Matematická analýza III.

(prezentácia k prednáške MAN2c/10)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MAN2c.html
Prednáška 9

20. novembra 2023

Nekonečné číselné rady – doterajšie poznatky

- rad cez pčs, t.j. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_n$
- nutná podmienka konvergencie radu: Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- Dve tváre konvergencie:

  Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje, akk konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame relatívne konvergentný.
- Ak rad konverguje absolútne, tak konverguje.
- Rad s nezápornými členmi je konvergentný práve vtedy, keď pčs je ohraničená.
- Riemannov rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje len pre $p > 1$

Nekonečné číselné rady – doterajšie poznatky

- rad cez pčs, t.j. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_n$
- nutná podmienka konvergencie radu: Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- Dve tváre konvergencie:

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje, akk konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame relatívne konvergentný.

- Ak rad konverguje absolútne, tak konverguje.
- Rad s nezápornými členmi je konvergentný práve vtedy, keď pčs je ohraničená.
- Riemannov rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje len pre $p > 1$

Nekonečné číselné rady – doterajšie poznatky

- rad cez pčs, t.j. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_n$
- nutná podmienka konvergencie radu: Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- Dve tváre konvergencie:

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje, akk konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame relatívne konvergentný.

- Ak rad konverguje absolútne, tak konverguje.
- Rad s nezápornými členmi je konvergentný práve vtedy, keď pčs je ohraničená.
- Riemannov rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje len pre $p > 1$

Nekonečné číselné rady – doterajšie poznatky

- rad cez pčs, t.j. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_n$
- nutná podmienka konvergencie radu: Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- Dve tváre konvergencie:

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje, akk konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame relatívne konvergentný.

- Ak rad konverguje absolútne, tak konverguje.
- Rad s nezápornými členmi je konvergentný práve vtedy, keď pčs je ohraničená.
- Riemannov rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje len pre $p > 1$

Nekonečné číselné rady – doterajšie poznatky

- rad cez pčs, t.j. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_n$
- nutná podmienka konvergencie radu: Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- Dve tváre konvergencie:

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje, akk konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame relatívne konvergentný.

- Ak rad konverguje absolútne, tak konverguje.
- Rad s nezápornými členmi je konvergentný práve vtedy, keď pčs je ohraničená.
- Riemannov rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje len pre $p > 1$

Nekonečné číselné rady – doterajšie poznatky

- rad cez pčs, t.j. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_n$
- nutná podmienka konvergencie radu: Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- Dve tváre konvergencie:

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje, akk konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame relatívne konvergentný.

- Ak rad konverguje absolútne, tak konverguje.
- Rad s nezápornými členmi je konvergentný práve vtedy, keď pčs je ohraničená.
- Riemannov rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje len pre $p > 1$

(A) Kritériá na vyšetrenie absolútnej konvergencie

Veta (porovnávacie kritérium)

Nech $0 \leq a_n \leq b_n$ platí pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Potom

(i) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

(ii) ak diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tak diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dôsledok (policajti pre rady): Nech pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n \leq c_n$. Potom

(i) ak konvergujú rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

(ii) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $+\infty$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje do $+\infty$;

(iii) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverguje do $-\infty$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje do $-\infty$.

Veta (limitné porovnávacie kritérium)

Nech $0 \leq a_n, b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}^*$.

(i) Ak $L < +\infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentný rad, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) Ak $L > 0$ a diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, potom diverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(A) Kritériá na vyšetrenie absolútnej konvergencie

Veta (porovnávacie kritérium)

Nech $0 \leq a_n \leq b_n$ platí pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Potom

(i) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

(ii) ak diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tak diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dôsledok (policajti pre rady): Nech pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n \leq c_n$. Potom

(i) ak konvergujú rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

(ii) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $+\infty$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje do $+\infty$;

(iii) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverguje do $-\infty$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje do $-\infty$.

Veta (limitné porovnávacie kritérium)

Nech $0 \leq a_n, b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}^*$.

(i) Ak $L < +\infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentný rad, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) Ak $L > 0$ a diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, potom diverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(A) Kritériá na vyšetrenie absolútnej konvergencie

Veta (porovnávacie kritérium)

Nech $0 \leq a_n \leq b_n$ platí pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Potom

(i) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

(ii) ak diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tak diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dôsledok (policajti pre rady): Nech pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n \leq c_n$. Potom

(i) ak konvergujú rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

(ii) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $+\infty$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje do $+\infty$;

(iii) ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverguje do $-\infty$, tak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje do $-\infty$.

Veta (limitné porovnávacie kritérium)

Nech $0 \leq a_n, b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}^*$.

(i) Ak $L < +\infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentný rad, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) Ak $L > 0$ a diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, potom diverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Veta (Cauchyho odmocninné kritérium, 1821)

Nech $0 \leq a_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$.

(i) Ak $(\exists q < 1)\ \sqrt[n]{a_n} \leq q$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, tak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Ak $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(ii) Nech $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \in \mathbb{R}^*$. Potom pre $q < 1$ je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentný a pre $q > 1$ je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentný.

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821.

AUGUSTIN-LUIS CAUCHY (1789–1857)

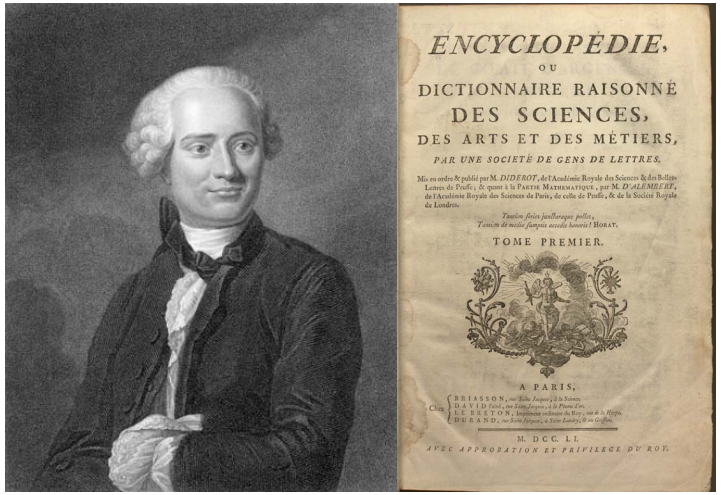
Veta (d'Alembertovo podielové kritérium, 1756)

Nech $0 < a_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$.

(i) Ak $(\exists q < 1)\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, tak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Ak $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(ii) Ak $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in \mathbb{R}^*$, tak pre $q < 1$ je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentný a pre $q > 1$ je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentný.



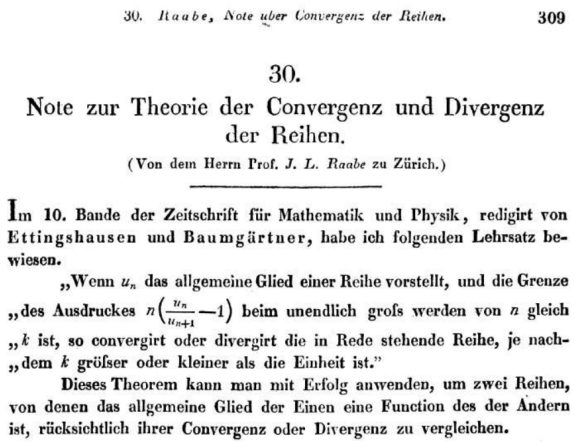
JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717–1783)

Veta (Raabeho kritérium, 1834)

Nech $0 < a_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$.

(i) Ak $(\exists r > 1)\, n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq r$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, tak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(ii) Ak $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = q \in \mathbb{R}^*$, tak pre $q > 1$ rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a pre $q < 1$ rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.



30. Raabe, Note über Convergenz der Reihen. 309

30.

Note zur Theorie der Convergenz und Divergenz der Reihen.

(Von dem Herrn Prof. J. L. Raabe zu Zürich.)

Im 10. Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik, redigirt von Ettingshausen und Baumgärtner, habe ich folgenden Lehrsatz bewiesen.

„Wenn u_n das allgemeine Glied einer Reihe vorstellt, und die Grenze „des Ausdruckes $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ beim unendlich grofs werden von n gleich „k ist, so convergirt oder divergirt die in Rede stehende Reihe, je nach„dem k gröfser oder kleiner als die Einheit ist."

Dieses Theorem kann man mit Erfolg anwenden, um zwei Reihen, von denen das allgemeine Glied der Einen eine Function des der Andern ist, rücksichtlich ihrer Convergenz oder Divergenz zu vergleichen.

JOSEPH LUDWIG RAABE (1801–1859)

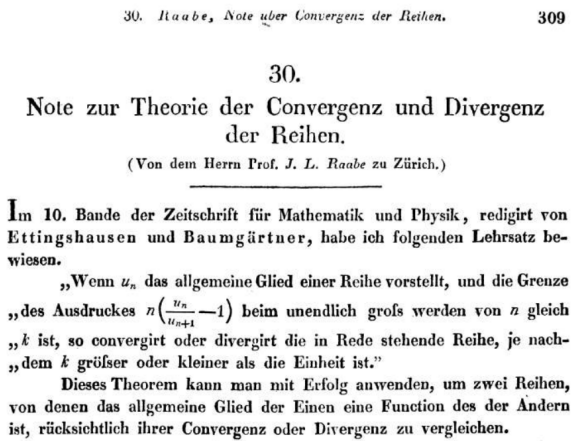
Poznámka: ďalšie kritériá pozri umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANa/DP_rady.pdf

Veta (Raabeho kritérium, 1834)

Nech $0 < a_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$.

(i) Ak $(\exists r > 1)\, n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq r$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, tak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(ii) Ak $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = q \in \mathbb{R}^*$, tak pre $q > 1$ rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a pre $q < 1$ rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.



30. Raabe, Note über Convergenz der Reihen. 309

30.

Note zur Theorie der Convergenz und Divergenz der Reihen.

(Von dem Herrn Prof. J. L. Raabe zu Zürich.)

Im 10. Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik, redigirt von Ettingshausen und Baumgärtner, habe ich folgenden Lehrsatz bewiesen.

„Wenn u_n das allgemeine Glied einer Reihe vorstellt, und die Grenze „des Ausdruckes $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ beim unendlich grofs werden von n gleich „k ist, so convergirt oder divergirt die in Rede stehende Reihe, je nach„dem k gröfser oder kleiner als die Einheit ist."

Dieses Theorem kann man mit Erfolg anwenden, um zwei Reihen, von denen das allgemeine Glied der Einen eine Function des der Andern ist, rücksichtlich ihrer Convergenz oder Divergenz zu vergleichen.

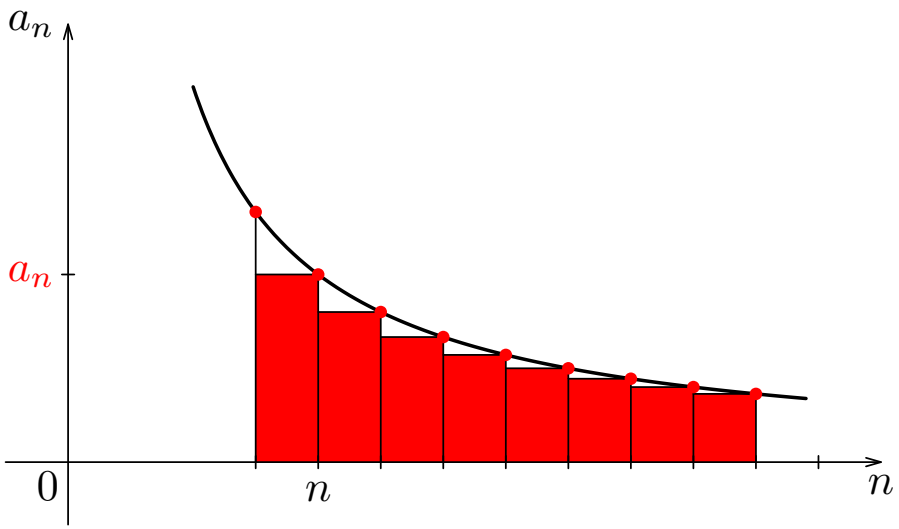
JOSEPH LUDWIG RAABE (1801–1859)

Poznámka: ďalšie kritériá pozri `umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANa/DP_rady.pdf`

Integrálne kritérium konvergencie radov

Nevlastný $\mathscr{R}$-integrál je spojitou analógiou nekonečných číselných radov, a tak môžeme použiť tento integrál na vyšetrovanie konvergencie číselných radov.

Uvažujme rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Zobrazme členy radu:

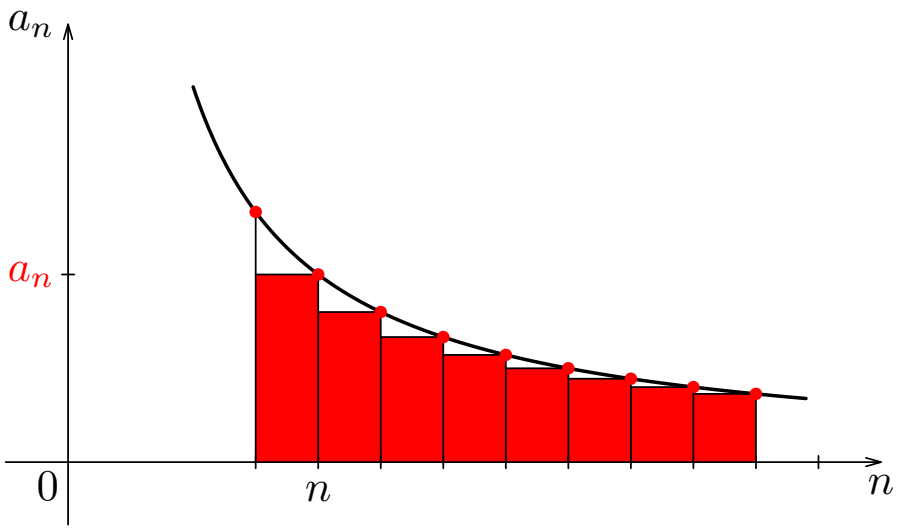


Zafarbená plocha predstavuje čiastočný súčet daného radu a je to zároveň dolný súčet nejakej funkcie pre ekvidištačné delenie D s normou $\nu(D) = 1$.

Integrálne kritérium konvergencie radov

Nevlastný $\mathscr{R}$-integrál je spojitou analógiou nekonečných číselných radov, a tak môžeme použiť tento integrál na vyšetrovanie konvergencie číselných radov.

Uvažujme rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Zobrazme členy radu:



Zafarbená plocha predstavuje čiastočný súčet daného radu a je to zároveň dolný súčet nejakej funkcie pre ekvidištačné delenie D s normou $\nu(D) = 1$.

Integrálne kritérium konvergencie radov

Veta VII.5

Nech funkcia f je spojitá, nezáporná, nerastúca na intervale $\langle K, +\infty)$ taká, že $f(n) = a_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Potom

(i) ak nevlastný integrál $(\mathscr{R}) \int_K^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ konverguje, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný,

(ii) ak nevlastný integrál $(\mathscr{R}) \int_K^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ diverguje, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.