovanie: ak $f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$, potom pre každé $u,w,v \in \langle a,b\rangle$ s vlastnosťou $u < v < w$ platí aditivita

$$(\mathscr{R})\int_u^w f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_v^w f(x)\,\mathrm{d}x,$$

t.j. zobrazenie $\varphi_f(\langle a,b\rangle) = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je aditívne.

Definícia (aditívna funkcia intervalu)

Reálnu funkciu φ definovanú na množine všetkých podintervalov intervalu $\langle a,b\rangle$ takú, že pre každé $u,w,v \in \langle a,b\rangle$, $u < v < w$ platí

$$\varphi(\langle u,w\rangle) = \varphi(\langle u,v\rangle) + \varphi(\langle v,w\rangle)$$

nazývame aditívna funkcia intervalu na $\langle a,b\rangle$.

Poznámky a príklady:

- ak $g : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ je ľubovoľná funkcia, potom pre $\langle u,v\rangle \subseteq \langle a,b\rangle$ funkcia daná predpisom

$$\varphi(\langle u,v\rangle) = g(v) - g(u)$$

je aditívna funkcia intervalu na $\langle a,b\rangle$

Pozorovanie: ak $f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$, potom pre každé $u,w,v \in \langle a,b\rangle$ s vlastnosťou $u < v < w$ platí aditivita

$$(\mathscr{R})\int_u^w f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_v^w f(x)\,\mathrm{d}x,$$

t.j. zobrazenie $\varphi_f(\langle a,b\rangle) = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je aditívne.

Definícia (aditívna funkcia intervalu)

Reálnu funkciu φ definovanú na množine všetkých podintervalov intervalu $\langle a,b\rangle$ takú, že pre každé $u,w,v \in \langle a,b\rangle$, $u < v < w$ platí

$$\varphi(\langle u,w\rangle) = \varphi(\langle u,v\rangle) + \varphi(\langle v,w\rangle)$$

nazývame aditívna funkcia intervalu na $\langle a,b\rangle$.

Poznámky a príklady:

- ak $g : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ je ľubovoľná funkcia, potom pre $\langle u,v\rangle \subseteq \langle a,b\rangle$ funkcia daná predpisom

  $$\varphi(\langle u,v\rangle) = g(v) - g(u)$$

  je aditívna funkcia intervalu na $\langle a,b\rangle$

Pozorovanie: ak $f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$, potom pre každé $u,w,v \in \langle a,b\rangle$ s vlastnosťou $u < v < w$ platí aditivita

$$(\mathscr{R})\int_u^w f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_v^w f(x)\,\mathrm{d}x,$$

t.j. zobrazenie $\varphi_f(\langle a,b\rangle) = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je aditívne.

Definícia (aditívna funkcia intervalu)

Reálnu funkciu φ definovanú na množine všetkých podintervalov intervalu $\langle a,b\rangle$ takú, že pre každé $u,w,v \in \langle a,b\rangle$, $u < v < w$ platí

$$\varphi(\langle u,w\rangle) = \varphi(\langle u,v\rangle) + \varphi(\langle v,w\rangle)$$

nazývame aditívna funkcia intervalu na $\langle a,b\rangle$.

Poznámky a príklady:

- nie každá aditívna funkcia intervalu sa dá zapísať v tvare integrálu, napr. $\varphi(\langle u,v\rangle) = g(v) - g(u)$ pre $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle -1,0) \\ 1, & x \in \langle 0,1\rangle \end{cases}$

Akú vlastnosť musí mať φ, aby sa to dalo?

Pozorovanie: ak $f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$, potom pre každé $u,w,v \in \langle a,b\rangle$ s vlastnosťou $u < v < w$ platí aditivita

$$(\mathscr{R})\int_u^w f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_v^w f(x)\,\mathrm{d}x,$$

t.j. zobrazenie $\varphi_f(\langle a,b\rangle) = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je aditívne.

Definícia (aditívna funkcia intervalu)

Reálnu funkciu φ definovanú na množine všetkých podintervalov intervalu $\langle a,b\rangle$ takú, že pre každé $u,w,v \in \langle a,b\rangle$, $u < v < w$ platí

$$\varphi(\langle u,w\rangle) = \varphi(\langle u,v\rangle) + \varphi(\langle v,w\rangle)$$

nazývame aditívna funkcia intervalu na $\langle a,b\rangle$.

Poznámky a príklady:

- nie každá aditívna funkcia intervalu sa dá zapísať v tvare integrálu, napr. $\varphi(\langle u,v\rangle) = g(v) - g(u)$ pre $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle -1,0) \\ 1, & x \in \langle 0,1\rangle \end{cases}$

Akú vlastnosť musí mať φ, aby sa to dalo?

Keď neviem, čo robiť, pracujem.

Karel Čapek

Definícia (mediálna funkcia)

Hovoríme, že aditívna funkcia φ intervalu na $\langle a, b\rangle$ je mediálna vzhľadom na reálnu funkciu f definovanú na $\langle a, b\rangle$, akk f je taká, že pre každý $\langle u, v\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$ platí

$$m(v-u) \leq \varphi(\langle u, v\rangle) \leq M(v-u),$$

kde $m = \inf\limits_{x\in\langle u,v\rangle} f(x)$ a $M = \sup\limits_{x\in\langle u,v\rangle} f(x)$.

Veta (o integrálnej reprezentácii mediálnej aditívnej funkcie intervalu)

Nech φ je aditívna funkcia intervalu na $\langle a, b\rangle$, ktorá je mediálna vzhľadom na funkciu $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Potom pre každý interval $\langle u, v\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$ platí

$$\varphi(\langle u, v\rangle) = (\mathscr{R}) \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Na čo nám to bude? Hneď ako sa o nejakej veličine presvedčíme, že je aditívnou funkciou intervalu a nájdeme takú funkciu, vzhľadom na ktorú je mediálna, použijeme na jej výpočet uvedenú vetu!

Keď neviem, čo robiť, pracujem.

Karel Čapek

Definícia (mediálna funkcia)

Hovoríme, že aditívna funkcia φ intervalu na $\langle a, b\rangle$ je mediálna vzhľadom na reálnu funkciu f definovanú na $\langle a, b\rangle$, akk f je taká, že pre každý $\langle u, v\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$ platí

$$m(v-u) \leq \varphi(\langle u, v\rangle) \leq M(v-u),$$

kde $m = \inf\limits_{x\in\langle u,v\rangle} f(x)$ a $M = \sup\limits_{x\in\langle u,v\rangle} f(x)$.

Veta (o integrálnej reprezentácii mediálnej aditívnej funkcie intervalu)

Nech φ je aditívna funkcia intervalu na $\langle a, b\rangle$, ktorá je mediálna vzhľadom na funkciu $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Potom pre každý interval $\langle u, v\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$ platí

$$\varphi(\langle u, v\rangle) = (\mathscr{R}) \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Na čo nám to bude? Hneď ako sa o nejakej veličine presvedčíme, že je aditívnou funkciou intervalu a nájdeme takú funkciu, vzhľadom na ktorú je mediálna, použijeme na jej výpočet uvedenú vetu!

Keď neviem, čo robiť, pracujem.

Karel Čapek

Definícia (mediálna funkcia)

Hovoríme, že aditívna funkcia φ intervalu na $\langle a, b\rangle$ je mediálna vzhľadom na reálnu funkciu f definovanú na $\langle a, b\rangle$, akk f je taká, že pre každý $\langle u, v\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$ platí

$$m(v-u) \leq \varphi(\langle u, v\rangle) \leq M(v-u),$$

kde $m = \inf\limits_{x\in\langle u,v\rangle} f(x)$ a $M = \sup\limits_{x\in\langle u,v\rangle} f(x)$.

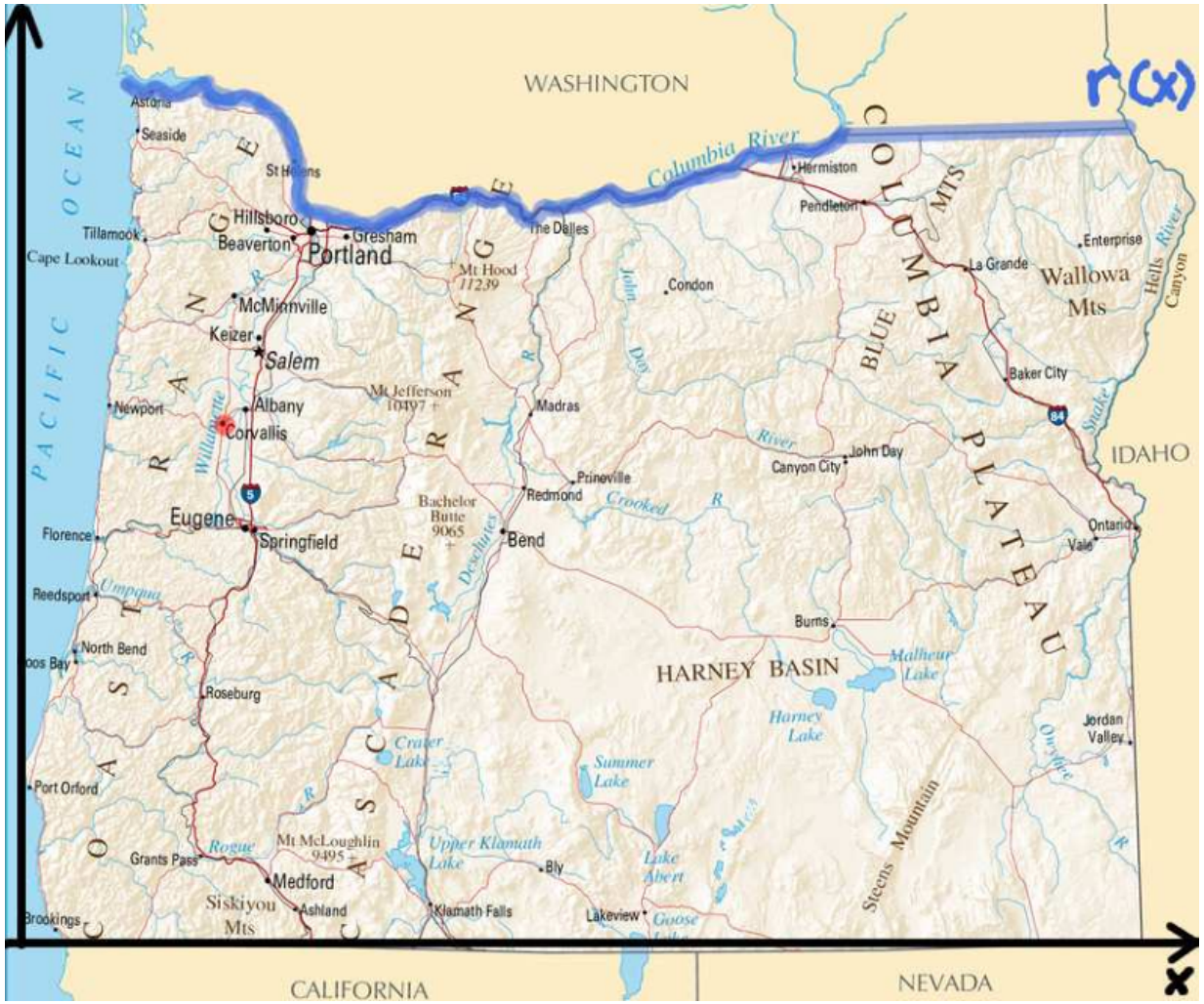
Veta (o integrálnej reprezentácii mediálnej aditívnej funkcie intervalu)

Nech φ je aditívna funkcia intervalu na $\langle a, b\rangle$, ktorá je mediálna vzhľadom na funkciu $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Potom pre každý interval $\langle u, v\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$ platí

$$\varphi(\langle u, v\rangle) = (\mathscr{R}) \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x.$$

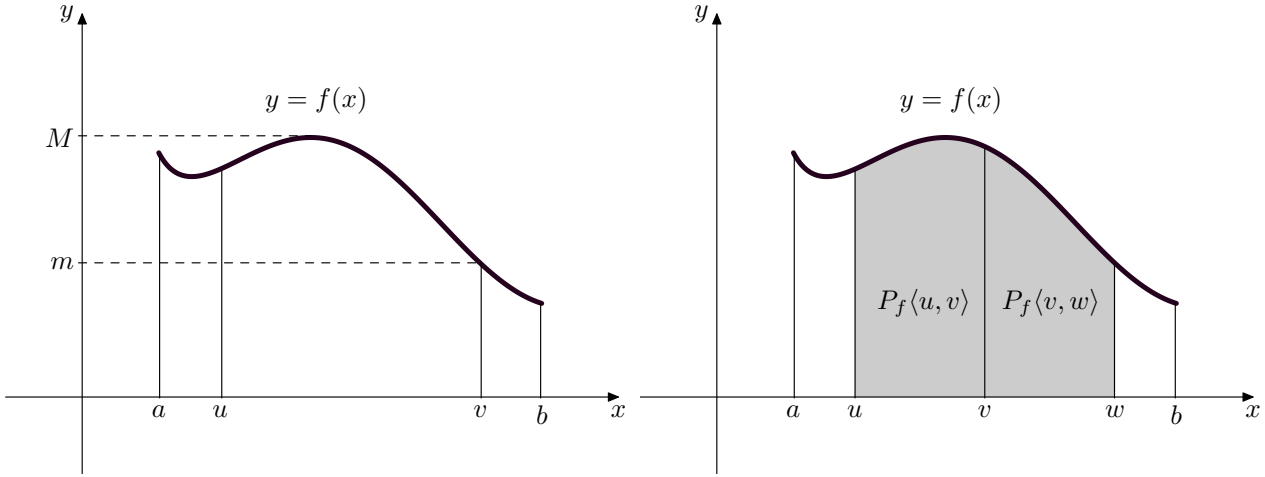
Na čo nám to bude? Hneď ako sa o nejakej veličine presvedčíme, že je aditívnou funkciou intervalu a nájdeme takú funkciu, vzhľadom na ktorú je mediálna, použijeme na jej výpočet uvedenú vetu!

Plošný obsah rovinného útvaru



Integrál (časti) rieky *Columbia River* je rovný Oregonu, oblasti pod riekou.

Plošný obsah rovinného útvaru



Definícia (obsah plochy)

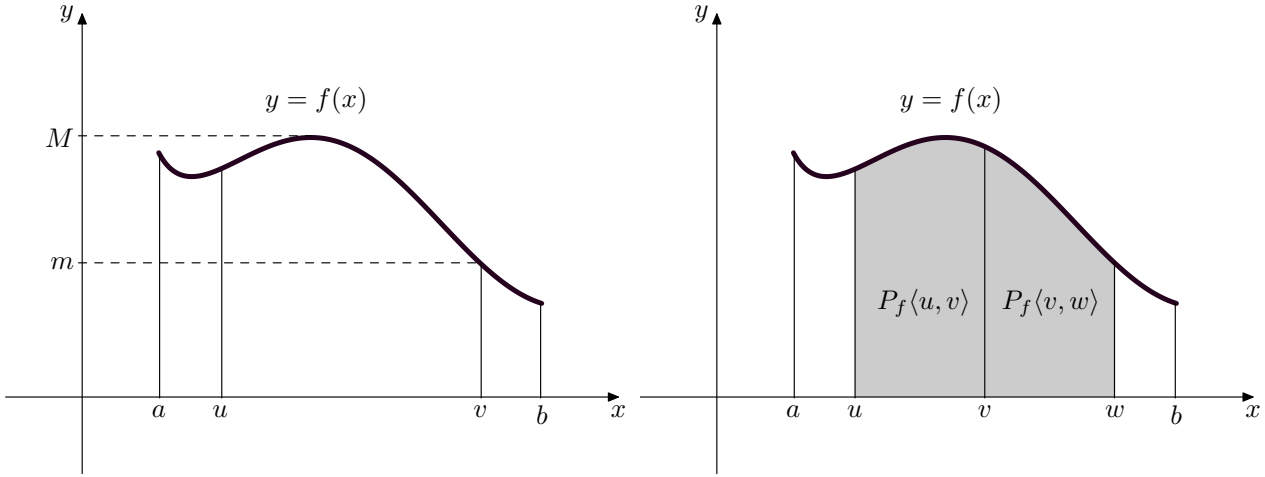
Plošným obsahom útvaru ohraničeného grafom nezápornej funkcie $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ a priamkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ nazývame hodnotu $P_f\langle a, b\rangle$ aditívnej funkcie intervalu na $\langle a, b\rangle$, ktorá je mediálna vzhľadom na f.

Veta VI.6

Nech $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ je nezáporná funkcia. Potom

$$P_f\langle a, b\rangle = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Plošný obsah rovinného útvaru



Definícia (obsah plochy)

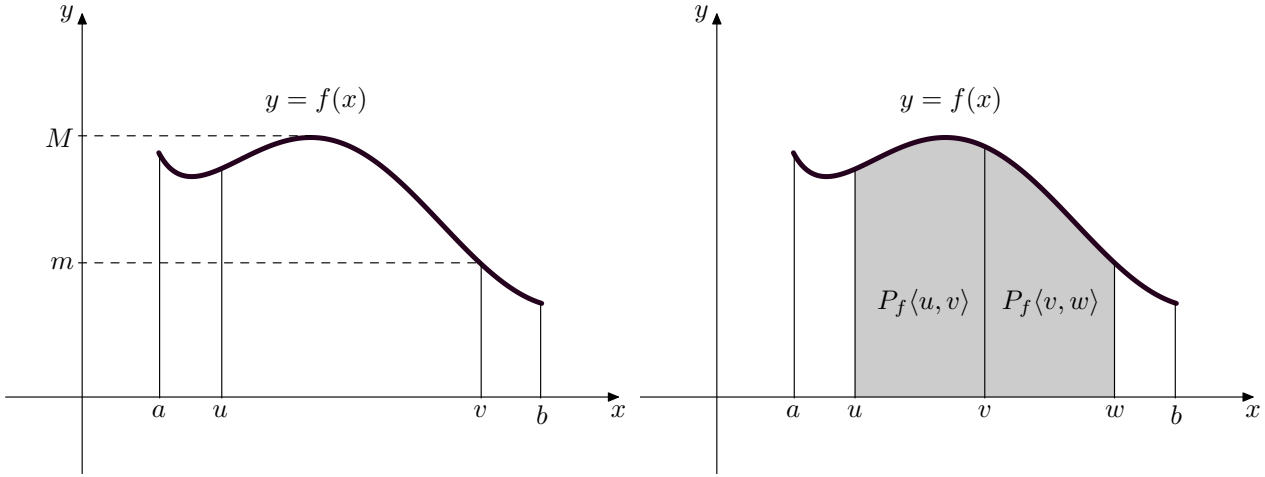
Plošným obsahom útvaru ohraničeného grafom nezápornej funkcie $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ a priamkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ nazývame hodnotu $P_f\langle a, b\rangle$ aditívnej funkcie intervalu na $\langle a, b\rangle$, ktorá je mediálna vzhľadom na f.

Veta VI.6

Nech $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ je nezáporná funkcia. Potom

$$P_f\langle a, b\rangle = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Plošný obsah rovinného útvaru



Definícia (obsah plochy)

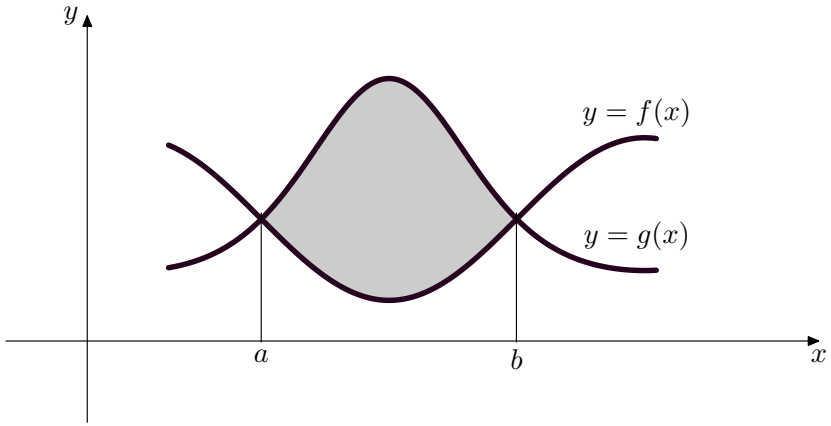
Plošným obsahom útvaru ohraničeného grafom nezápornej funkcie $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ a priamkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ nazývame hodnotu $P_f\langle a, b\rangle$ aditívnej funkcie intervalu na $\langle a, b\rangle$, ktorá je mediálna vzhľadom na f.

Veta VI.6

Nech $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ je nezáporná funkcia. Potom

$$P_f\langle a, b\rangle = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Plošný obsah rovinného útvaru



Definícia (obsah plochy)

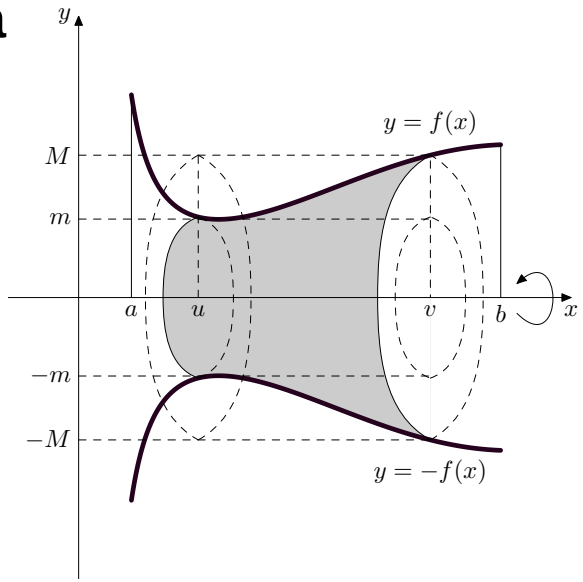
Plošným obsahom útvaru ohraničeného grafom nezápornej funkcie $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ a priamkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ nazývame hodnotu $P_f\langle a, b\rangle$ aditívnej funkcie intervalu na $\langle a, b\rangle$, ktorá je mediálna vzhľadom na f.

Dôsledok

Ak $f, g \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ také, že pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \leq g(x)$. Potom plošný obsah $P_{f,g}$ útvaru ohraničeného grafmi funkcií f a g na intervale $\langle a, b\rangle$ je

$$P_{f,g}\langle a, b\rangle = (\mathscr{R}) \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Objem rotačného telesa



Definícia (objem telesa)

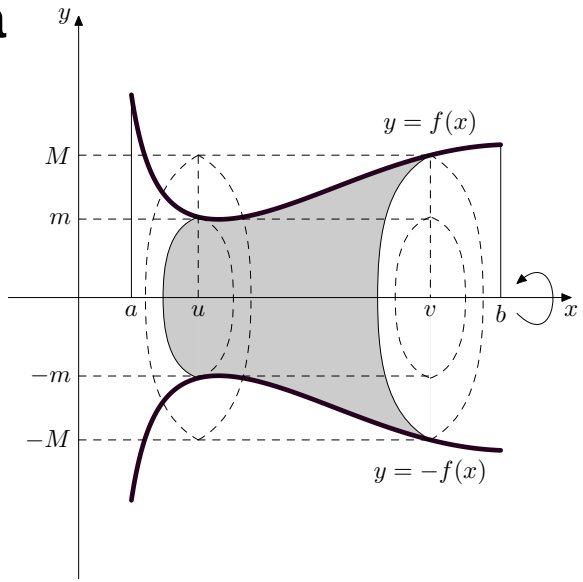
Objemom rotačného telesa vytvoreného rotáciou plochy ohraničenej grafom nezápornej funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ nazývame hodnotu $V_f\langle a, b\rangle$ aditívnej funkcie V_f na intervale $\langle a, b\rangle$, ktorá je mediálna vzhľadom k funkcii πf^2.

Veta VI.7

Nech $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ je nezáporná funkcia. Potom

$$V_f\langle a, b\rangle = \pi(\mathscr{R})\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Objem rotačného telesa



Definícia (objem telesa)

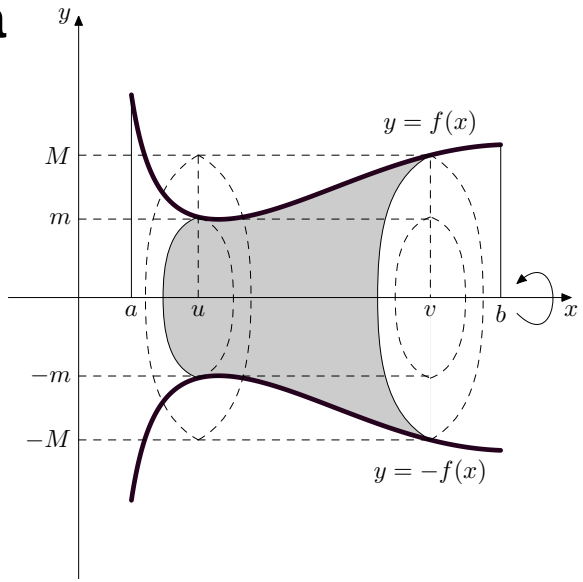
Objemom rotačného telesa vytvoreného rotáciou plochy ohraničenej grafom nezápornej funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ nazývame hodnotu $V_f\langle a, b\rangle$ aditívnej funkcie V_f na intervale $\langle a, b\rangle$, ktorá je mediálna vzhľadom k funkcii πf^2.

Veta VI.7

Nech $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ je nezáporná funkcia. Potom

$$V_f\langle a, b\rangle = \pi(\mathscr{R})\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Objem rotačného telesa



Definícia (objem telesa)

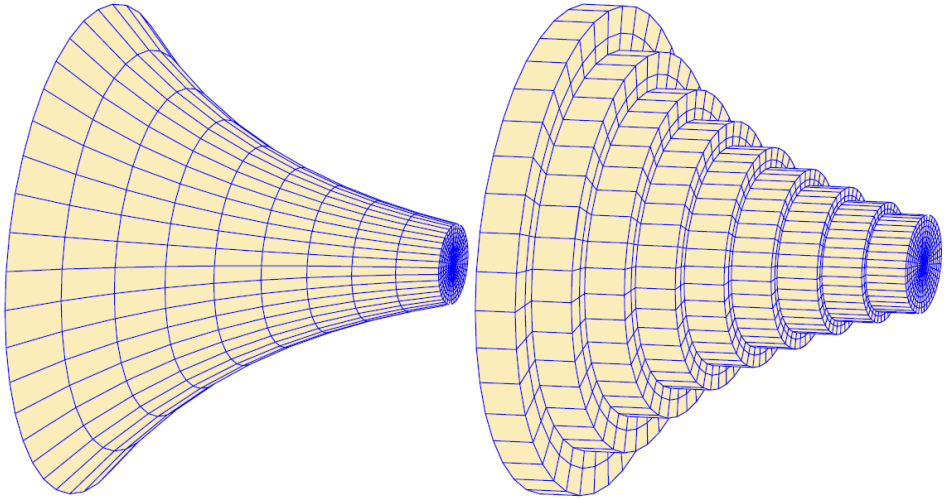
Objemom rotačného telesa vytvoreného rotáciou plochy ohraničenej grafom nezápornej funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ nazývame hodnotu $V_f\langle a, b\rangle$ aditívnej funkcie V_f na intervale $\langle a, b\rangle$, ktorá je mediálna vzhľadom k funkcii πf^2.

Veta VI.7

Nech $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ je nezáporná funkcia. Potom

$$V_f\langle a, b\rangle = \pi(\mathscr{R}) \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Objem rotačného telesa



Dôsledok

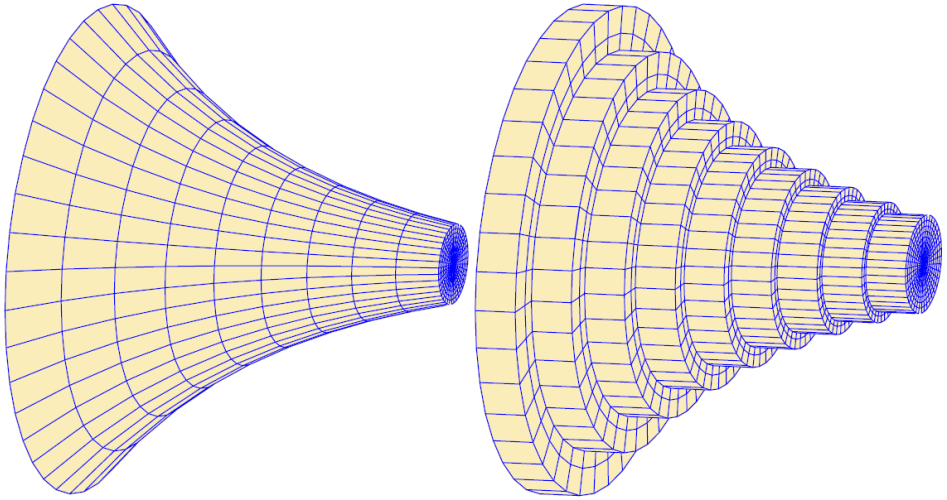
Ak $f, g \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ také, že pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \leq g(x)$. Potom objem $V_{f,g}$ rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy ohraničenej grafmi nezáporných funkcií f a g na intervale $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_x je

$$V_{f,g}\langle a, b\rangle = \pi(\mathscr{R}) \int_a^b (g^2(x) - f^2(x))\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka: pre objem $\widetilde{V}_{f,g}$ rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy ohraničenej grafmi nezáporných funkcií f a g na intervale $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_y platí

$$\widetilde{V}_{f,g}\langle a, b\rangle = \pi(\mathscr{R}) \int_a^b x(g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Objem rotačného telesa



Dôsledok

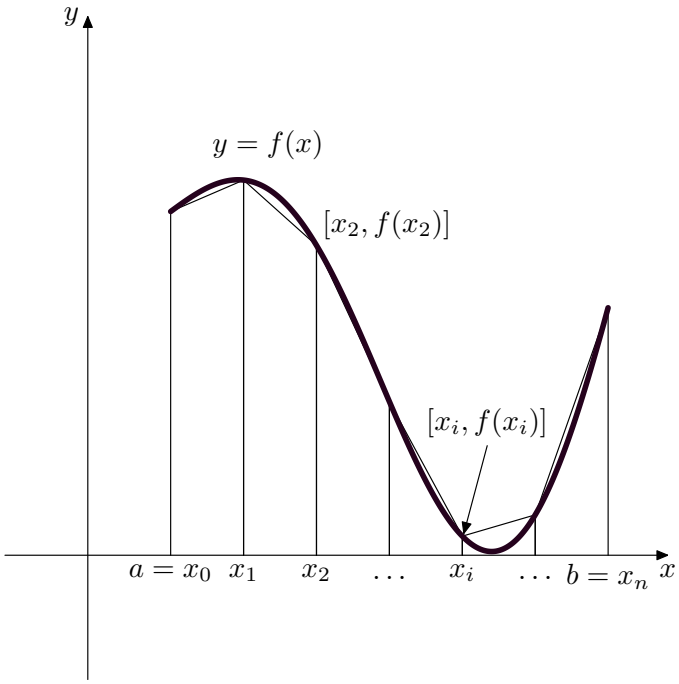
Ak $f, g \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ také, že pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \leq g(x)$. Potom objem $V_{f,g}$ rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy ohraničenej grafmi nezáporných funkcií f a g na intervale $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_x je

$$V_{f,g}\langle a, b\rangle = \pi(\mathscr{R}) \int_a^b (g^2(x) - f^2(x))\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka: pre objem $\widetilde{V}_{f,g}$ rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy ohraničenej grafmi nezáporných funkcií f a g na intervale $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_y platí

$$\widetilde{V}_{f,g}\langle a, b\rangle = \pi(\mathscr{R}) \int_a^b x(g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Dľžka rovinnej krivky



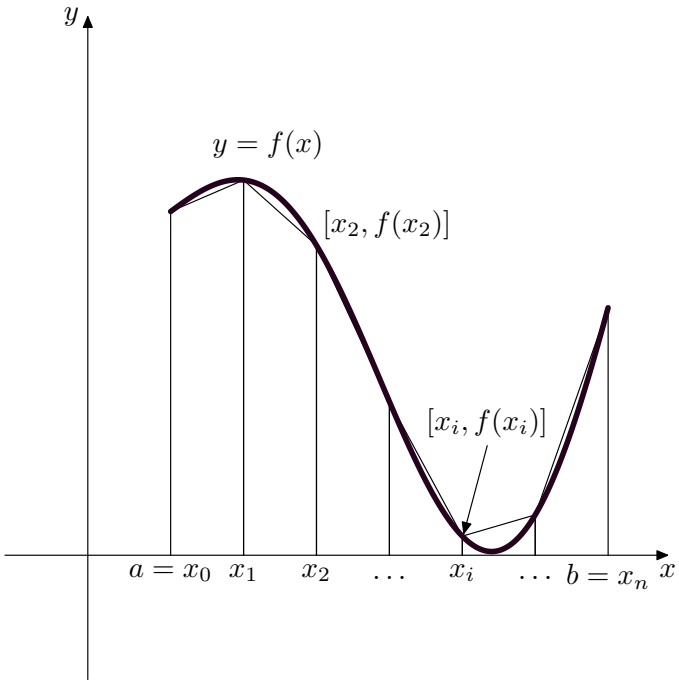
Definícia (dĺžka krivky)

Nech $f \in \mathscr{C}^1\langle a, b\rangle$ a $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ je normálna postupnosť delení. Ak δ_n je dĺžka lomenej čiary utvorenej pomocou delenia D_n a funkcie f, potom číslo

$$L_f\langle a, b\rangle = \lim_{n\to\infty} \delta_n$$

nazývame dĺžkou krivky danej grafom funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$.

Dľžka rovinnej krivky

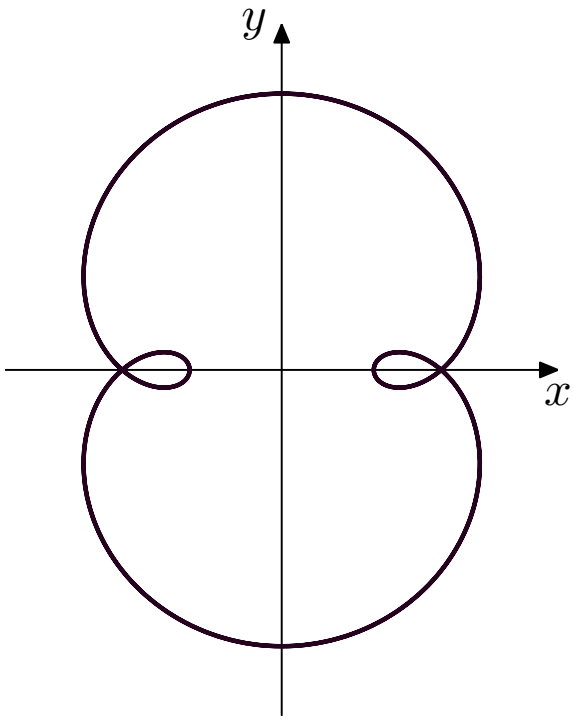


Veta VI.8

Nech $f \in \mathscr{C}^1\langle a, b\rangle$. Potom

$$L_f\langle a, b\rangle = (\mathscr{R})\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

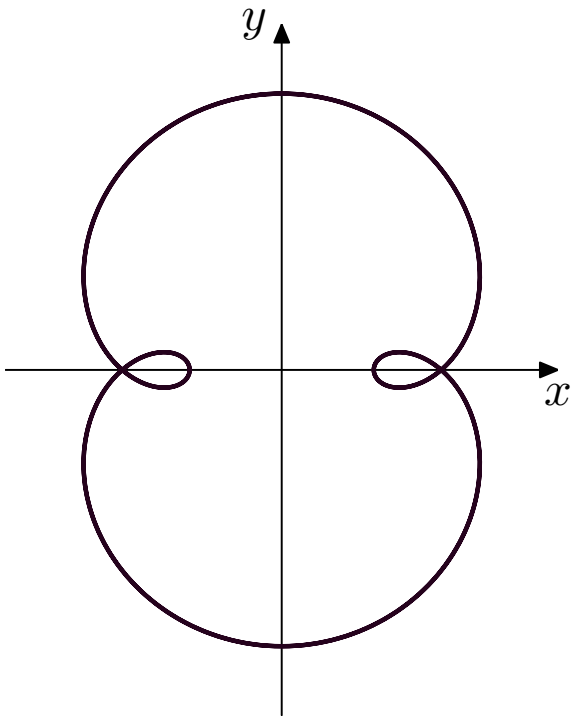
Dĺžka rovinnej krivky



Definícia (parametricky zadaná krivka)

Množinu bodov $[x, y]$ nazývame parametricky danou rovinnou krivkou C, akk $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde φ a ψ sú spojité funkcie definované na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$ majúce spojité derivácie φ' a ψ' na $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Dľžka rovinnej krivky

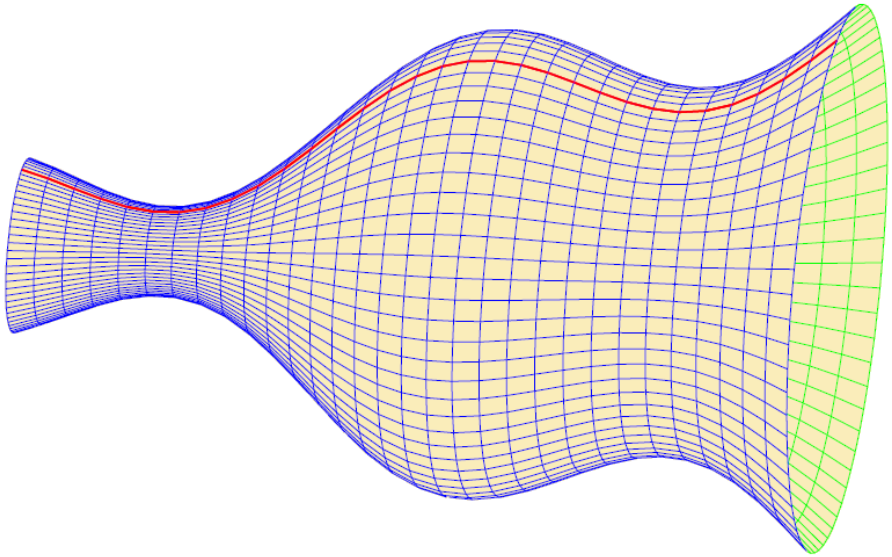


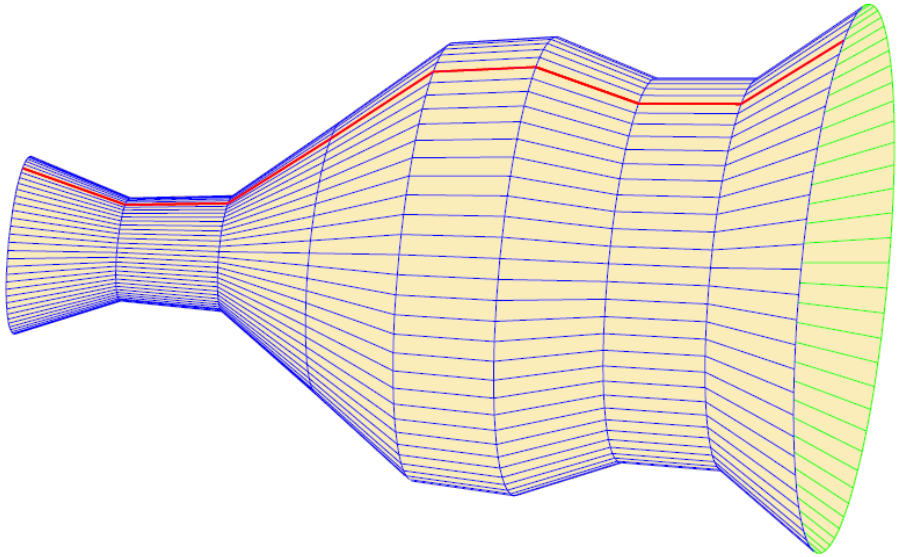
Veta VI.9

Nech C je parametricky zadaná rovinná krivka rovnicami $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, kde φ a ψ majú na $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojité derivácie φ' a ψ'. Potom

$$L_C\langle \alpha, \beta \rangle = (\mathscr{R}) \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, \mathrm{d}t.$$

Plošný obsah rotačnej plochy





Veta VI.10

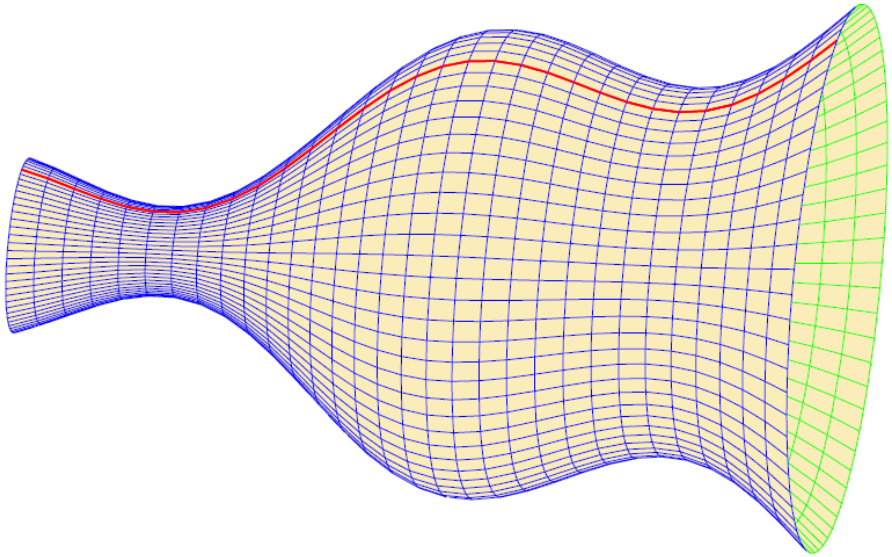
Plošný obsah S_f rotačného telesa vytvoreného rotáciou krivky danej grafom funkcie f so spojitou deriváciou na $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_x je daný

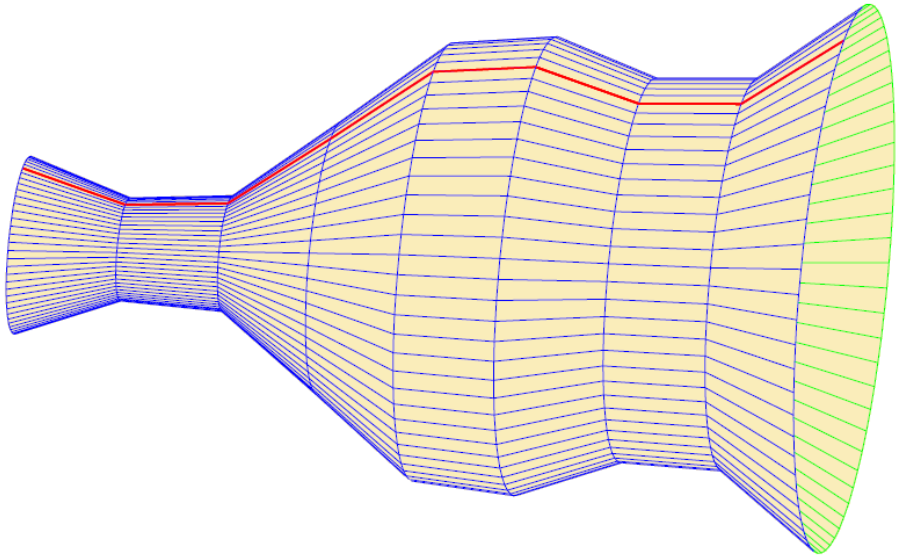
$$S_f\langle a, b\rangle = 2\pi\,(\mathscr{R})\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Poznámka: pre plošný obsah $\widetilde{S}_f$ rotačného telesa vytvoreného rotáciou krivky danej grafom funkcie f so spojitou deriváciou na $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_y platí

$$\widetilde{S}_f\langle a, b\rangle = 2\pi\,(\mathscr{R})\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Plošný obsah rotačnej plochy





Veta VI.10

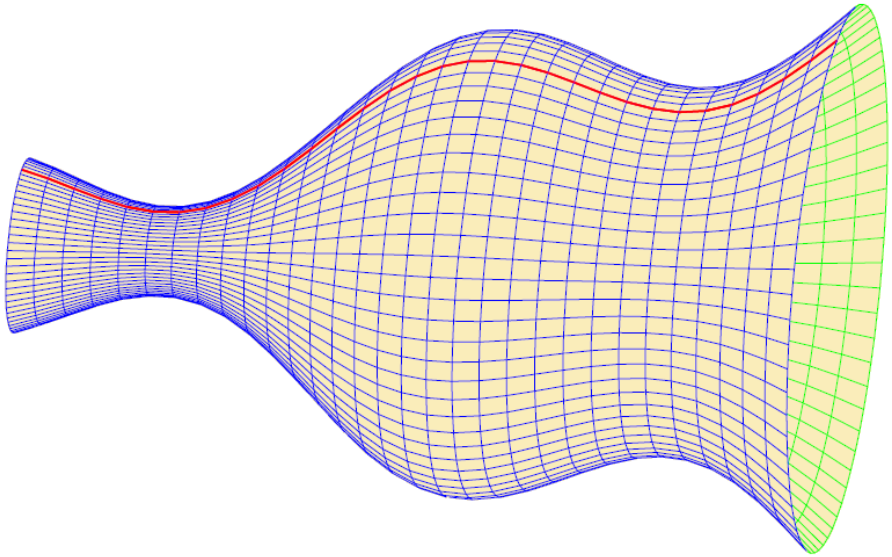
Plošný obsah S_f rotačného telesa vytvoreného rotáciou krivky danej grafom funkcie f so spojitou deriváciou na $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_x je daný

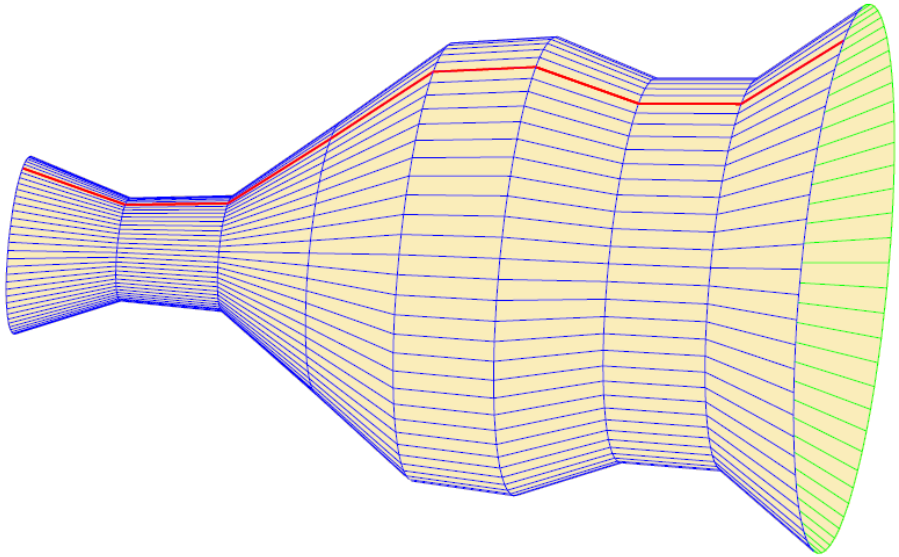
$$S_f\langle a, b\rangle = 2\pi\,(\mathscr{R})\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Poznámka: pre plošný obsah $\widetilde{S}_f$ rotačného telesa vytvoreného rotáciou krivky danej grafom funkcie f so spojitou deriváciou na $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_y platí

$$\widetilde{S}_f\langle a, b\rangle = 2\pi\,(\mathscr{R})\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Plošný obsah rotačnej plochy





Veta VI.11

Nech C je parametricky zadaná rovinná krivka rovnicami $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, kde φ a ψ majú na $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojité derivácie φ' a ψ'. Potom

$$S_C\langle \alpha, \beta \rangle = 2\pi\,(\mathscr{R}) \int_\alpha^\beta |\psi(t)| \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Ďalšie aplikácie – ukážky

Momenty: Ak v rovine xy hmotnosť M s hustotou $\rho = \rho(y)$ vypĺňa nejaké ohraničené kontinuum Ω (úsečku, krivku, rovinnú plochu) a ak $\omega = \omega(y)$ je zodpovedajúca miera (dĺžka úsečky alebo krivky, obsah plochy) tej časti kontinua Ω, pre ktorej body platí, že ich súradnice nie sú väčšie ako y, potom k-tym momentom hmotnosti M vzhľadom k osi o_x nazývame číslo

$$M_k = \lim_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(y_i) y_i^k \Delta\omega(y_i) = (\mathscr{R}) \int_\Omega \rho(y) y^k \, \mathrm{d}\omega(y), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Špeciálne pre $k = 0$ dostávame hmotnosť M, pre $k = 1$ statický moment a pre $k = 2$ moment zotrvačnosti.

Pre $\rho = 1$ sa odpovedajúci moment nazýva geometrický (moment úsečky alebo krivky, rovinnej plochy, telesa, atď).

Ťažisko: Súradnice ťažiska $[x_0, y_0]$ homogénnej rovinnej plochy s obsahom S sa definujú predpisom

$$x_0 = \frac{M_1^{(y)}}{S}, \quad y_0 = \frac{M_1^{(x)}}{S},$$

kde $M_1^{(y)}$ a $M_1^{(x)}$ sú geometrické statické momenty plochy vzhľadom k osiam o_y a o_x.

Ďalšie aplikácie – ukážky

Momenty: Ak v rovine xy hmotnosť M s hustotou $\rho = \rho(y)$ vypĺňa nejaké ohraničené kontinuum Ω (úsečku, krivku, rovinnú plochu) a ak $\omega = \omega(y)$ je zodpovedajúca miera (dĺžka úsečky alebo krivky, obsah plochy) tej časti kontinua Ω, pre ktorej body platí, že ich súradnice nie sú väčšie ako y, potom k-tym momentom hmotnosti M vzhľadom k osi o_x nazývame číslo

$$M_k = \lim_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(y_i) y_i^k \Delta\omega(y_i) = (\mathscr{R}) \int_\Omega \rho(y) y^k \, \mathrm{d}\omega(y), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Špeciálne pre $k = 0$ dostávame hmotnosť M, pre $k = 1$ statický moment a pre $k = 2$ moment zotrvačnosti.

Pre $\rho = 1$ sa odpovedajúci moment nazýva geometrický (moment úsečky alebo krivky, rovinnej plochy, telesa, atď).

Ťažisko: Súradnice ťažiska $[x_0, y_0]$ homogénnej rovinnej plochy s obsahom S sa definujú predpisom

$$x_0 = \frac{M_1^{(y)}}{S}, \quad y_0 = \frac{M_1^{(x)}}{S},$$

kde $M_1^{(y)}$ a $M_1^{(x)}$ sú geometrické statické momenty plochy vzhľadom k osiam o_y a o_x.

Prečo (nielen matematikom) Riemannov integrál nestačí?

The Riemann integral is the workhorse of calculus.

Prečo (nielen matematikom) Riemannov integrál nestačí?

- nedá sa ním integrovať tak veľa funkcií, ako by sme dúfali (napr. všetky neohraničené funkcie automaticky vypadávajú z hry);
- čudné správanie potvrdzuje aj fakt, že predefinovaním integrovateľnej funkcie f len v jednom bode x_0 na $f(x_0) = +\infty$ sa ona stane neintegrovateľnou – ale veď sme nezmenili obsah...)
- Volterrova funkcia – $\mathscr{R}$-integrál nedokáže integrovať všetky derivácie (Newtonova-Leibnizova formula platí len za dodatočných podmienok, ktoré sa nám nepáčia!);
- množina $\mathscr{R}\langle a, b\rangle$ je ako množina $\mathbb{Q}$ – deravá!, t.j. existujú postupnosti integrovateľných funkcií, ktoré konvergujú k neintegrovateľnej funkcii! Napr.

$$f_n(x) = \lim_{m\to\infty} [\cos(n!\pi x)]^{2m} = \begin{cases} 1, & x = \frac{k}{n!}, k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{inak} \end{cases},$$

pričom $f_n(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle \to \chi(x) \notin \mathscr{R}\langle a, b\rangle$

Prečo (nielen matematikom) Riemannov integrál nestačí?

- nedá sa ním integrovať tak veľa funkcií, ako by sme dúfali (napr. všetky neohraničené funkcie automaticky vypadávajú z hry);
- čudné správanie potvrdzuje aj fakt, že predefinovaním integrovateľnej funkcie f len v jednom bode x_0 na $f(x_0) = +\infty$ sa ona stane neintegrovateľnou – ale veď sme nezmenili obsah...)
- Volterrova funkcia – $\mathscr{R}$-integrál nedokáže integrovať všetky derivácie (Newtonova-Leibnizova formula platí len za dodatočných podmienok, ktoré sa nám nepáčia!);
- množina $\mathscr{R}\langle a, b\rangle$ je ako množina $\mathbb{Q}$ – deravá!, t.j. existujú postupnosti integrovateľných funkcií, ktoré konvergujú k neintegrovateľnej funkcii! Napr.

$$f_n(x) = \lim_{m\to\infty} [\cos(n!\pi x)]^{2m} = \begin{cases} 1, & x = \frac{k}{n!}, k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{inak} \end{cases},$$

pričom $f_n(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle \to \chi(x) \notin \mathscr{R}\langle a, b\rangle$

Prečo (nielen matematikom) Riemannov integrál nestačí?

- nedá sa ním integrovať tak veľa funkcií, ako by sme dúfali (napr. všetky neohraničené funkcie automaticky vypadávajú z hry);
- čudné správanie potvrdzuje aj fakt, že predefinovaním integrovateľnej funkcie f len v jednom bode x_0 na $f(x_0) = +\infty$ sa ona stane neintegrovateľnou – ale veď sme nezmenili obsah...)
- Volterrova funkcia – $\mathscr{R}$-integrál nedokáže integrovať všetky derivácie (Newtonova-Leibnizova formula platí len za dodatočných podmienok, ktoré sa nám nepáčia!);
- množina $\mathscr{R}\langle a, b\rangle$ je ako množina $\mathbb{Q}$ – deravá!, t.j. existujú postupnosti integrovateľných funkcií, ktoré konvergujú k neintegrovateľnej funkcii! Napr.

$$f_n(x) = \lim_{m\to\infty} [\cos(n!\pi x)]^{2m} = \begin{cases} 1, & x = \frac{k}{n!}, k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{inak} \end{cases},$$

pričom $f_n(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle \to \chi(x) \notin \mathscr{R}\langle a, b\rangle$

Prečo (nielen matematikom) Riemannov integrál nestačí?

- nedá sa ním integrovať tak veľa funkcií, ako by sme dúfali (napr. všetky neohraničené funkcie automaticky vypadávajú z hry);
- čudné správanie potvrdzuje aj fakt, že predefinovaním integrovateľnej funkcie f len v jednom bode x_0 na $f(x_0) = +\infty$ sa ona stane neintegrovateľnou – ale veď sme nezmenili obsah...)
- Volterrova funkcia – $\mathscr{R}$-integrál nedokáže integrovať všetky derivácie (Newtonova-Leibnizova formula platí len za dodatočných podmienok, ktoré sa nám nepáčia!);
- množina $\mathscr{R}\langle a, b\rangle$ je ako množina $\mathbb{Q}$ – deravá!, t.j. existujú postupnosti integrovateľných funkcií, ktoré konvergujú k neintegrovateľnej funkcii! Napr.

$$f_n(x) = \lim_{m\to\infty} [\cos(n!\pi x)]^{2m} = \begin{cases} 1, & x = \frac{k}{n!}, k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{inak} \end{cases},$$

pričom $f_n(x) \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle \to \chi(x) \notin \mathscr{R}\langle a, b\rangle$