Matematická analýza III.

(prezentácia k prednáške MAN2c/10)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MAN2c.html
Prednáška 8

10. novembra 2023

Nekonečný číselný rad a jeho súčet

We call a series an indefinite sequence of quantities, $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$, which follow from one to another according to a determined law... Let $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ to be the sum of the first n terms, where n denotes any integer number. If, for ever increasing values of n, the sum s_n indefinitely approaches a certain limit s, the series is said to be convergent, and the limit in question is called the sum of the series. On the contrary, if the sum s_n does not approach any fixed limit as it increases infinitely, the series is divergent, and does not have a sum. In either case, the term which corresponds to the index n, that is u_n, is what we call the general term. For the series to be completely determined, it is enough that we give its general term as a function of the index n.

Augustin-Luis Cauchy: *Cours d'analyse* (1821)

Postupnosti $(a_n)_1^\infty$ priradíme postupnosť $(s_n)_1^\infty$ nasledovne:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2 = s_1 + a_2, \\ &\vdots \\ s_{n+1} &= a_1 + \cdots + a_{n+1} = s_n + a_{n+1}. \end{aligned}$$

Symbol $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$, alebo skrátene $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, budeme nazývať nekonečný číselný rad. Prvok a_n nazývame n-tý člen radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Postupnosť $(s_n)_1^\infty$ nazývame postupnosť čiastočných súčtov (p.č.s.) radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a prvok s_n n-tý čiastočný súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nekonečný číselný rad a jeho súčet

We call a series an indefinite sequence of quantities, $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$, which follow from one to another according to a determined law... Let $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ to be the sum of the first n terms, where n denotes any integer number. If, for ever increasing values of n, the sum s_n indefinitely approaches a certain limit s, the series is said to be convergent, and the limit in question is called the sum of the series. On the contrary, if the sum s_n does not approach any fixed limit as it increases infinitely, the series is divergent, and does not have a sum. In either case, the term which corresponds to the index n, that is u_n, is what we call the general term. For the series to be completely determined, it is enough that we give its general term as a function of the index n.

Augustin-Luis Cauchy: *Cours d'analyse* (1821)

Postupnosti $(a_n)_1^\infty$ priradíme postupnosť $(s_n)_1^\infty$ nasledovne:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2 = s_1 + a_2, \\ &\vdots \\ s_{n+1} &= a_1 + \cdots + a_{n+1} = s_n + a_{n+1}. \end{aligned}$$

Symbol $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$, alebo skrátene $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, budeme nazývať nekonečný číselný rad. Prvok a_n nazývame n-tý člen radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Postupnosť $(s_n)_1^\infty$ nazývame postupnosť čiastočných súčtov (p.č.s.) radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a prvok s_n n-tý čiastočný súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nekonečný číselný rad a jeho súčet

... I believe that every series should be assigned a certain value. However, to account for all the difficulties that have been pointed out in this connection, this value should not be denoted by the name sum, because usually this word is connected with the notion that a sum has been obtained by a real summation: this idea however is not applicable to "*seriebus divergentibus*" ...

Leonhard Euler: z korešpondencie s Christianom Goldbachom a Nicholasom Bernoullim (1745)

Definícia

Súčtom nekonečného číselného radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame vlastnú limitu postupnosti $(s_n)_1^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov a zapisujeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s < +\infty$. Rad sa nazýva konvergentný, akk konverguje postupnosť jeho čiastočných súčtov. Rad, ktorý nie je konvergentný, nazývame divergentný.

Ponaučenie: Z poznatkov pre postupnosti máme, že pre rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ môže nastať práve jeden z nasledujúcich prípadov:

- $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$ ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný a má súčet s;
- $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $+\infty$;
- $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$ ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $-\infty$;
- neexistuje ani vlastná ani nevlastná limita p.č.s. ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ osciluje

Nekonečný číselný rad a jeho súčet

... I believe that every series should be assigned a certain value. However, to account for all the difficulties that have been pointed out in this connection, this value should not be denoted by the name sum, because usually this word is connected with the notion that a sum has been obtained by a real summation: this idea however is not applicable to "*seriebus divergentibus*" ...

Leonhard Euler: z korešpondencie s Christianom Goldbachom a Nicholasom Bernoullim (1745)

Definícia

Súčtom nekonečného číselného radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame vlastnú limitu postupnosti $(s_n)_1^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov a zapisujeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s < +\infty$. Rad sa nazýva konvergentný, akk konverguje postupnosť jeho čiastočných súčtov. Rad, ktorý nie je konvergentný, nazývame divergentný.

Ponaučenie: Z poznatkov pre postupnosti máme, že pre rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ môže nastať práve jeden z nasledujúcich prípadov:

- $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$ ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný a má súčet s;
- $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $+\infty$;
- $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$ ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $-\infty$;
- neexistuje ani vlastná ani nevlastná limita p.č.s. ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ osciluje

Nekonečný číselný rad a jeho súčet

... I believe that every series should be assigned a certain value. However, to account for all the difficulties that have been pointed out in this connection, this value should not be denoted by the name sum, because usually this word is connected with the notion that a sum has been obtained by a real summation: this idea however is not applicable to "*seriebus divergentibus*" ...

Leonhard Euler: z korešpondencie s Christianom Goldbachom a Nicholasom Bernoullim (1745)

Definícia

Súčtom nekonečného číselného radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame vlastnú limitu postupnosti $(s_n)_1^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov a zapisujeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s < +\infty$. Rad sa nazýva konvergentný, akk konverguje postupnosť jeho čiastočných súčtov. Rad, ktorý nie je konvergentný, nazývame divergentný.

Ponaučenie: Z poznatkov pre postupnosti máme, že pre rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ môže nastať práve jeden z nasledujúcich prípadov:

- $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$ ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný a má súčet s;
- $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $+\infty$;
- $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$ ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $-\infty$;
- neexistuje ani vlastná ani nevlastná limita p.č.s. ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ osciluje

Nekonečný číselný rad a jeho súčet

... I believe that every series should be assigned a certain value. However, to account for all the difficulties that have been pointed out in this connection, this value should not be denoted by the name sum, because usually this word is connected with the notion that a sum has been obtained by a real summation: this idea however is not applicable to "*seriebus divergentibus*" ...

Leonhard Euler: z korešpondencie s Christianom Goldbachom a Nicholasom Bernoullim (1745)

Definícia

Súčtom nekonečného číselného radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame vlastnú limitu postupnosti $(s_n)_1^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov a zapisujeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s < +\infty$. Rad sa nazýva konvergentný, akk konverguje postupnosť jeho čiastočných súčtov. Rad, ktorý nie je konvergentný, nazývame divergentný.

Ponaučenie: Z poznatkov pre postupnosti máme, že pre rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ môže nastať práve jeden z nasledujúcich prípadov:

- $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$ ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný a má súčet s;
- $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $+\infty$;
- $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$ ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $-\infty$;
- neexistuje ani vlastná ani nevlastná limita p.č.s. ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ osciluje

Nekonečný číselný rad a jeho súčet

... I believe that every series should be assigned a certain value. However, to account for all the difficulties that have been pointed out in this connection, this value should not be denoted by the name sum, because usually this word is connected with the notion that a sum has been obtained by a real summation: this idea however is not applicable to "*seriebus divergentibus*" ...

Leonhard Euler: z korešpondencie s Christianom Goldbachom a Nicholasom Bernoullim (1745)

Definícia

Súčtom nekonečného číselného radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame vlastnú limitu postupnosti $(s_n)_1^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov a zapisujeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s < +\infty$. Rad sa nazýva konvergentný, akk konverguje postupnosť jeho čiastočných súčtov. Rad, ktorý nie je konvergentný, nazývame divergentný.

Ponaučenie: Z poznatkov pre postupnosti máme, že pre rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ môže nastať práve jeden z nasledujúcich prípadov:

- $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$ ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný a má súčet s;
- $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $+\infty$;
- $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$ ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $-\infty$;
- neexistuje ani vlastná ani nevlastná limita p.č.s. ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ osciluje

Pripomenutie: na konvergenciu radu sa pozeráme cez konvergenciu postupnosti jeho čiastočných súčtov!

Veta (Cauchyho-Bolzanovo kritérium konvergencie radu)

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, keď p.č.s. $(s_n)_1^{\infty}$ je fundamentálna, t.j.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall k \in \mathbb{N})\ |s_n - s_{n+k}| < \varepsilon.$$

AUGUSTIN CAUCHY (1789–1857)

BERNARD BOLZANO (1781–1848)

Dôsledok (nutná podmienka konvergencie radu)

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

The sum of an infinite series whose final term vanishes perhaps is infinite, perhaps finite.

Jacob Bernoulli: *Ars conjectandi* (vydané posmrtne v roku 1713)

Pripomenutie: na konvergenciu radu sa pozeráme cez konvergenciu postupnosti jeho čiastočných súčtov!

Veta (Cauchyho-Bolzanovo kritérium konvergencie radu)

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, keď p.č.s. $(s_n)_1^{\infty}$ je fundamentálna, t.j.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall k \in \mathbb{N})\ |s_n - s_{n+k}| < \varepsilon.$$

AUGUSTIN CAUCHY (1789–1857)

BERNARD BOLZANO (1781–1848)

Dôsledok (nutná podmienka konvergencie radu)

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

The sum of an infinite series whose final term vanishes perhaps is infinite, perhaps finite.

Jacob Bernoulli: *Ars conjectandi* (vydané posmrtne v roku 1713)

Operácie s (ne)konečnými číselnými radmi

The history of mathematics is not just a box of paints with which one can make the picture of mathematics more colorful, to catch interest of students at their different levels of education; it is a part of the picture itself. If it is such an important part that it will give a better understanding of what mathematics is all about, if it will widen horizons of learners, maybe not only their mathematical horizons,... then it must be included in teaching.

Torkil Heiede: *History of mathematics and the Teacher* (1996)

$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1}$. Ergo $\frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ etc.

z Leibnizovej korešpondencie s Christianom Wolfom (medzi 1713 a 1716)

Komutatívny zákon = ľubovoľné poprehadzovanie členov

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_3 + a_2 = a_2 + a_1 + a_3 = \dots$$

Asociatívny zákon = ľubovoľné preuzátvorkovanie členov

$$(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3) = a_1 + a_2 + a_3$$

Distributívny zákon = poroznásobovanie členov

$$\alpha(a_1 + a_2 + a_3) = \alpha a_1 + \alpha a_2 + \alpha a_3$$

Otázka: Čo z týchto vlastností operácie sčítania a násobenia (skalárom) sa dá natiahnúť na nekonečný počet sčítancov?

Operácie s (ne)konečnými číselnými radmi

The history of mathematics is not just a box of paints with which one can make the picture of mathematics more colorful, to catch interest of students at their different levels of education; it is a part of the picture itself. If it is such an important part that it will give a better understanding of what mathematics is all about, if it will widen horizons of learners, maybe not only their mathematical horizons,... then it must be included in teaching.

Torkil Heiede: *History of mathematics and the Teacher* (1996)

$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1}$. Ergo $\frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ etc.

z Leibnizovej korešpondencie s Christianom Wolfom (medzi 1713 a 1716)

Komutatívny zákon = ľubovoľné poprehadzovanie členov

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_3 + a_2 = a_2 + a_1 + a_3 = \dots$$

Asociatívny zákon = ľubovoľné preuzátvorkovanie členov

$$(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3) = a_1 + a_2 + a_3$$

Distributívny zákon = poroznásobovanie členov

$$\alpha(a_1 + a_2 + a_3) = \alpha a_1 + \alpha a_2 + \alpha a_3$$

Otázka: Čo z týchto vlastností operácie sčítania a násobenia (skalárom) sa dá natiahnúť na nekonečný počet sčítancov?

Operácie s (ne)konečnými číselnými radmi

The history of mathematics is not just a box of paints with which one can make the picture of mathematics more colorful, to catch interest of students at their different levels of education; it is a part of the picture itself. If it is such an important part that it will give a better understanding of what mathematics is all about, if it will widen horizons of learners, maybe not only their mathematical horizons,... then it must be included in teaching.

Torkil Heiede: *History of mathematics and the Teacher* (1996)

$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1}$. Ergo $\frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ etc.

z Leibnizovej korešpondencie s Christianom Wolfom (medzi 1713 a 1716)

Komutatívny zákon = ľubovoľné poprehadzovanie členov

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_3 + a_2 = a_2 + a_1 + a_3 = \dots$$

Asociatívny zákon = ľubovoľné preuzátvorkovanie členov

$$(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3) = a_1 + a_2 + a_3$$

Distributívny zákon = poroznásobovanie členov

$$\alpha(a_1 + a_2 + a_3) = \alpha a_1 + \alpha a_2 + \alpha a_3$$

Otázka: Čo z týchto vlastností operácie sčítania a násobenia (skalárom) sa dá natiahnúť na nekonečný počet sčítancov?

Operácie s (ne)konečnými číselnými radmi

The history of mathematics is not just a box of paints with which one can make the picture of mathematics more colorful, to catch interest of students at their different levels of education; it is a part of the picture itself. If it is such an important part that it will give a better understanding of what mathematics is all about, if it will widen horizons of learners, maybe not only their mathematical horizons,... then it must be included in teaching.

Torkil Heiede: *History of mathematics and the Teacher* (1996)

$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1}$. Ergo $\frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ etc.

z Leibnizovej korešpondencie s Christianom Wolfom (medzi 1713 a 1716)

Komutatívny zákon = ľubovoľné poprehadzovanie členov

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_3 + a_2 = a_2 + a_1 + a_3 = \dots$$

Asociatívny zákon = ľubovoľné preuzátvorkovanie členov

$$(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3) = a_1 + a_2 + a_3$$

Distributívny zákon = poroznásobovanie členov

$$\alpha(a_1 + a_2 + a_3) = \alpha a_1 + \alpha a_2 + \alpha a_3$$

Otázka: Čo z týchto vlastností operácie sčítania a násobenia (skalárom) sa dá natiahnúť na nekonečný počet sčítancov?

Operácie s (ne)konečnými číselnými radmi

The history of mathematics is not just a box of paints with which one can make the picture of mathematics more colorful, to catch interest of students at their different levels of education; it is a part of the picture itself. If it is such an important part that it will give a better understanding of what mathematics is all about, if it will widen horizons of learners, maybe not only their mathematical horizons,... then it must be included in teaching.

Torkil Heiede: *History of mathematics and the Teacher* (1996)

$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1}$. Ergo $\frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ etc.

z Leibnizovej korešpondencie s Christianom Wolfom (medzi 1713 a 1716)

Komutatívny zákon = ľubovoľné poprehadzovanie členov

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_3 + a_2 = a_2 + a_1 + a_3 = \dots$$

Asociatívny zákon = ľubovoľné preuzátvorkovanie členov

$$(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3) = a_1 + a_2 + a_3$$

Distributívny zákon = poroznásobovanie členov

$$\alpha(a_1 + a_2 + a_3) = \alpha a_1 + \alpha a_2 + \alpha a_3$$

Otázka: Čo z týchto vlastností operácie sčítania a násobenia (skalárom) sa dá natiahnúť na nekonečný počet sčítancov?

Operácie s nekonečnými číselnými radmi

Cauchy is mad, and there is no way of being on good terms with him, although at present he is the only man who knows how mathematics should be treated. What he does is excellent, but very confused...

Niels Abel: *Ouevres* (1826)

Veta VII.1 (distributívny zákon)

Nech rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú konvergentné. Potom

(i) rad $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ konverguje a naviac, ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b$;

(ii) rad $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ konverguje pre každé $k \in \mathbb{R}$ a platí $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \cdot a$.

Naviac, ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ konverguje, kde $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, potom konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Operácie s nekonečnými číselnými radmi

Cauchy is mad, and there is no way of being on good terms with him, although at present he is the only man who knows how mathematics should be treated. What he does is excellent, but very confused...

Niels Abel: *Ouevres* (1826)

Veta VII.1 (distributívny zákon)

Nech rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú konvergentné. Potom

(i) rad $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ konverguje a naviac, ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$, tak $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = a + b$;

(ii) rad $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ konverguje pre každé $k \in \mathbb{R}$ a platí $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \cdot a$.

Naviac, ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ konverguje, kde $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, potom konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Operácie s nekonečnými číselnými radmi

I shall devote all my efforts to bring light into the immense obscurity that today reigns in Analysis. It so lacks any plan or system, that one is really astonished that so many people devote themselves to it — and, still worse, it is absolutely devoid of any rigour.

Niels Abel: *Ouevres* (1826)

Veta VII.2 (asociatívny zákon)

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad a $(k_n)_1^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel. Položme

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1}, \\ b_2 &= a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}, \\ &\vdots \\ b_n &= a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}, \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje a platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dve tváre konvergencie: absolútna a relatívna

You cannot always run at your best!

Bill Rodgers: *American runner*

Definícia

Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje, akk konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame relatívne konvergentný.

Príklad: každý geometrický rad s kvocientom $|q| < 1$ konverguje absolútne, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nekonverguje absolútne, ale relatívne!

Veta VII.3

Ak rad konverguje absolútne, tak konverguje.

Dôkaz: Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Keďže rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolútne konvergentný, konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, t.j. podľa C-B kritéria $(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall k \in \mathbb{N})\ |s_n - s_{n+k}| = ||a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|| < \varepsilon$. Z trojuholníkovej nerovnosti $|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon$, teda podľa C-B kritéria konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Dve tváre konvergencie: absolútna a relatívna

You cannot always run at your best!

Bill Rodgers: *American runner*

Definícia

Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje, akk konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame relatívne konvergentný.

Príklad: každý geometrický rad s kvocientom $|q| < 1$ konverguje absolútne, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nekonverguje absolútne, ale relatívne!

Veta VII.3

Ak rad konverguje absolútne, tak konverguje.

Dôkaz: Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Keďže rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolútne konvergentný, konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, t.j. podľa C-B kritéria $(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall k \in \mathbb{N})\ |s_n - s_{n+k}| = ||a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|| < \varepsilon$. Z trojuholníkovej nerovnosti $|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon$, teda podľa C-B kritéria konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Dve tváre konvergencie: absolútna a relatívna

You cannot always run at your best!

Bill Rodgers: *American runner*

Definícia

Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje, akk konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame relatívne konvergentný.

Príklad: každý geometrický rad s kvocientom $|q| < 1$ konverguje absolútne, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nekonverguje absolútne, ale relatívne!

Veta VII.3

Ak rad konverguje absolútne, tak konverguje.

Dôkaz: Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Keďže rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolútne konvergentný, konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, t.j. podľa C-B kritéria $(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall k \in \mathbb{N})\ |s_n - s_{n+k}| = ||a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|| < \varepsilon$. Z trojuholníkovej nerovnosti $|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon$, teda podľa C-B kritéria konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Dve tváre konvergencie: absolútna a relatívna

You cannot always run at your best!

Bill Rodgers: *American runner*

Definícia

Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje, akk konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame relatívne konvergentný.

Príklad: každý geometrický rad s kvocientom $|q| < 1$ konverguje absolútne, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nekonverguje absolútne, ale relatívne!

Veta VII.3

Ak rad konverguje absolútne, tak konverguje.

Dôkaz: Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Keďže rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolútne konvergentný, konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, t.j. podľa C-B kritéria $(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall k \in \mathbb{N})\ |s_n - s_{n+k}| = ||a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|| < \varepsilon$. Z trojuholníkovej nerovnosti $|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon$, teda podľa C-B kritéria konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

(A) Kritériá na vyšetrenie absolútnej konvergencie

Pozorovanie: Rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \ldots$ je rad s nezápornými členmi! Jeho p.č.s. $(s_n)_1^\infty$ je neklesajúca!

Tvrdenie VII.4

Rad s nezápornými členmi je konvergentný práve vtedy, keď postupnosť jeho čiastočných súčtov je ohraničená.

THEOREM III. — Whenever each term of series $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ of positive terms is smaller than the one preceding it, that series and the following one $u_0, 2u_1, 4u_3, 8u_7, 16u_{15}, \ldots$ are either both convergent or both divergent.

Augustin-Luis Cauchy: *Cours d'analyse* (1821)

Veta (Cauchyho kondenzačné kritérium, 1821)

Nech $(a_n)_1^\infty$ je nerastúca postupnosť nezáporných čísel. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, keď konverguje rad $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Ponaučenie: na konvergenciu radu majú podľa Cauchyho vplyv "len niektoré" členy radu!

Úloha: Vyšetrite konvergenciu Riemannovho radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ pre $p \in \mathbb{R}$.

(A) Kritériá na vyšetrenie absolútnej konvergencie

Pozorovanie: Rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \ldots$ je rad s nezápornými členmi! Jeho p.č.s. $(s_n)_1^\infty$ je neklesajúca!

Tvrdenie VII.4

Rad s nezápornými členmi je konvergentný práve vtedy, keď postupnosť jeho čiastočných súčtov je ohraničená.

THEOREM III. — Whenever each term of series $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ of positive terms is smaller than the one preceding it, that series and the following one $u_0, 2u_1, 4u_3, 8u_7, 16u_{15}, \ldots$ are either both convergent or both divergent.

Augustin-Luis Cauchy: *Cours d'analyse* (1821)

Veta (Cauchyho kondenzačné kritérium, 1821)

Nech $(a_n)_1^\infty$ je nerastúca postupnosť nezáporných čísel. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, keď konverguje rad $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Ponaučenie: na konvergenciu radu majú podľa Cauchyho vplyv "len niektoré" členy radu!

Úloha: Vyšetrite konvergenciu Riemannovho radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ pre $p \in \mathbb{R}$.

(A) Kritériá na vyšetrenie absolútnej konvergencie

Pozorovanie: Rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \ldots$ je rad s nezápornými členmi! Jeho p.č.s. $(s_n)_1^\infty$ je neklesajúca!

Tvrdenie VII.4

Rad s nezápornými členmi je konvergentný práve vtedy, keď postupnosť jeho čiastočných súčtov je ohraničená.

THEOREM III. — Whenever each term of series $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ of positive terms is smaller than the one preceding it, that series and the following one $u_0, 2u_1, 4u_3, 8u_7, 16u_{15}, \ldots$ are either both convergent or both divergent.

Augustin-Luis Cauchy: *Cours d'analyse* (1821)

Veta (Cauchyho kondenzačné kritérium, 1821)

Nech $(a_n)_1^\infty$ je nerastúca postupnosť nezáporných čísel. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, keď konverguje rad $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Ponaučenie: na konvergenciu radu majú podľa Cauchyho vplyv "len niektoré" členy radu!

Úloha: Vyšetrite konvergenciu Riemannovho radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ pre $p \in \mathbb{R}$.

(A) Kritériá na vyšetrenie absolútnej konvergencie

Pozorovanie: Rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \ldots$ je rad s nezápornými členmi! Jeho p.č.s. $(s_n)_1^\infty$ je neklesajúca!

Tvrdenie VII.4

Rad s nezápornými členmi je konvergentný práve vtedy, keď postupnosť jeho čiastočných súčtov je ohraničená.

THEOREM III. — Whenever each term of series $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ of positive terms is smaller than the one preceding it, that series and the following one $u_0, 2u_1, 4u_3, 8u_7, 16u_{15}, \ldots$ are either both convergent or both divergent.

Augustin-Luis Cauchy: *Cours d'analyse* (1821)

Veta (Cauchyho kondenzačné kritérium, 1821)

Nech $(a_n)_1^\infty$ je nerastúca postupnosť nezáporných čísel. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, keď konverguje rad $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Ponaučenie: na konvergenciu radu majú podľa Cauchyho vplyv "len niektoré" členy radu!

Úloha: Vyšetrite konvergenciu Riemannovho radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ pre $p \in \mathbb{R}$.

Porovnávaj sa len s lepšími ako si sám... horší ťa môžu stiahnuť dole...

Veta (porovnávacie kritérium)

Nech $0 \leq a_n \leq b_n$ platí pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Potom

(i) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

(ii) ak diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tak diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dôsledok (policajti pre rady): Nech pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n \leq c_n$. Potom

(i) ak konvergujú rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

(ii) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $+\infty$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje do $+\infty$;

(iii) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverguje do $-\infty$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje do $-\infty$.

Veta (limitné porovnávacie kritérium)

Nech $0 \leq a_n, b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}^*$.

(i) Ak $L < +\infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentný rad, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) Ak $L > 0$ a diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, potom diverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Porovnávaj sa len s lepšími ako si sám... horší ťa môžu stiahnuť dole...

Veta (porovnávacie kritérium)

Nech $0 \leq a_n \leq b_n$ platí pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Potom

(i) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

(ii) ak diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tak diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dôsledok (policajti pre rady): Nech pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n \leq c_n$. Potom

(i) ak konvergujú rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

(ii) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $+\infty$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje do $+\infty$;

(iii) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverguje do $-\infty$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje do $-\infty$.

Veta (limitné porovnávacie kritérium)

Nech $0 \leq a_n, b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}^*$.

(i) Ak $L < +\infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentný rad, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) Ak $L > 0$ a diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, potom diverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Porovnávaj sa len s lepšími ako si sám... horší ťa môžu stiahnuť dole...

Veta (porovnávacie kritérium)

Nech $0 \leq a_n \leq b_n$ platí pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Potom

(i) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

(ii) ak diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tak diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dôsledok (policajti pre rady): Nech pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n \leq c_n$. Potom

(i) ak konvergujú rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

(ii) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $+\infty$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje do $+\infty$;

(iii) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverguje do $-\infty$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje do $-\infty$.

Veta (limitné porovnávacie kritérium)

Nech $0 \leq a_n, b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}^*$.

(i) Ak $L < +\infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentný rad, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) Ak $L > 0$ a diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, potom diverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Veta (Cauchyho odmocninné kritérium, 1821)

Nech $0 \leq a_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$.

(i) Ak $(\exists q < 1)\ \sqrt[n]{a_n} \leq q$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, tak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Ak $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(ii) Nech $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \in \mathbb{R}^*$. Potom pre $q < 1$ je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentný a pre $q > 1$ je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentný.

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821.

AUGUSTIN-LUIS CAUCHY (1789–1857)

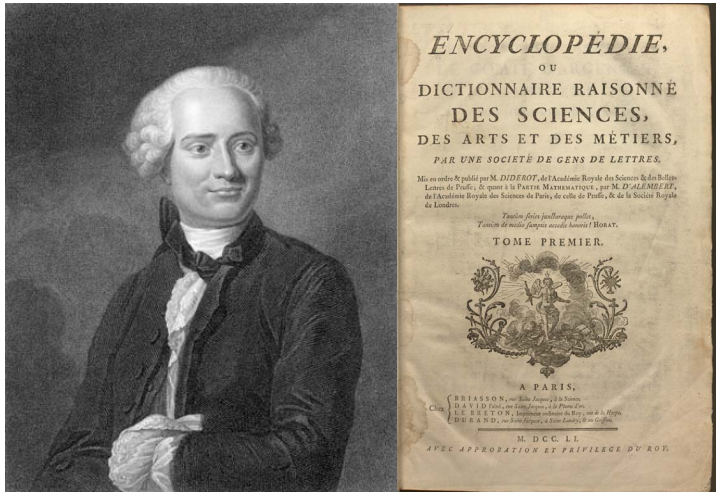
Veta (d'Alembertovo podielové kritérium, 1756)

Nech $0 < a_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$.

(i) Ak $(\exists q < 1)\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, tak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Ak $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(ii) Ak $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in \mathbb{R}^*$, tak pre $q < 1$ je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentný a pre $q > 1$ je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentný.



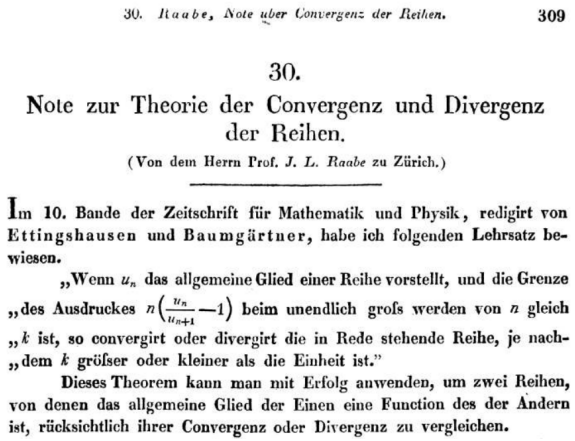
JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717–1783)

Veta (Raabeho kritérium, 1834)

Nech $0 < a_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$.

(i) Ak $(\exists r > 1)\, n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq r$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(ii) Ak $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = q \in \mathbb{R}^*$, tak pre $q > 1$ rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a pre $q < 1$ rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.



30. Raabe, Note über Convergenz der Reihen. 309

30.

Note zur Theorie der Convergenz und Divergenz der Reihen.

(Von dem Herrn Prof. J. L. Raabe zu Zürich.)

Im 10. Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik, redigirt von Ettingshausen und Baumgärtner, habe ich folgenden Lehrsatz bewiesen.

„Wenn u_n das allgemeine Glied einer Reihe vorstellt, und die Grenze „des Ausdruckes $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ beim unendlich grofs werden von n gleich „k ist, so convergirt oder divergirt die in Rede stehende Reihe, je nach„dem k gröfser oder kleiner als die Einheit ist."

Dieses Theorem kann man mit Erfolg anwenden, um zwei Reihen, von denen das allgemeine Glied der Einen eine Function des der Andern ist, rücksichtlich ihrer Convergenz oder Divergenz zu vergleichen.

JOSEPH LUDWIG RAABE (1801–1859)

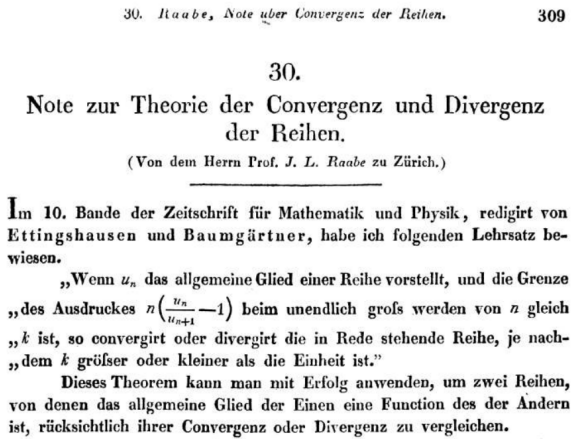
Poznámka: ďalšie kritériá pozri umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANa/DP_rady.pdf

Veta (Raabeho kritérium, 1834)

Nech $0 < a_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$.

(i) Ak $(\exists r > 1)\, n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq r$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, tak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(ii) Ak $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = q \in \mathbb{R}^*$, tak pre $q > 1$ rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a pre $q < 1$ rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.



30. Raabe, Note über Convergenz der Reihen. 309

30.

Note zur Theorie der Convergenz und Divergenz der Reihen.

(Von dem Herrn Prof. J. L. Raabe zu Zürich.)

Im 10. Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik, redigirt von Ettingshausen und Baumgärtner, habe ich folgenden Lehrsatz bewiesen.

„Wenn u_n das allgemeine Glied einer Reihe vorstellt, und die Grenze „des Ausdruckes $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ beim unendlich grofs werden von n gleich „k ist, so convergirt oder divergirt die in Rede stehende Reihe, je nach„dem k gröfser oder kleiner als die Einheit ist."

Dieses Theorem kann man mit Erfolg anwenden, um zwei Reihen, von denen das allgemeine Glied der Einen eine Function des der Andern ist, rücksichtlich ihrer Convergenz oder Divergenz zu vergleichen.

JOSEPH LUDWIG RAABE (1801–1859)

Poznámka: ďalšie kritériá pozri `umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANa/DP_rady.pdf`