Matematická analýza III.

(prezentácia k prednáške MAN2c/10)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MAN2c.html
Prednáška 10

1. decembra 2023

(A) Kritériá na vyšetrenie absolútnej konvergencie

Fakt: Na vyšetrenie konvergencie radu nepotrebujeme poznať jeho súčet!

- Porovnávacie kritérium: Ak $0 \leq a_n \leq b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, tak z konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ vyplýva konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a z divergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ vyplýva divergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.
- Limitné porovnávacie kritérium: Nech $0 \leq a_n \leq b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}^*$.
  - (i) Ak $L < +\infty$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentný rad, tak konverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
  - (ii) Ak $L > 0$ a diverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, potom diverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Cauchyho kondenzačné kritérium: Ak $(a_n)_1^{\infty}$ je nerastúca postupnosť nezáporných čísel, tak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, keď konverguje rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

(A) Kritériá na vyšetrenie absolútnej konvergencie

Fakt: Na vyšetrenie konvergencie radu nepotrebujeme poznať jeho súčet!

✠ Porovnávacie kritérium: Ak $0 \leq a_n \leq b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, tak z konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vyplýva konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a z divergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vyplýva divergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

✠ Limitné porovnávacie kritérium: Nech $0 \leq a_n \leq b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}^*$.

(i) Ak $L < +\infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentný rad, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) Ak $L > 0$ a diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, potom diverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

✠ Cauchyho kondenzačné kritérium: Ak $(a_n)_1^{\infty}$ je nerastúca postupnosť nezáporných čísel, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, keď konverguje rad $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

(A) Kritériá na vyšetrenie absolútnej konvergencie

✠ Podielové (d'Alembertovo) kritérium: Ak $0 < a_n$ a $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, tak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Ak $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pre nekonečne veľa $n \in \mathbb{N}$, tak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

✠ Odmocninové (Cauchyho) kritérium: ak $0 \leq a_n$ a $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, tak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Ak pre nekonečne veľa $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosť $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, tak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

✠ Raabeho kritérium: ak $0 < a_n$ a existuje $r \in \mathbb{R}, r > 1$ také, že pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq r$, tak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

✠ Integrálne kritérium: ak pre spojitú, nezápornú, nerastúcu funkciu f na intervale $\langle K, +\infty)$ platí $f(n) = a_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, tak nevlastný integrál $(\mathscr{R}) \int_K^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergujú/divergujú súčasne

(B) Kritériá na vyšetrenie relatívnej konvergencie

Otázka: Čo v prípade, keď rad absolútnych hodnôt diverguje?

Pripomenutie: Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame relatívne konvergentný.

Lema (Abelova, 1826)

Nech $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ sú ľubovoľné postupnosti a nech $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Potom pre každé $m, n \in \mathbb{N}$ také, že $m \leq n$, platí

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \left[\sum_{k=m}^{n} A_k (b_k - b_{k+1})\right] - A_{m-1} b_m + A_n b_{n+1},$$

pričom kladieme $A_0 := 0$.

Dôkaz: Zrejme pre $A_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ a pre súčin $a_k b_k$ platí rovnosť

$$a_k b_k = (A_k - A_{k-1}) b_k = A_k b_k - A_k b_{k+1} + (A_k b_{k+1} - A_{k-1} b_k) .$$

Následnou sumáciou uvedenej rovnosti od m po n dostávame výsledok. □

Meisterstück: Ľahké na overenie, ťažké na objavenie!

(B) Kritériá na vyšetrenie relatívnej konvergencie

Otázka: Čo v prípade, keď rad absolútnych hodnôt diverguje?

Pripomenutie: Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame relatívne konvergentný.

Lema (Abelova, 1826)

Nech $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ sú ľubovoľné postupnosti a nech $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Potom pre každé $m, n \in \mathbb{N}$ také, že $m \leq n$, platí

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \left[\sum_{k=m}^{n} A_k (b_k - b_{k+1})\right] - A_{m-1} b_m + A_n b_{n+1},$$

pričom kladieme $A_0 := 0$.

Dôkaz: Zrejme pre $A_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ a pre súčin $a_k b_k$ platí rovnosť

$$a_k b_k = (A_k - A_{k-1}) b_k = A_k b_k - A_k b_{k+1} + (A_k b_{k+1} - A_{k-1} b_k) .$$

Následnou sumáciou uvedenej rovnosti od m po n dostávame výsledok. □

Meisterstück: Ľahké na overenie, ťažké na objavenie!

(B) Kritériá na vyšetrenie relatívnej konvergencie

Otázka: Čo v prípade, keď rad absolútnych hodnôt diverguje?

Pripomenutie: Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame relatívne konvergentný.

Lema (Abelova, 1826)

Nech $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ sú ľubovoľné postupnosti a nech $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Potom pre každé $m, n \in \mathbb{N}$ také, že $m \leq n$, platí

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \left[\sum_{k=m}^{n} A_k (b_k - b_{k+1})\right] - A_{m-1} b_m + A_n b_{n+1},$$

pričom kladieme $A_0 := 0$.

Dôkaz: Zrejme pre $A_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ a pre súčin $a_k b_k$ platí rovnosť

$$a_k b_k = (A_k - A_{k-1}) b_k = A_k b_k - A_k b_{k+1} + \left(A_k b_{k+1} - A_{k-1} b_k\right).$$

Následnou sumáciou uvedenej rovnosti od m po n dostávame výsledok. □

Meisterstück: Ľahké na overenie, ťažké na objavenie!

(B) Kritériá na vyšetrenie relatívnej konvergencie

Otázka: Čo v prípade, keď rad absolútnych hodnôt diverguje?

Pripomenutie: Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame relatívne konvergentný.

Lema (Abelova, 1826)

Nech $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ sú ľubovoľné postupnosti a nech $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Potom pre každé $m, n \in \mathbb{N}$ také, že $m \leq n$, platí

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \left[\sum_{k=m}^{n} A_k (b_k - b_{k+1})\right] - A_{m-1} b_m + A_n b_{n+1},$$

pričom kladieme $A_0 := 0$.

Dôkaz: Zrejme pre $A_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ a pre súčin $a_k b_k$ platí rovnosť

$$a_k b_k = (A_k - A_{k-1}) b_k = A_k b_k - A_k b_{k+1} + \left(A_k b_{k+1} - A_{k-1} b_k\right).$$

Následnou sumáciou uvedenej rovnosti od m po n dostávame výsledok. □

Meisterstück: Ľahké na overenie, ťažké na objavenie!

Abelova sumácia po častiach: $(\forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n)$ $\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k(b_k - b_{k+1}) - A_{m-1}b_m + A_n b_{n+1}$,
kde $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ a $A_0 := 0$

Veta VII.6

Nech $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ sú postupnosti reálnych čísel a nech $A_n = \sum_{n=1}^{n} a_n$.

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ konverguje a existuje vlastná limita $\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1}$,

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Dôkaz: Na základe Abelovej lemy pre postupnosť čiastočných súčtov $(s_k)_1^\infty$ radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ a $m = 1$ platí

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n b_n = \sum_{n=1}^{k} A_n(b_n - b_{n+1}) - A_0 b_1 + A_k b_{k+1} = \sum_{n=1}^{k} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_k b_{k+1}.$$

A teda postupnosť $(s_k)_1^\infty$ čiastočných súčtov konverguje, ak oba sčítance na pravej strane rovnosti konvergujú. □

Poznámka: Uvedená veta nerieši priamo otázku konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, iba ju prevádza na iné dve otázky, ktoré sú ale v mnohých prípadoch jednoduchšie na rozriešenie. Výsledok je v mnohých aspektoch ďalekosiahly a umožňuje nám okamžite odvodiť niektoré špeciálnejšie kritériá, ktoré sú jednoduchšie na aplikáciu.

Abelova sumácia po častiach: $(\forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n)$ $\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k(b_k - b_{k+1}) - A_{m-1}b_m + A_n b_{n+1}$, kde $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ a $A_0 := 0$

Veta VII.6

Nech $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ sú postupnosti reálnych čísel a nech $A_n = \sum_{n=1}^{n} a_n$.

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ konverguje a existuje vlastná limita $\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1}$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Dôkaz: Na základe Abelovej lemy pre postupnosť čiastočných súčtov $(s_k)_1^\infty$ radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ a $m = 1$ platí

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n b_n = \sum_{n=1}^{k} A_n(b_n - b_{n+1}) - A_0 b_1 + A_k b_{k+1} = \sum_{n=1}^{k} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_k b_{k+1}.$$

A teda postupnosť $(s_k)_1^\infty$ čiastočných súčtov konverguje, ak oba sčítance na pravej strane rovnosti konvergujú. □

Poznámka: Uvedená veta nerieši priamo otázku konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, iba ju prevádza na iné dve otázky, ktoré sú ale v mnohých prípadoch jednoduchšie na rozriešenie. Výsledok je v mnohých aspektoch ďalekosiahly a umožňuje nám okamžite odvodiť niektoré špeciálnejšie kritériá, ktoré sú jednoduchšie na aplikáciu.

Abelova sumácia po častiach: $(\forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n)$ $\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k(b_k - b_{k+1}) - A_{m-1}b_m + A_n b_{n+1}$, kde $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ a $A_0 := 0$

Veta VII.6

Nech $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ sú postupnosti reálnych čísel a nech $A_n = \sum_{n=1}^{n} a_n$.

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ konverguje a existuje vlastná limita $\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1}$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Dôkaz: Na základe Abelovej lemy pre postupnosť čiastočných súčtov $(s_k)_1^\infty$ radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ a $m = 1$ platí

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n b_n = \sum_{n=1}^{k} A_n(b_n - b_{n+1}) - A_0 b_1 + A_k b_{k+1} = \sum_{n=1}^{k} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_k b_{k+1}.$$

A teda postupnosť $(s_k)_1^\infty$ čiastočných súčtov konverguje, ak oba sčítance na pravej strane rovnosti konvergujú. □

Poznámka: Uvedená veta nerieši priamo otázku konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, iba ju prevádza na iné dve otázky, ktoré sú ale v mnohých prípadoch jednoduchšie na rozriešenie. Výsledok je v mnohých aspektoch ďalekosiahly a umožňuje nám okamžite odvodiť niektoré špeciálnejšie kritériá, ktoré sú jednoduchšie na aplikáciu.

Veta VII.6

Nech $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ sú ľubovoľné postupnosti a nech $A_n = \sum\limits_{n=1}^{n} a_n$.
Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ konverguje a existuje vlastná limita $\lim\limits_{n\to\infty} A_n b_{n+1}$, tak konverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Dôsledok (Abelovo kritérium, 1826)

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad a $(b_n)_1^\infty$ je monotónna a ohraničená postupnosť. Potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Dôkaz: Keďže rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, konverguje aj postupnosť $(A_n)_1^\infty$ jeho čiastočných súčtov, označme jej limitu A. Podľa Vety o konvergencii monotónnej a ohraničenej postupnosti máme $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ a naviac platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\left((b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_n - b_{n+1})\right) = \lim_{n\to\infty}(b_1 - b_{n+1}) = b_1 - B.$$

Z konvergencie $(A_n)_1^\infty$ a konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ máme konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ a tiež $\lim\limits_{n\to\infty} A_n b_{n+1} = AB$. Podľa Vety VII.6 rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje. □

Veta VII.6

Nech $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ sú ľubovoľné postupnosti a nech $A_n = \sum\limits_{n=1}^{n} a_n$.
Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ konverguje a existuje vlastná limita $\lim\limits_{n\to\infty} A_n b_{n+1}$, tak konverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Dôsledok (Abelovo kritérium, 1826)

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad a $(b_n)_1^\infty$ je monotónna a ohraničená postupnosť. Potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Dôkaz: Keďže rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, konverguje aj postupnosť $(A_n)_1^\infty$ jeho čiastočných súčtov, označme jej limitu A. Podľa Vety o konvergencii monotónnej a ohraničenej postupnosti máme $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ a naviac platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\big((b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_n - b_{n+1})\big) = \lim_{n\to\infty}(b_1 - b_{n+1}) = b_1 - B.$$

Z konvergencie $(A_n)_1^\infty$ a konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ máme konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ a tiež $\lim\limits_{n\to\infty} A_n b_{n+1} = AB$. Podľa Vety VII.6 rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje. □

Veta VII.6

Nech $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ sú ľubovoľné postupnosti a nech $A_n = \sum_{n=1}^{n} a_n$.
Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ konverguje a existuje vlastná limita $\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1}$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Dôsledok (Dirichletovo kritérium, 1863)

Ak postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je ohraničená a $(b_n)_1^\infty$ je monotónna postupnosť taká, že $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Dôkaz: Nech $(A_n)_1^\infty$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ sme vyšetrili v dôkaze Abelovho kritéria. Keďže $(A_n)_1^\infty$ je ohraničená, tak existujú $K, L \in \mathbb{R}$ také, že

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; K b_{n+1} \leq A_n b_{n+1} \leq L b_{n+1}.$$

Potom $\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1} = 0$ na základe vety o zovretí a rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje podľa Vety VII.6. □

Veta VII.6

Nech $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ sú ľubovoľné postupnosti a nech $A_n = \sum_{n=1}^{n} a_n$.
Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ konverguje a existuje vlastná limita $\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1}$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Dôsledok (Dirichletovo kritérium, 1863)

Ak postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je ohraničená a $(b_n)_1^\infty$ je monotónna postupnosť taká, že $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Dôkaz: Nech $(A_n)_1^\infty$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ sme vyšetrili v dôkaze Abelovho kritéria. Keďže $(A_n)_1^\infty$ je ohraničená, tak existujú $K, L \in \mathbb{R}$ také, že

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; K b_{n+1} \leq A_n b_{n+1} \leq L b_{n+1}.$$

Potom $\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1} = 0$ na základe vety o zovretí a rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje podľa Vety VII.6. □

Veta VII.6

Nech $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ sú ľubovoľné postupnosti a nech $A_n = \sum_{n=1}^{n} a_n$.
Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ konverguje a existuje vlastná limita $\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1}$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Otázka: Kedy je nutná podmienka konvergencie radu zároveň postačujúcou?

Definícia

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame alternujúci, akk $(\forall n \in \mathbb{N})\ \operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$.

Dohoda: alternujúci rad = rad tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$

Dôsledok (Leibnizovo kritérium, 1682)

Nech $(a_n)_1^\infty$ je nerastúca postupnosť nezáporných čísel. Alternujúci rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje práve vtedy, keď $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dôkaz: špeciálny prípad Dirichletovho kritéria!

Veta VII.6

Nech $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ sú ľubovoľné postupnosti a nech $A_n = \sum\limits_{n=1}^{n} a_n$.
Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ konverguje a existuje vlastná limita $\lim\limits_{n\to\infty} A_n b_{n+1}$, tak konverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Otázka: Kedy je nutná podmienka konvergencie radu zároveň postačujúcou?

Definícia

Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame alternujúci, akk $(\forall n \in \mathbb{N})\ \operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$.

Dohoda: alternujúci rad = rad tvaru $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$

Dôsledok (Leibnizovo kritérium, 1682)

Nech $(a_n)_1^\infty$ je nerastúca postupnosť nezáporných čísel. Alternujúci rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje práve vtedy, keď $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dôkaz: špeciálny prípad Dirichletovho kritéria!

Veta VII.6

Nech $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ sú ľubovoľné postupnosti a nech $A_n = \sum_{n=1}^{n} a_n$.
Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ konverguje a existuje vlastná limita $\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1}$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Otázka: Kedy je nutná podmienka konvergencie radu zároveň postačujúcou?

Definícia

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame alternujúci, akk $(\forall n \in \mathbb{N})\ \operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$.

Dohoda: alternujúci rad = rad tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$

Dôsledok (Leibnizovo kritérium, 1682)

Nech $(a_n)_1^\infty$ je nerastúca postupnosť nezáporných čísel. Alternujúci rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje práve vtedy, keď $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dôkaz: špeciálny prípad Dirichletovho kritéria!

Veta VII.6

Nech $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ sú ľubovoľné postupnosti a nech $A_n = \sum_{n=1}^{n} a_n$.
Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ konverguje a existuje vlastná limita $\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1}$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Otázka: Kedy je nutná podmienka konvergencie radu zároveň postačujúcou?

Definícia

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame alternujúci, akk $(\forall n \in \mathbb{N})\ \operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$.

Dohoda: alternujúci rad = rad tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$

Dôsledok (Leibnizovo kritérium, 1682)

Nech $(a_n)_1^\infty$ je nerastúca postupnosť nezáporných čísel. Alternujúci rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje práve vtedy, keď $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dôkaz: špeciálny prípad Dirichletovho kritéria!

Definícia

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame alternujúci, akk $(\forall n \in \mathbb{N})\ \operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$.

Leibnizovo kritérium konvergencie alternujúceho radu, 1682

Nech $(a_n)_1^{\infty}$ je nerastúca postupnosť kladných čísel. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ je konvergentný práve vtedy, keď $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716)

Definícia

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame alternujúci, akk $(\forall n \in \mathbb{N})\ \operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$.

Leibnizovo kritérium konvergencie alternujúceho radu, 1682

Nech $(a_n)_1^{\infty}$ je nerastúca postupnosť kladných čísel. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ je konvergentný práve vtedy, keď $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Poznámky:

(i) Aj podľa Leibnizovho kritéria Grandiho rad (s postupnosťou $a_n \equiv 1$) diverguje!

(ii) Leibnizov (anharmonický) rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konverguje! Aký má ale súčet?

(iii) Predpoklad nerastúcosti postupnosti $(a_n)_1^{\infty}$ v Leibnizovom kritériu sa nedá vynechať!!! Napr.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \cdot \frac{1}{2^n} - \frac{1+(-1)^n}{2n} \right)$$

je alternujúci rad, kde $a_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \cdot \frac{1}{2^n} - \frac{1+(-1)^n}{2n} \right) > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Táto postupnosť **nie je monotónna**, avšak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dá sa ukázať, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Definícia

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame alternujúci, akk $(\forall n \in \mathbb{N})\ \operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$.

Leibnizovo kritérium konvergencie alternujúceho radu, 1682

Nech $(a_n)_1^{\infty}$ je nerastúca postupnosť kladných čísel. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ je konvergentný práve vtedy, keď $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Poznámky:

(i) Aj podľa Leibnizovho kritéria Grandiho rad (s postupnosťou $a_n \equiv 1$) diverguje!

(ii) Leibnizov (anharmonický) rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konverguje! Aký má ale súčet?

(iii) Predpoklad nerastúcosti postupnosti $(a_n)_1^{\infty}$ v Leibnizovom kritériu sa nedá vynechať!!! Napr.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \cdot \frac{1}{2^n} - \frac{1+(-1)^n}{2n} \right)$$

je alternujúci rad, kde $a_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \cdot \frac{1}{2^n} - \frac{1+(-1)^n}{2n} \right) > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Táto postupnosť **nie je monotónna**, avšak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dá sa ukázať, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Definícia

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame alternujúci, akk $(\forall n \in \mathbb{N})\ \operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$.

Leibnizovo kritérium konvergencie alternujúceho radu, 1682

Nech $(a_n)_1^{\infty}$ je nerastúca postupnosť kladných čísel. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ je konvergentný práve vtedy, keď $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Poznámky:

(i) Aj podľa Leibnizovho kritéria Grandiho rad (s postupnosťou $a_n \equiv 1$) diverguje!

(ii) Leibnizov (anharmonický) rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konverguje! Aký má ale súčet?

(iii) Predpoklad nerastúcosti postupnosti $(a_n)_1^{\infty}$ v Leibnizovom kritériu sa nedá vynechať!!! Napr.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \cdot \frac{1}{2^n} - \frac{1+(-1)^n}{2n} \right)$$

je alternujúci rad, kde $a_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \cdot \frac{1}{2^n} - \frac{1+(-1)^n}{2n} \right) > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Táto postupnosť **nie je monotónna**, avšak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dá sa ukázať, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Definícia

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame alternujúci, akk $(\forall n \in \mathbb{N})\ \operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$.

Leibnizovo kritérium konvergencie alternujúceho radu, 1682

Nech $(a_n)_1^{\infty}$ je nerastúca postupnosť kladných čísel. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ je konvergentný práve vtedy, keď $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Poznámky:

(i) Aj podľa Leibnizovho kritéria Grandiho rad (s postupnosťou $a_n \equiv 1$) diverguje!

(ii) Leibnizov (anharmonický) rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konverguje! Aký má ale súčet?

(iii) Predpoklad nerastúcosti postupnosti $(a_n)_1^{\infty}$ v Leibnizovom kritériu sa nedá vynechať!!! Napr.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \cdot \frac{1}{2^n} - \frac{1+(-1)^n}{2n} \right)$$

je alternujúci rad, kde $a_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \cdot \frac{1}{2^n} - \frac{1+(-1)^n}{2n} \right) > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Táto postupnosť **nie je monotónna**, avšak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dá sa ukázať, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

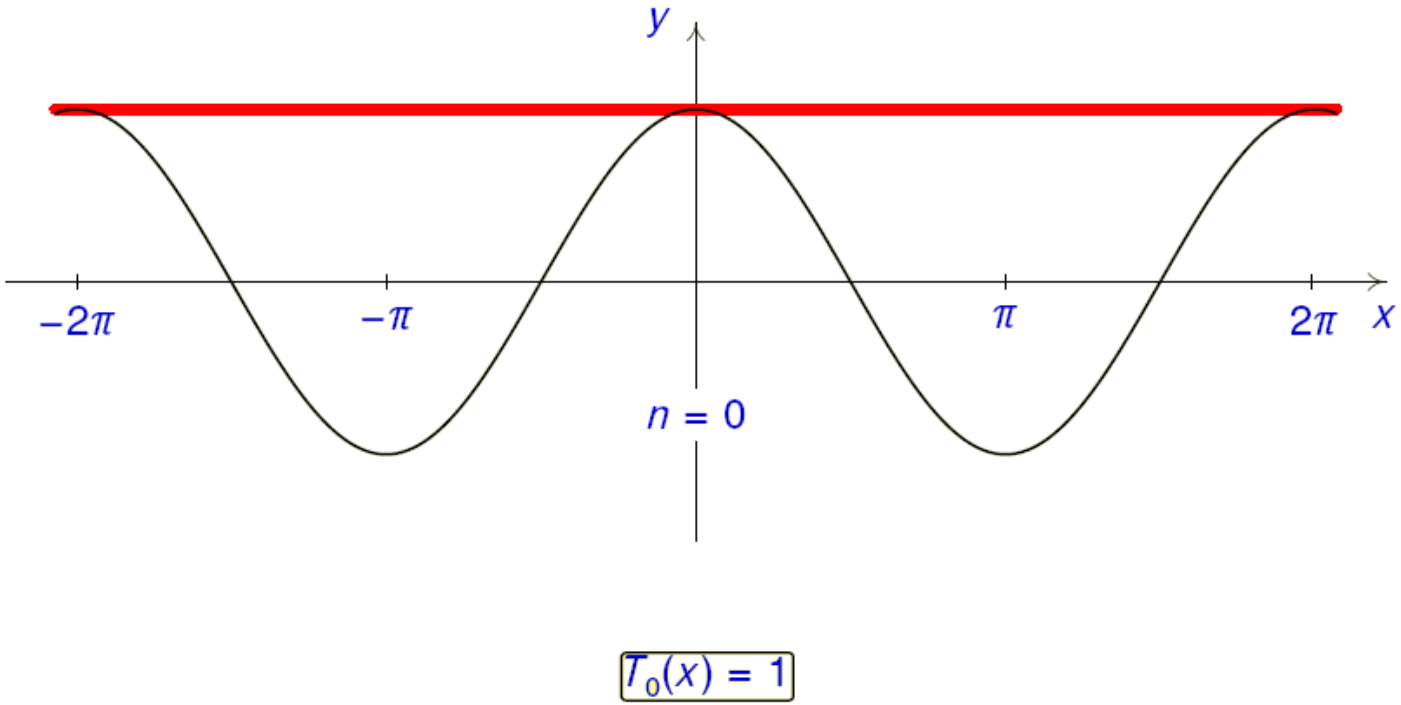
Nekonečné postupnosti a rady funkcií – načo?

... so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to infinite series of fractions having simple numerators and denominators...

Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

Taylorov polynóm (1715) = výborná aproximácia (hladkej) funkcie na okolí nejakého bodu, napr.

$$\mathrm{T}_n(\cos, 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$$



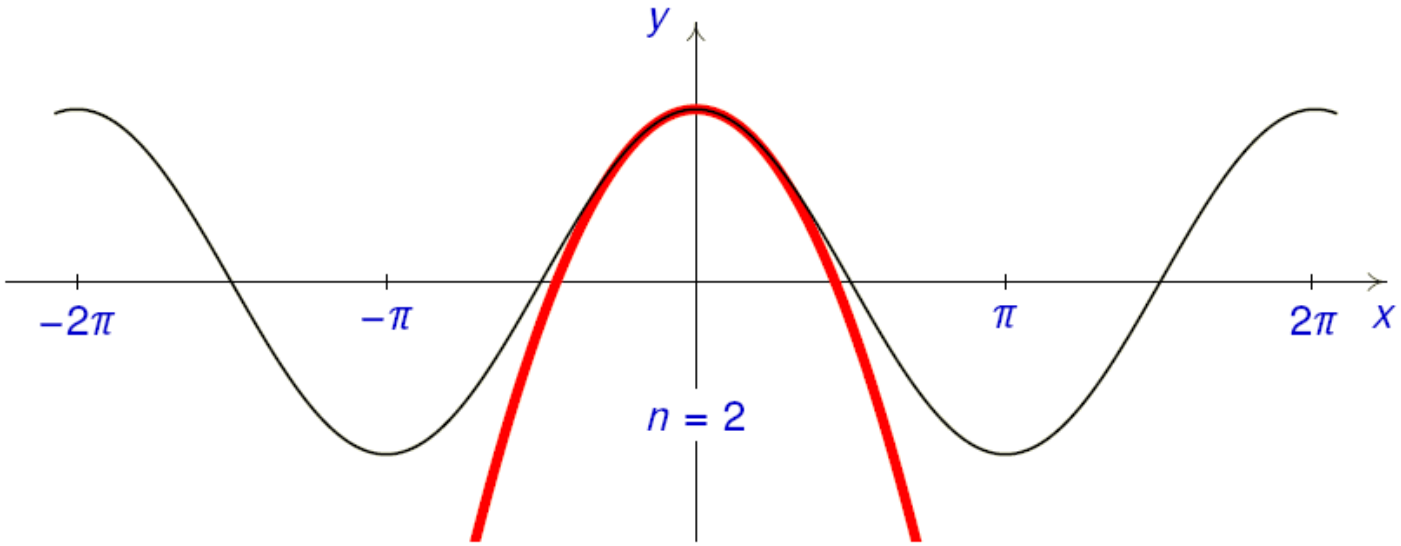
Nekonečné postupnosti a rady funkcií – načo?

... so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to infinite series of fractions having simple numerators and denominators...

Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

Taylorov polynóm (1715) = výborná aproximácia (hladkej) funkcie na okolí nejakého bodu, napr.

$$\mathrm{T}_n(\cos, 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$$



$$\boxed{T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}}$$

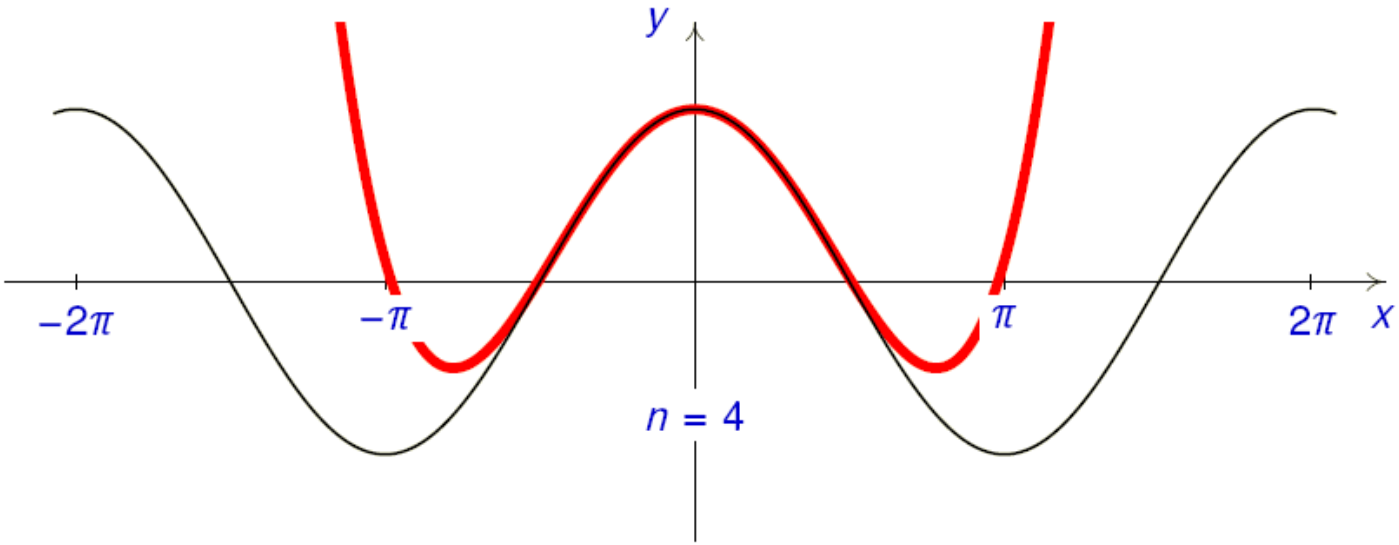
Nekonečné postupnosti a rady funkcií – načo?

... so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to infinite series of fractions having simple numerators and denominators...

Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

Taylorov polynóm (1715) = výborná aproximácia (hladkej) funkcie na okolí nejakého bodu, napr.

$$\mathrm{T}_n(\cos, 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$$



$$\boxed{T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}$$

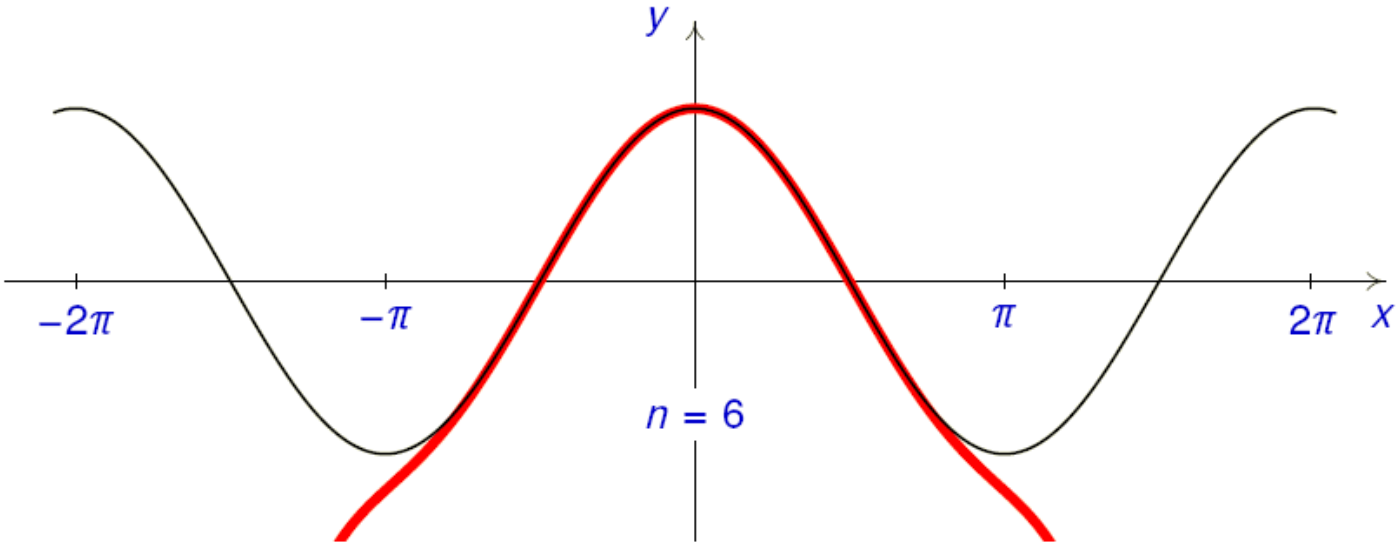
Nekonečné postupnosti a rady funkcií – načo?

... so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to infinite series of fractions having simple numerators and denominators...

Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

Taylorov polynóm (1715) = výborná aproximácia (hladkej) funkcie na okolí nejakého bodu, napr.

$$\mathrm{T}_n(\cos, 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$$



$$T_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

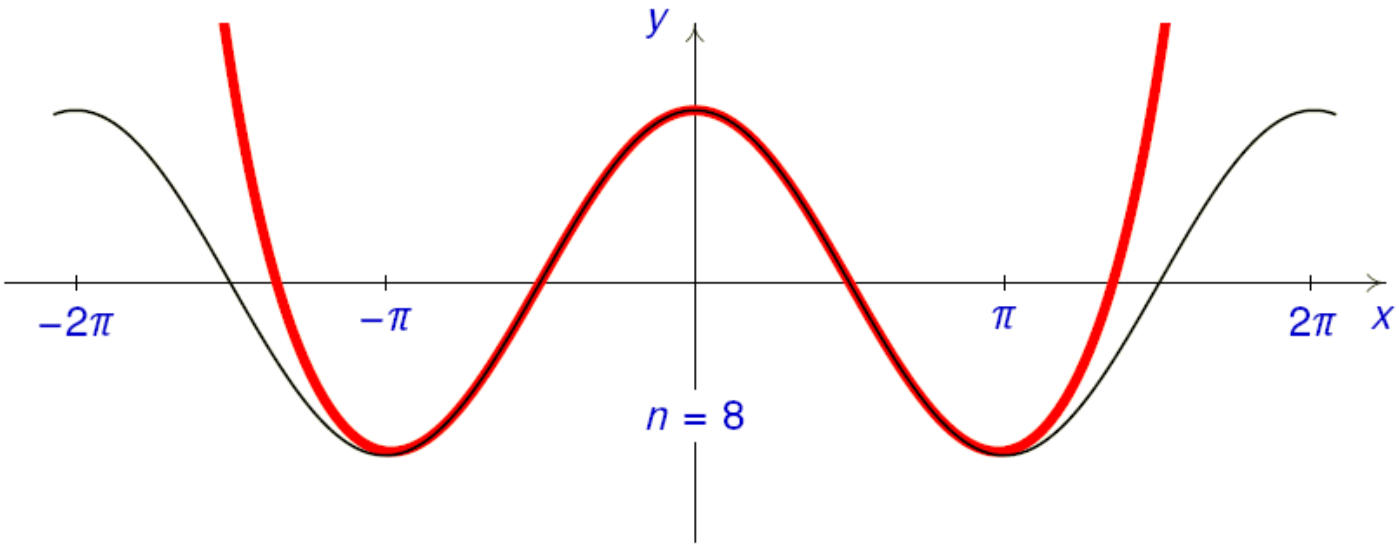
Nekonečné postupnosti a rady funkcií – načo?

... so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to infinite series of fractions having simple numerators and denominators...

Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

Taylorov polynóm (1715) = výborná aproximácia (hladkej) funkcie na okolí nejakého bodu, napr.

$$\mathrm{T}_n(\cos, 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$$



$$\boxed{T_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}}$$

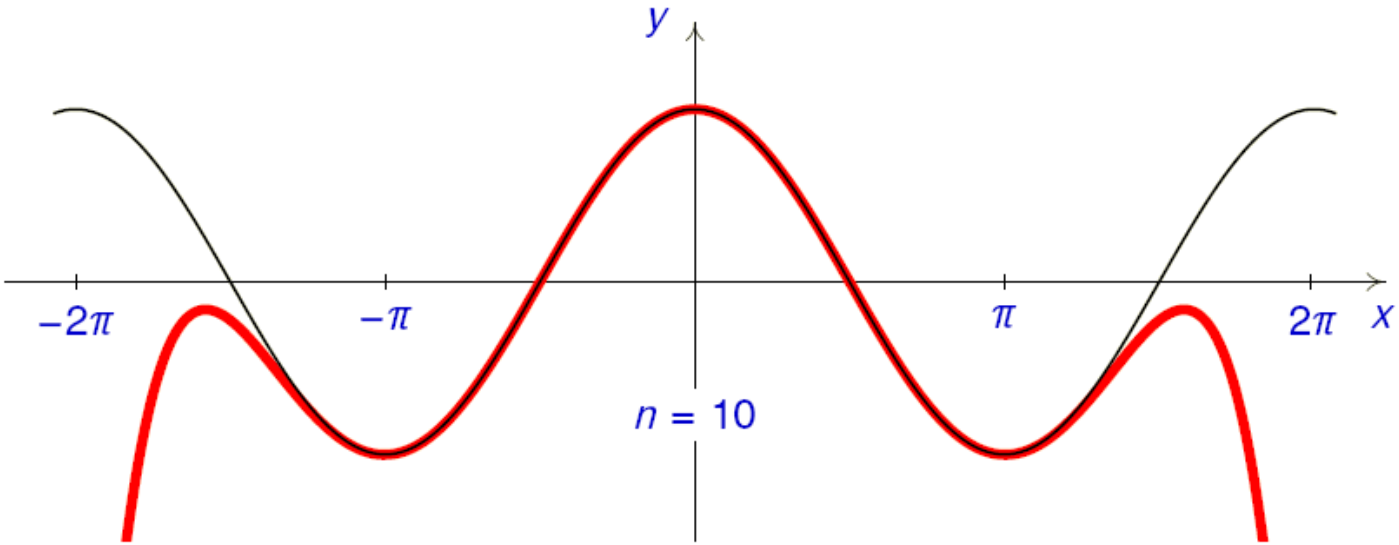
Nekonečné postupnosti a rady funkcií – načo?

... so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to infinite series of fractions having simple numerators and denominators...

Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

Taylorov polynóm (1715) = výborná aproximácia (hladkej) funkcie na okolí nejakého bodu, napr.

$$\mathrm{T}_n(\cos, 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$$



$$T_{10}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}$$

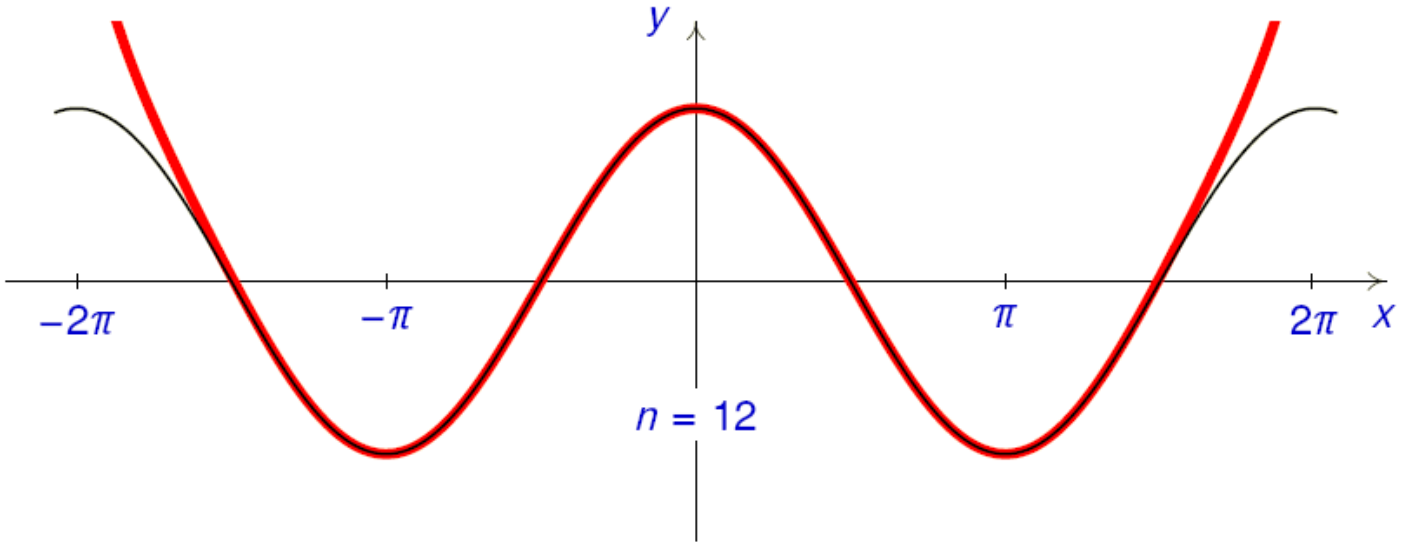
Nekonečné postupnosti a rady funkcií – načo?

... so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to infinite series of fractions having simple numerators and denominators...

Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

Taylorov polynóm (1715) = výborná aproximácia (hladkej) funkcie na okolí nejakého bodu, napr.

$$\mathrm{T}_n(\cos, 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$$



$$T_{12}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!}$$

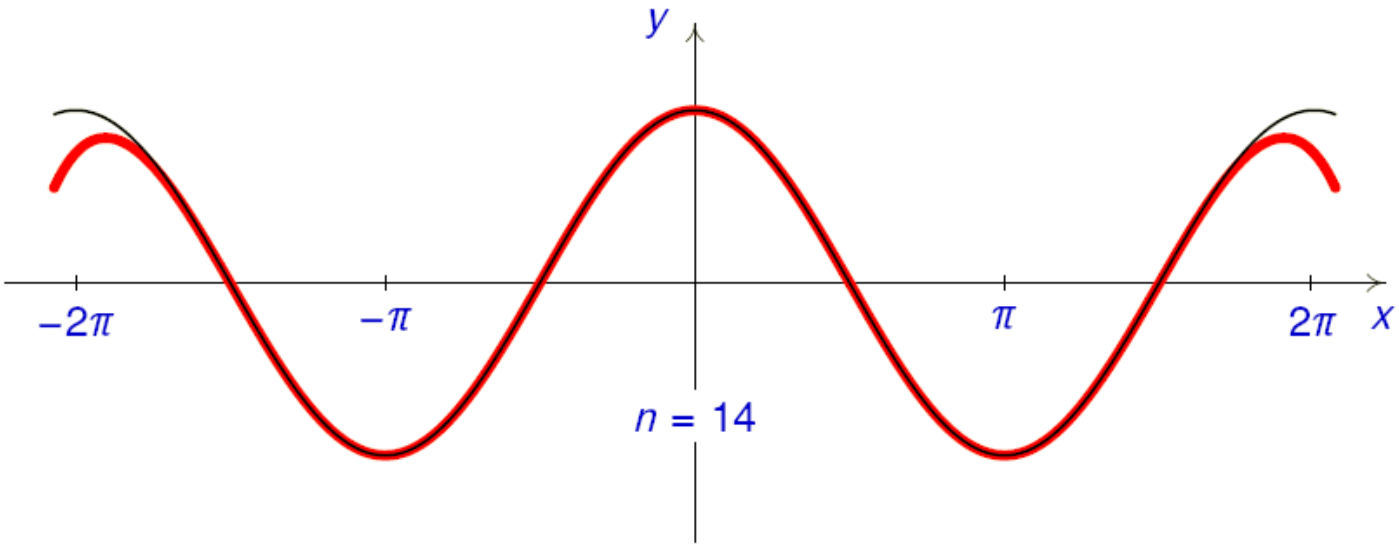
Nekonečné postupnosti a rady funkcií – načo?

... so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to infinite series of fractions having simple numerators and denominators...

Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

Taylorov polynóm (1715) = výborná aproximácia (hladkej) funkcie na okolí nejakého bodu, napr.

$$\mathrm{T}_n(\cos, 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$$



$$T_{14}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} - \frac{x^{14}}{14!}$$

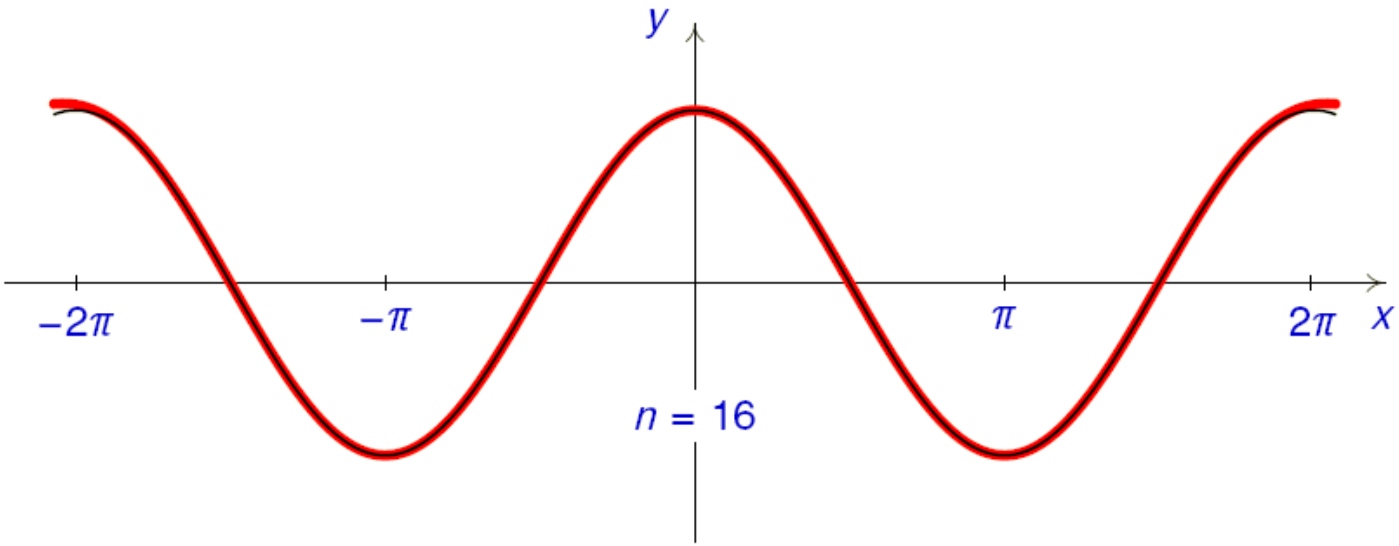
Nekonečné postupnosti a rady funkcií – načo?

... so it is the advantage of infinite variable-sequences that classes of more complicated terms... may be reduced to infinite series of fractions having simple numerators and denominators...

Newton: *De methodis serierum et fluxionum* (1671)

Taylorov polynóm (1715) = výborná aproximácia (hladkej) funkcie na okolí nejakého bodu, napr.

$$\mathrm{T}_n(\cos, 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)$$



$$T_{16}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} - \frac{x^{14}}{14!} + \frac{x^{16}}{16!}$$

Nekonečné postupnosti a rady funkcií – načo?

This is the fundamental proposition established by Weierstrass.

Borel: *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes* (1905)

Weierstrassova veta (1885) = aproximácia ľubovoľnej spojitej funkcie polynómom s ľubovoľnou presnosťou

✠ Verzia pre neperiodické funkcie:

Ak f je spojitá na konečnom intervale $\langle a, b\rangle$, tak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ a polynóm P_n stupňa n taký, že pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

✠ Verzia pre periodické funkcie:

Ak F je periodická spojitá funkcia s periódou 2π, tak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ a trigonometrický polynóm

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

taký, že pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí

$$|F(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

Nekonečné postupnosti a rady funkcií – načo?

This is the fundamental proposition established by Weierstrass.
Borel: *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes* (1905)

Weierstrassova veta (1885) = aproximácia ľubovoľnej spojitej funkcie polynómom s ľubovoľnou presnosťou

✠ Verzia pre neperiodické funkcie:
Ak f je spojitá na konečnom intervale $\langle a, b\rangle$, tak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ a polynóm P_n stupňa n taký, že pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

✠ Verzia pre periodické funkcie:
Ak F je periodická spojitá funkcia s periódou 2π, tak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ a trigonometrický polynóm

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

taký, že pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí

$$|F(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

Nekonečné postupnosti a rady funkcií – načo?

This is the fundamental proposition established by Weierstrass.
Borel: *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes* (1905)

Weierstrassova veta (1885) = aproximácia ľubovoľnej spojitej funkcie polynómom s ľubovoľnou presnosťou

✠ Verzia pre neperiodické funkcie:
Ak f je spojitá na konečnom intervale $\langle a, b\rangle$, tak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ a polynóm P_n stupňa n taký, že pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

✠ Verzia pre periodické funkcie:
Ak F je periodická spojitá funkcia s periódou 2π, tak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ a trigonometrický polynóm

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

taký, že pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí

$$|F(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

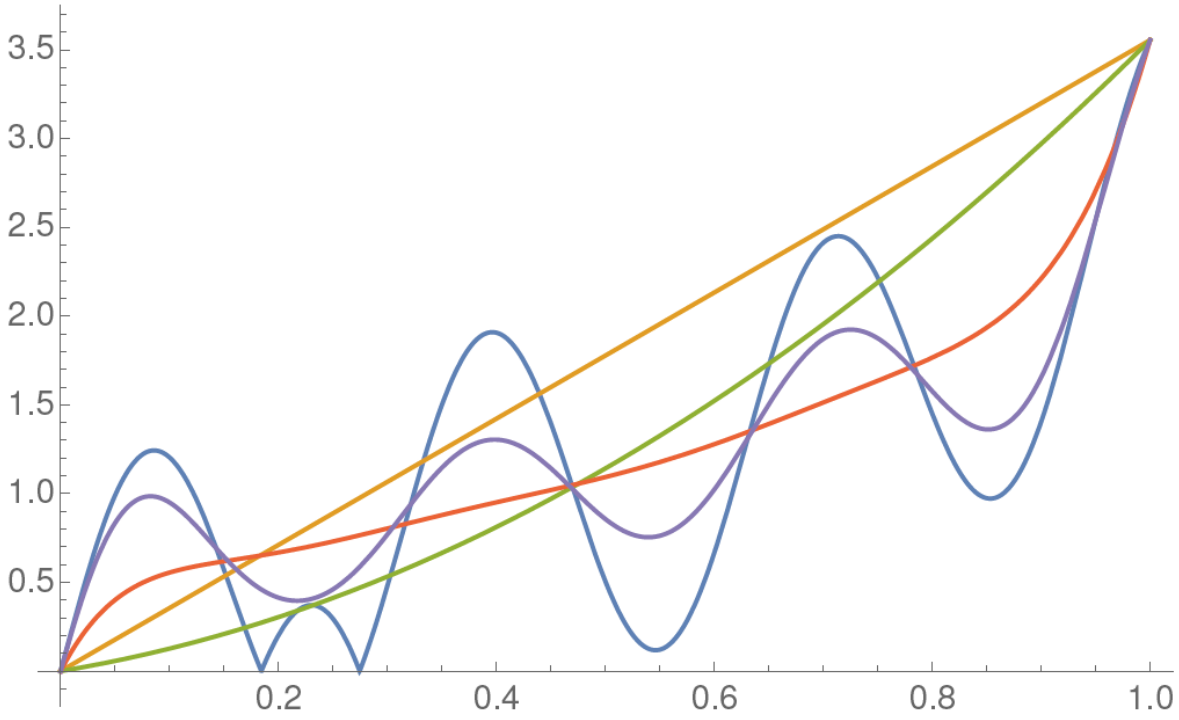
Nekonečné postupnosti a rady funkcií – načo?

This is the fundamental proposition established by Weierstrass.

Borel: *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes* (1905)

Weierstrassova veta (1885) = aproximácia ľubovoľnej spojitej funkcie polynómom s ľubovoľnou presnosťou, napr.

$$f(x) = \left| \frac{1}{2} x \cos 5x + \sin 20x + 2{,}5x \right|, \quad x \in \langle 0, 1 \rangle$$



aproximácia f (modrá) Bernsteinovými polynómami stupňa 1,2,10 a 50

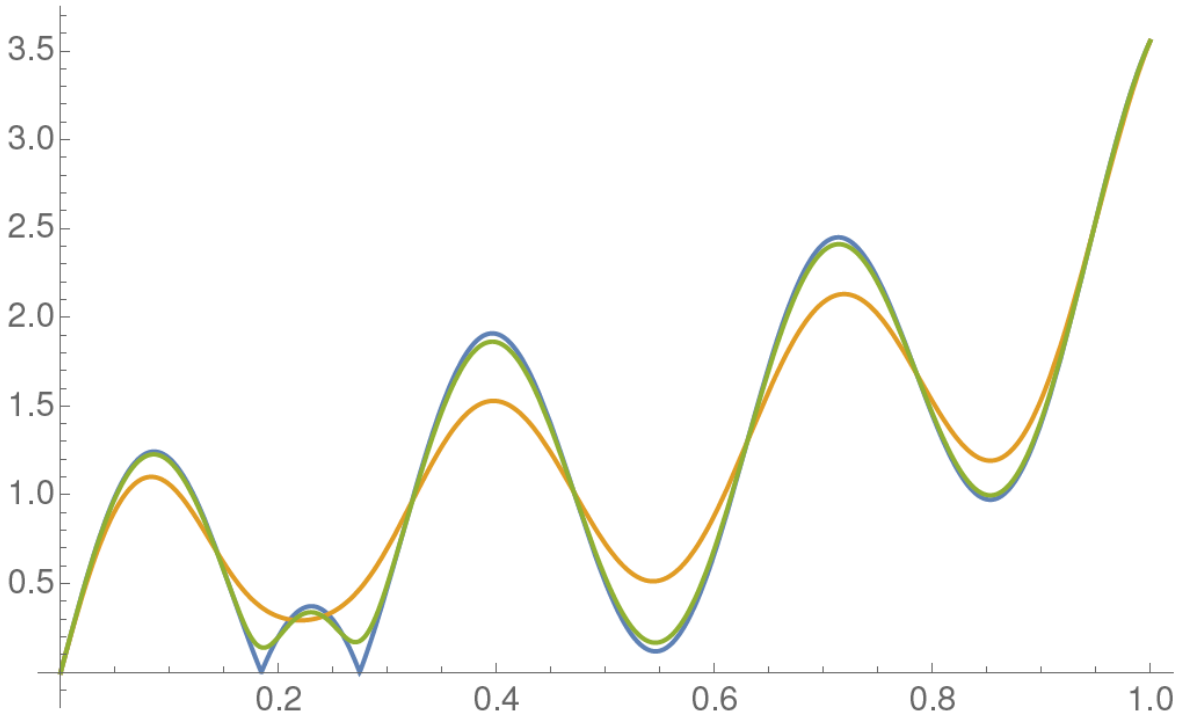
Nekonečné postupnosti a rady funkcií – načo?

This is the fundamental proposition established by Weierstrass.

Borel: *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes* (1905)

Weierstrassova veta (1885) = aproximácia ľubovoľnej spojitej funkcie polynómom s ľubovoľnou presnosťou, napr.

$$f(x) = \left| \frac{1}{2} x \cos 5x + \sin 20x + 2{,}5x \right|, \quad x \in \langle 0, 1 \rangle$$



aproximácia f (modrá) Bernsteinovými polynómami stupňa 100 a 1000

Nekonečné postupnosti a rady funkcií – ako s nimi zachádzať?

Ak máme konečný počet funkcií $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$, ktoré sú

- spojité, tak ich súčet je spojitá funkcia;
- diferencovateľné, tak ich súčet je funkcia diferencovateľná a platí

$$(\forall x \in I)\ \ (f_1(x) + \cdots + f_n(x))' = f_1'(x) + \cdots + f_n'(x);$$

- $\mathbb{R}$-integrovateľné, tak aj ich súčet je funkcia $\mathbb{R}$-integrovateľná a platí

$$(\mathscr{R}) \int_I (f_1(x) + \cdots + f_n(x))\ \mathrm{d}x = (\mathscr{R}) \int_I f_1(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + (\mathscr{R}) \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Otázka: Má takéto vlastnosti aj súčet nekonečného počtu funkcií?

The following theorem can be found in the work of Mr. Cauchy: "If the various terms of the series $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ are continuous functions, ... then the sum of the series is also a continuous function." But it seems to me that this theorem admits exceptions.

Abel: *Ouevres* (1826)

Where is it proved that one obtains the derivative of an infinite series by taking the derivative of each term?

Abel: *Ouevres* (1826)

Until very recently it was believed, that the integral of a convergent series ... is equal to the sum of the integrals of the individual terms, and Mr. Weierstrass was the first to observe ...

Heine: *Ueber trigonometrischen Reihen* (1870)

Nekonečné postupnosti a rady funkcií – ako s nimi zachádzať?

Ak máme konečný počet funkcií $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$, ktoré sú

- spojité, tak ich súčet je spojitá funkcia;
- diferencovateľné, tak ich súčet je funkcia diferencovateľná a platí

$$(\forall x \in I)\ \ (f_1(x) + \cdots + f_n(x))' = f_1'(x) + \cdots + f_n'(x);$$

- $\mathbb{R}$-integrovateľné, tak aj ich súčet je funkcia $\mathbb{R}$-integrovateľná a platí

$$(\mathscr{R}) \int_I (f_1(x) + \cdots + f_n(x))\ \mathrm{d}x = (\mathscr{R}) \int_I f_1(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + (\mathscr{R}) \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Otázka: Má takéto vlastnosti aj súčet nekonečného počtu funkcií?

The following theorem can be found in the work of Mr. Cauchy: "If the various terms of the series $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ are continuous functions, ... then the sum of the series is also a continuous function." But it seems to me that this theorem admits exceptions.

Abel: *Ouevres* (1826)

Where is it proved that one obtains the derivative of an infinite series by taking the derivative of each term?

Abel: *Ouevres* (1826)

Until very recently it was believed, that the integral of a convergent series ... is equal to the sum of the integrals of the individual terms, and Mr. Weierstrass was the first to observe ...

Heine: *Ueber trigonometrischen Reihen* (1870)

Nekonečné postupnosti a rady funkcií – ako s nimi zachádzať?

Ak máme konečný počet funkcií $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$, ktoré sú

- spojité, tak ich súčet je spojitá funkcia;
- diferencovateľné, tak ich súčet je funkcia diferencovateľná a platí

$$(\forall x \in I)\ \ (f_1(x) + \cdots + f_n(x))' = f_1'(x) + \cdots + f_n'(x);$$

- $\mathbb{R}$-integrovateľné, tak aj ich súčet je funkcia $\mathbb{R}$-integrovateľná a platí

$$(\mathscr{R}) \int_I (f_1(x) + \cdots + f_n(x))\ \mathrm{d}x = (\mathscr{R}) \int_I f_1(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + (\mathscr{R}) \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Otázka: Má takéto vlastnosti aj súčet nekonečného počtu funkcií?

The following theorem can be found in the work of Mr. Cauchy: "If the various terms of the series $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ are continuous functions, ... then the sum of the series is also a continuous function." But it seems to me that this theorem admits exceptions.

Abel: *Ouevres* (1826)

Where is it proved that one obtains the derivative of an infinite series by taking the derivative of each term?

Abel: *Ouevres* (1826)

Until very recently it was believed, that the integral of a convergent series ... is equal to the sum of the integrals of the individual terms, and Mr. Weierstrass was the first to observe ...

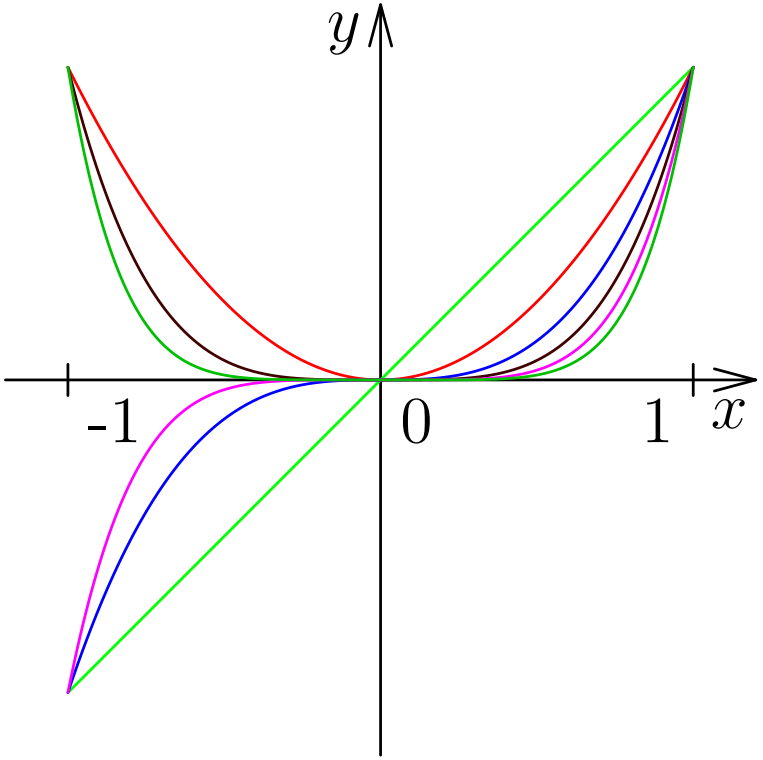
Heine: *Ueber trigonometrischen Reihen* (1870)

Nekonečné postupnosti funkcií

Definícia – funkcionálna postupnosť

Nekonečná postupnosť, ktorej členy sú funkcie, sa nazýva funkcionálna postupnosť, zapisujeme $(f_n(x))_1^\infty = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots\}$.

Príklady: $f_n(x) = x^n,\ x \in (-1, 1)$, $\qquad g_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{nx}{1 + \sin n^2x^2},\ x \in \langle 0, 1\rangle$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

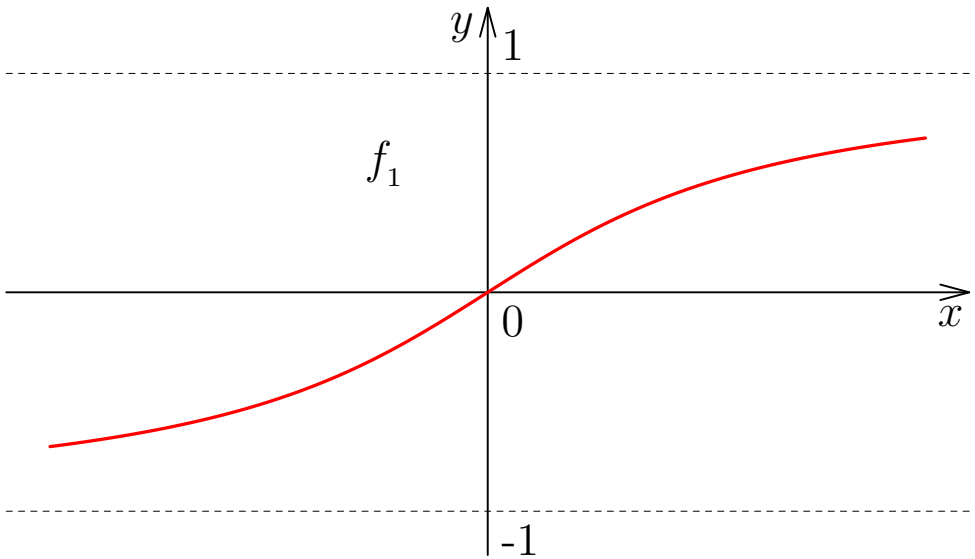
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

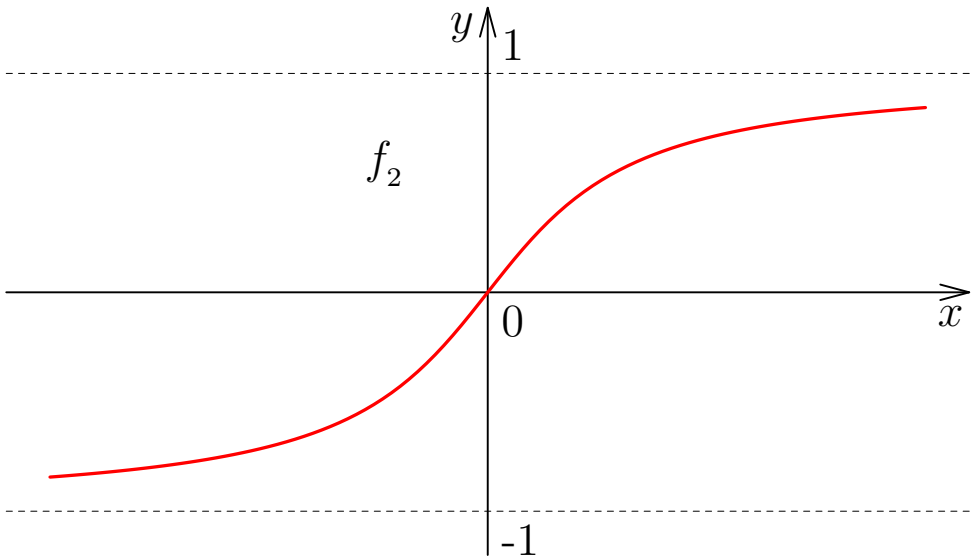
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

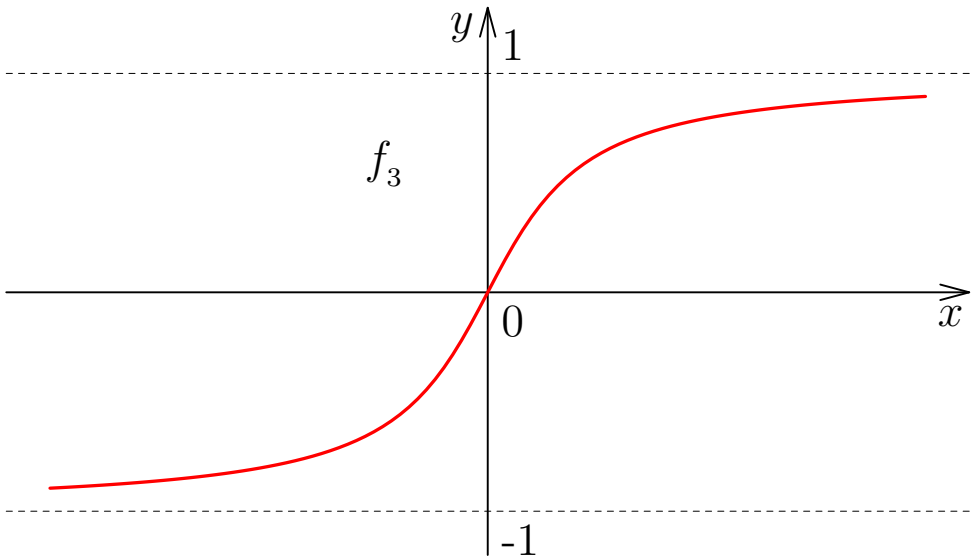
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

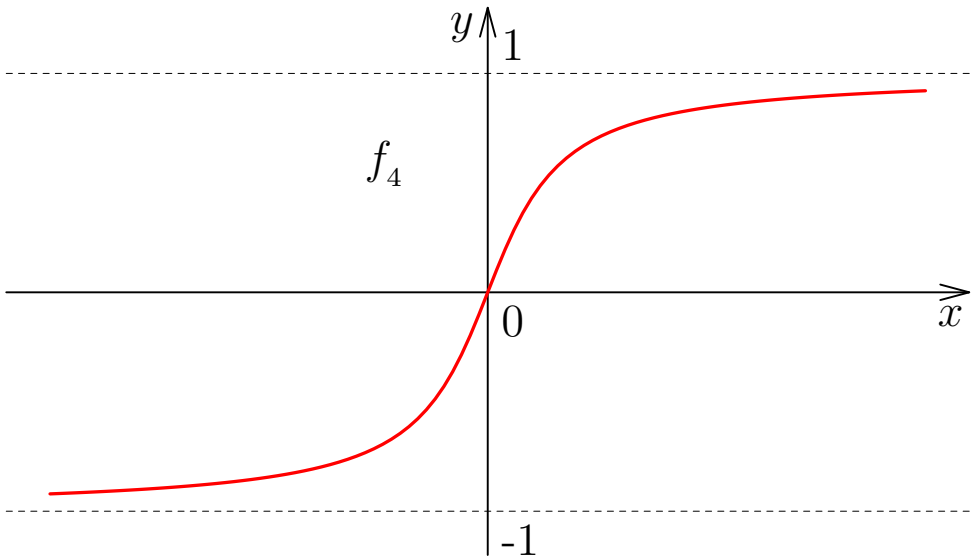
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

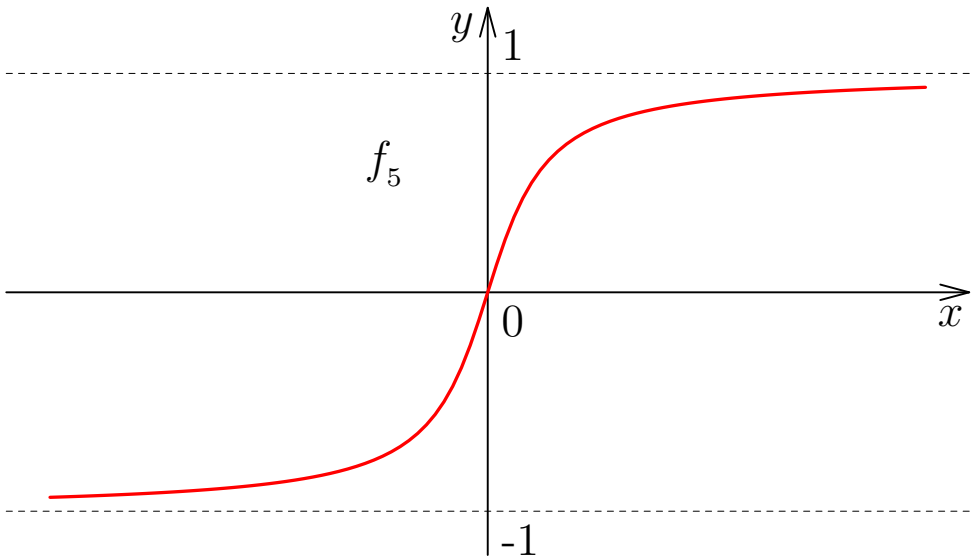
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

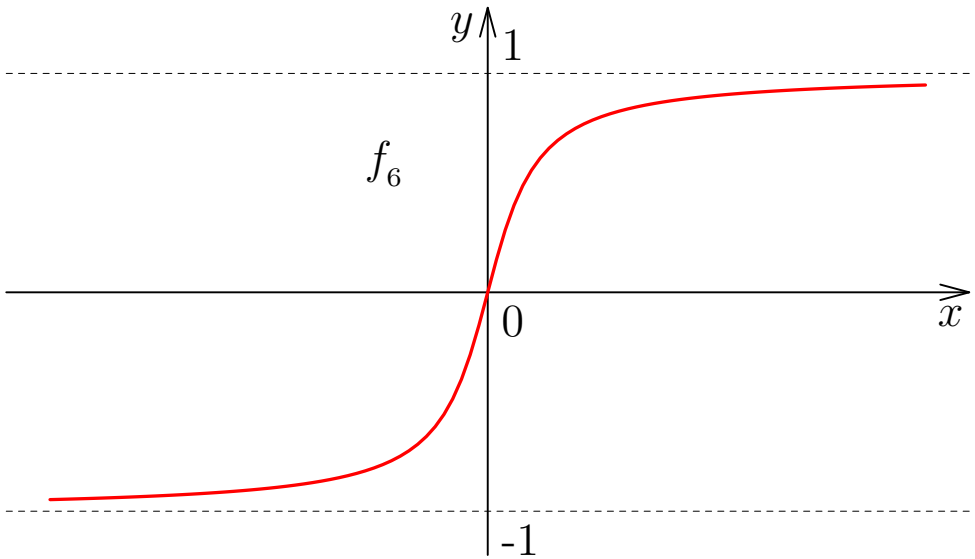
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

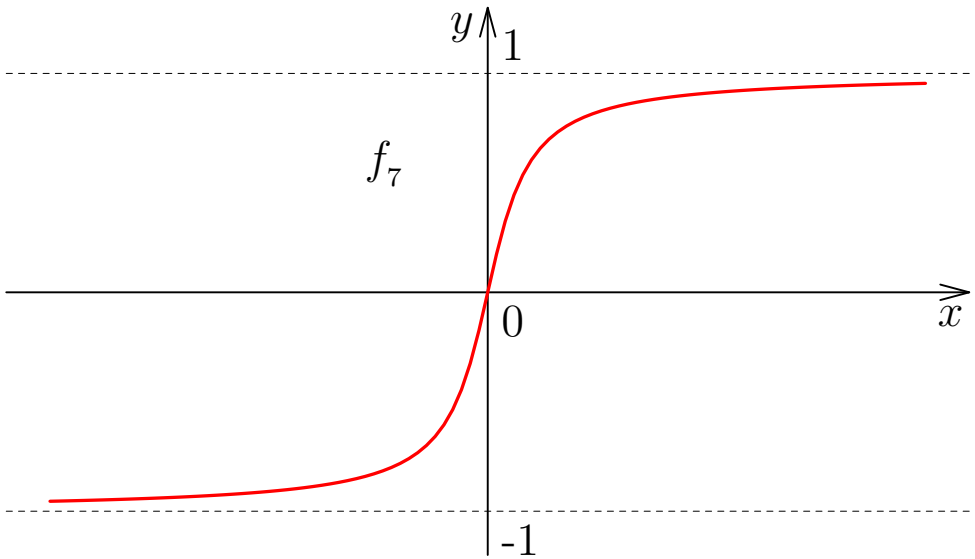
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

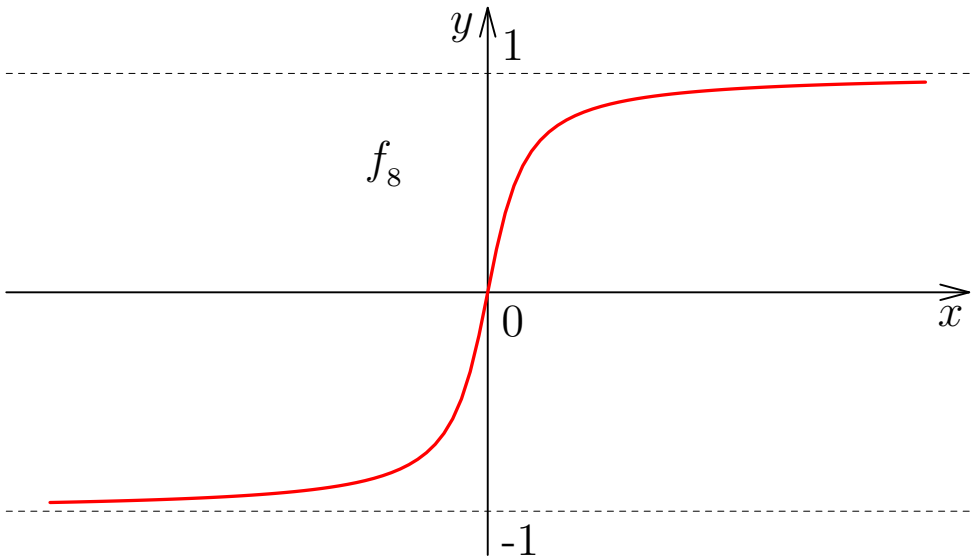
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

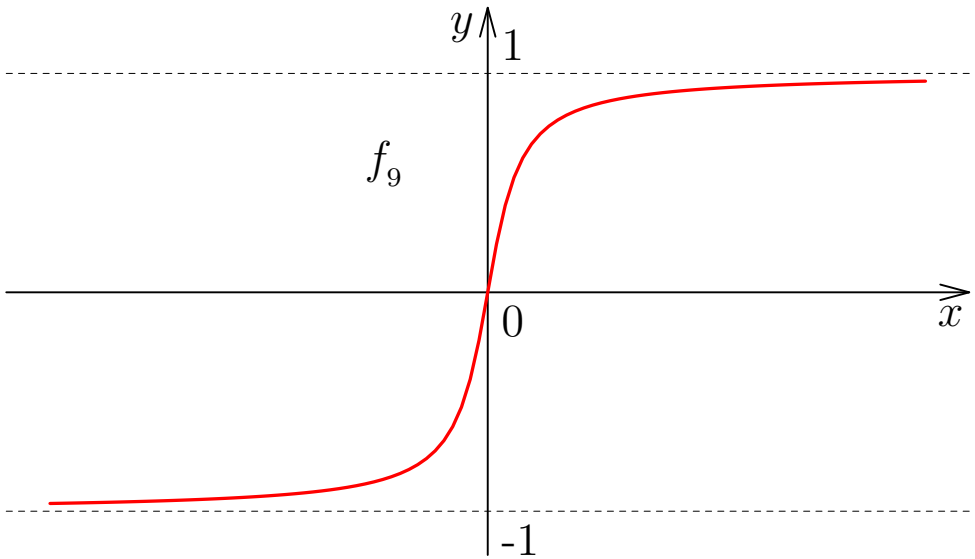
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

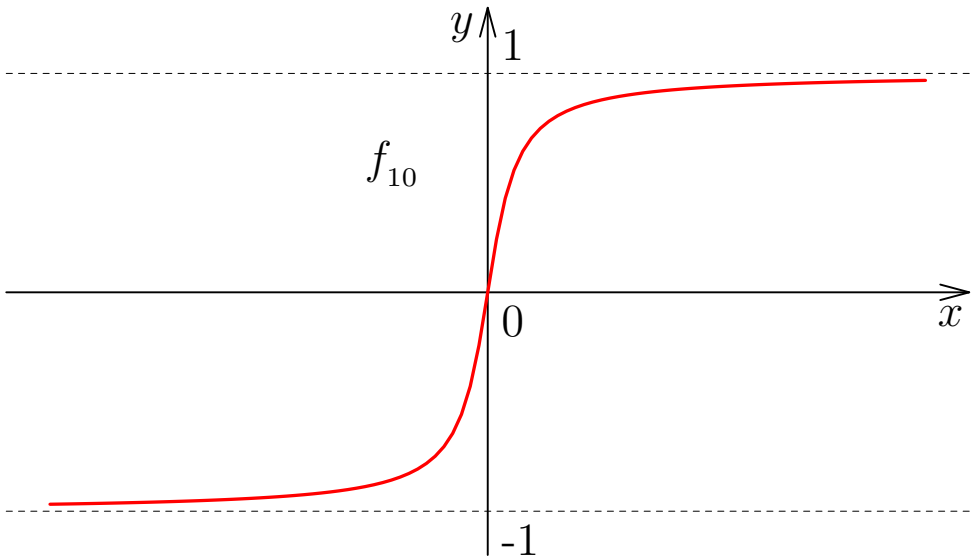
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

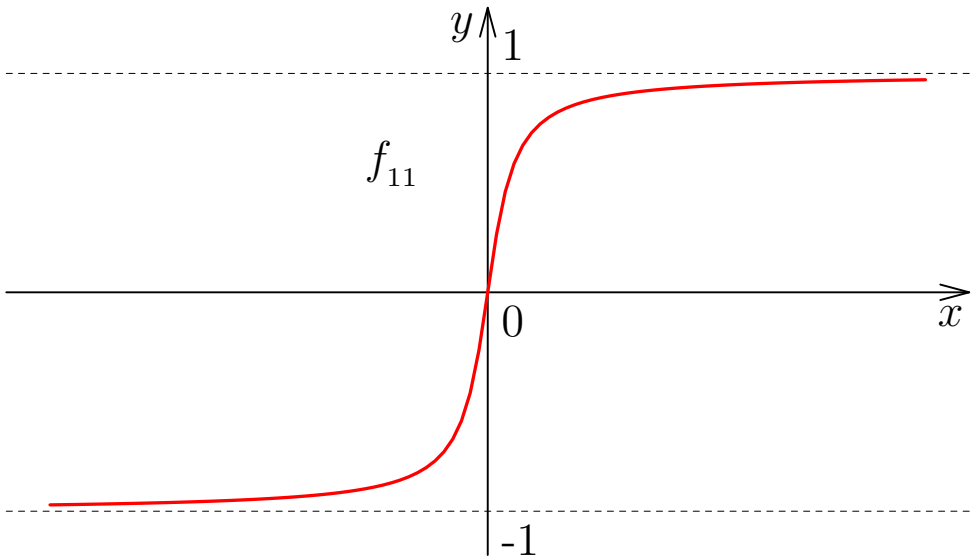
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

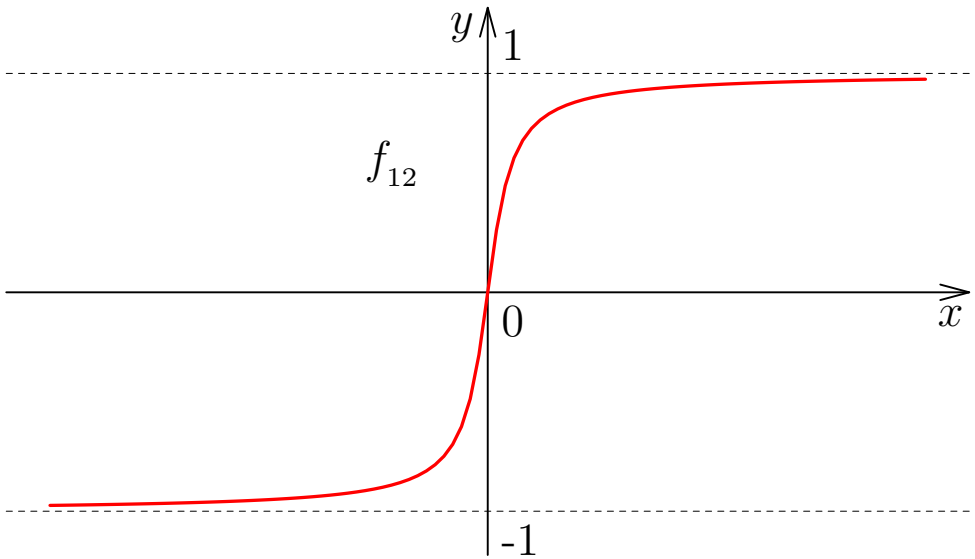
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

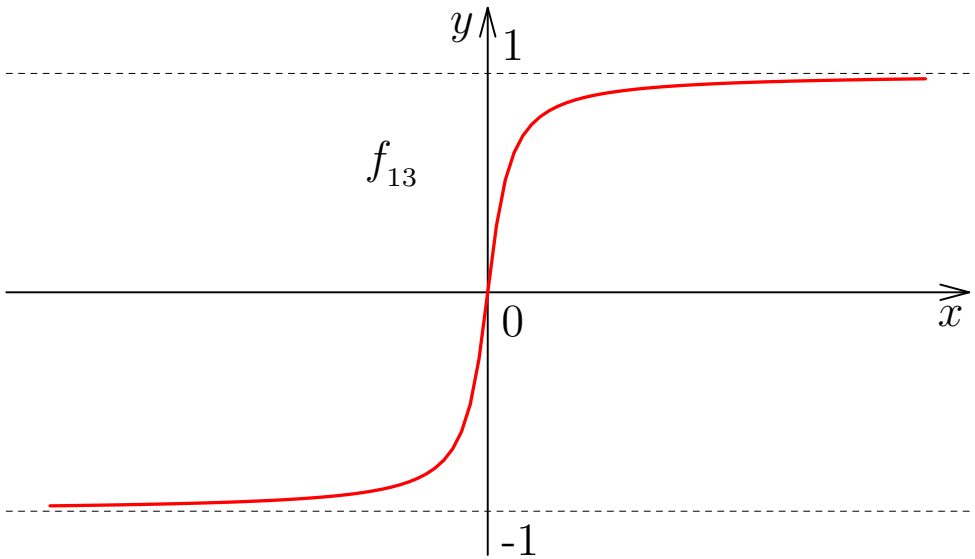
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

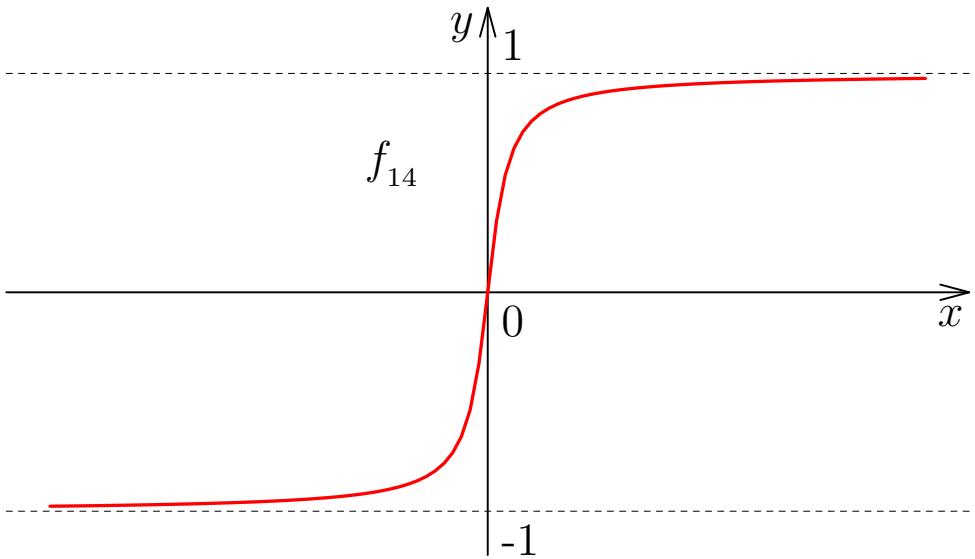
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

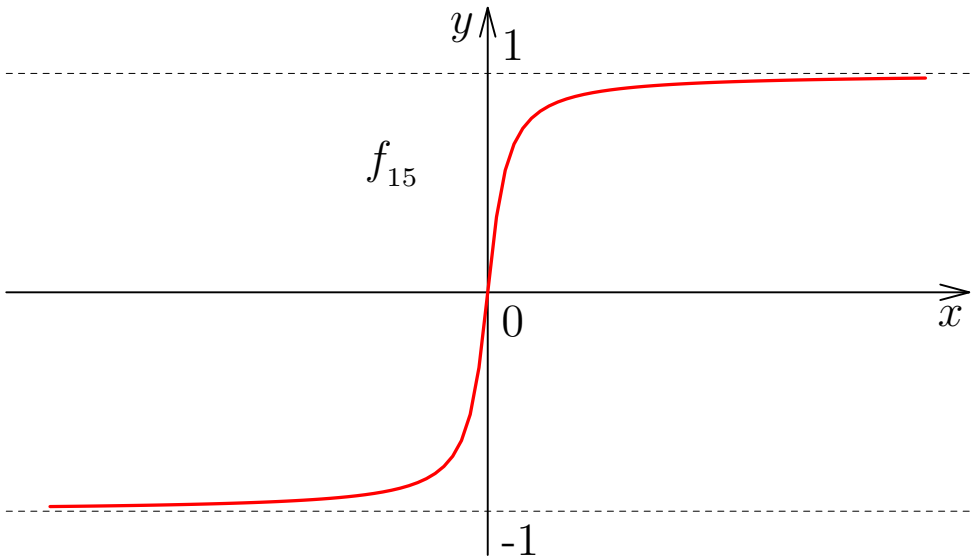
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

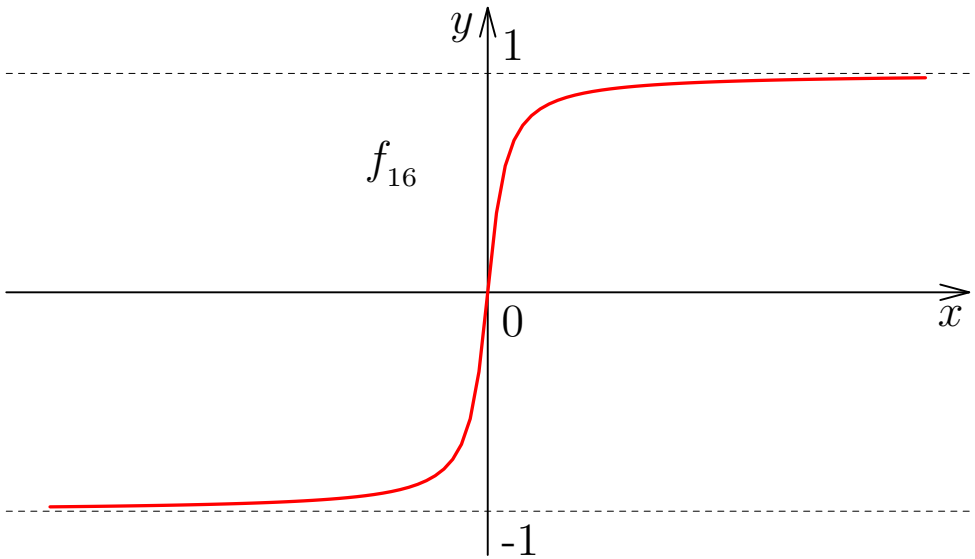
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

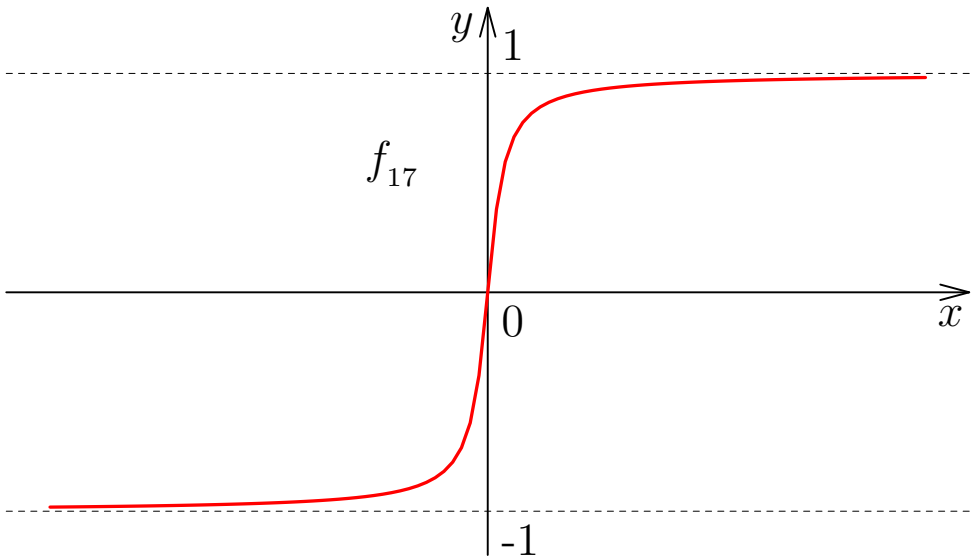
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

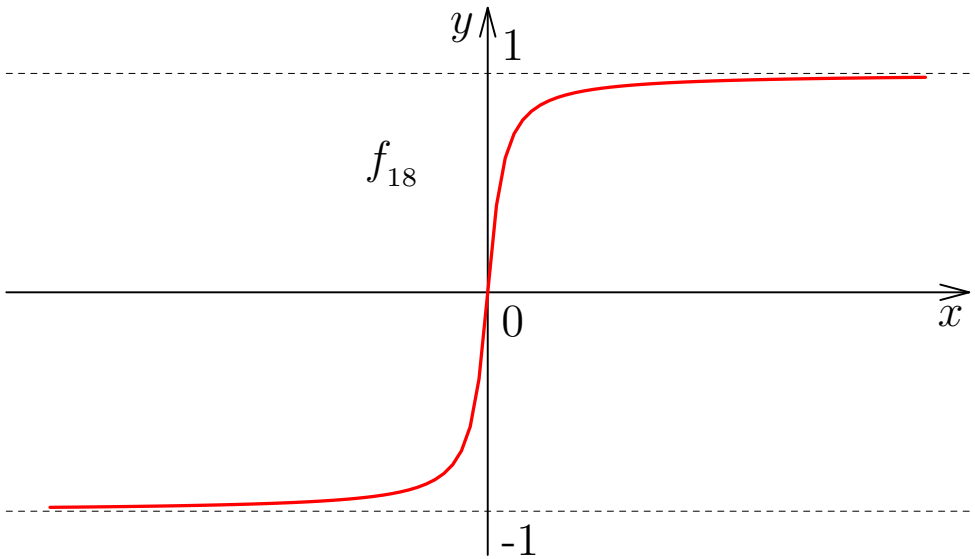
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

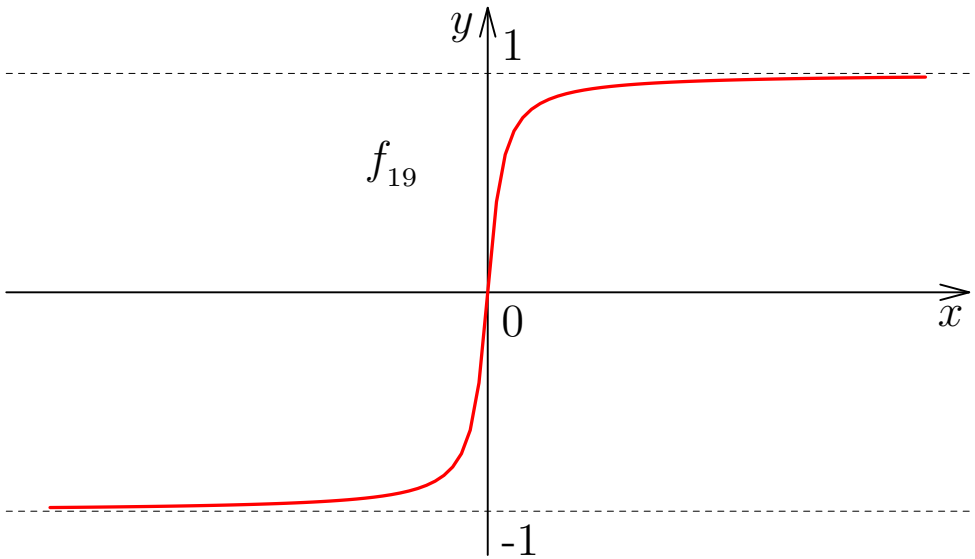
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

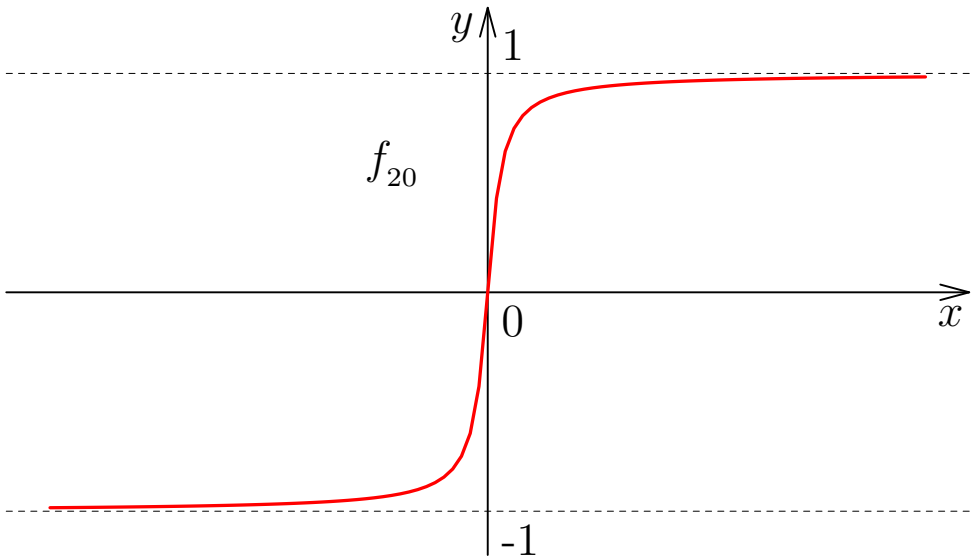
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

Definícia – bodová konvergencia na množine

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $P \subset M$. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje k funkcii f na množine P, akk v každom bode $x \in P$ konverguje číselná postupnosť $(f_n(x))_1^\infty$. Označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pre $x \in P$ alebo $f_n \to_P f$.

Úloha: zapíšte $f_n \to_P f$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big)$$

Poznámka: Najväčšiu množinu, na ktorej postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje, nazývame obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$.

Úloha: Vyšetrite bodovú konvergenciu postupností $(f_n)_1^\infty$ na množine P:

- $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n+1}}$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = n^2 x^n$, $P = \langle 0, 1\rangle$.

Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

Definícia – bodová konvergencia na množine

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $P \subset M$. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje k funkcii f na množine P, akk v každom bode $x \in P$ konverguje číselná postupnosť $(f_n(x))_1^\infty$. Označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pre $x \in P$ alebo $f_n \to_P f$.

Úloha: zapíšte $f_n \to_P f$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big)$$

Poznámka: Najväčšiu množinu, na ktorej postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje, nazývame obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$.

Úloha: Vyšetrite bodovú konvergenciu postupností $(f_n)_1^\infty$ na množine P:

- $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n+1}}$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = n^2 x^n$, $P = \langle 0, 1\rangle$.

Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

Definícia – bodová konvergencia na množine

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $P \subset M$. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje k funkcii f na množine P, akk v každom bode $x \in P$ konverguje číselná postupnosť $(f_n(x))_1^\infty$. Označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pre $x \in P$ alebo $f_n \to_P f$.

Úloha: zapíšte $f_n \to_P f$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big)$$

Poznámka: Najväčšiu množinu, na ktorej postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje, nazývame obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$.

Úloha: Vyšetrite bodovú konvergenciu postupností $(f_n)_1^\infty$ na množine P:

- $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n+1}}$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = n^2 x^n$, $P = \langle 0, 1\rangle$.

Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

Definícia – bodová konvergencia na množine

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $P \subset M$. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje k funkcii f na množine P, akk v každom bode $x \in P$ konverguje číselná postupnosť $(f_n(x))_1^\infty$. Označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pre $x \in P$ alebo $f_n \to_P f$.

Úloha: zapíšte $f_n \to_P f$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big)$$

Poznámka: Najväčšiu množinu, na ktorej postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje, nazývame obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$.

Úloha: Vyšetrite bodovú konvergenciu postupností $(f_n)_1^\infty$ na množine P:

- $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n+1}}$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = n^2 x^n$, $P = \langle 0, 1\rangle$.

Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

Definícia – bodová konvergencia na množine

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $P \subset M$. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje k funkcii f na množine P, akk v každom bode $x \in P$ konverguje číselná postupnosť $(f_n(x))_1^\infty$. Označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pre $x \in P$ alebo $f_n \to_P f$.

Úloha: zapíšte $f_n \to_P f$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big)$$

Poznámka: Najväčšiu množinu, na ktorej postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje, nazývame obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$.

Úloha: Vyšetrite bodovú konvergenciu postupností $(f_n)_1^\infty$ na množine P:

- $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n+1}}$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = n^2 x^n$, $P = \langle 0, 1\rangle$.

Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

Definícia – bodová konvergencia na množine

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $P \subset M$. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje k funkcii f na množine P, akk v každom bode $x \in P$ konverguje číselná postupnosť $(f_n(x))_1^\infty$. Označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pre $x \in P$ alebo $f_n \to_P f$.

Úloha: zapíšte $f_n \to_P f$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big)$$

Poznámka: Najväčšiu množinu, na ktorej postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje, nazývame obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$.

Úloha: Vyšetrite bodovú konvergenciu postupností $(f_n)_1^\infty$ na množine P:

- $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n+1}}$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = n^2 x^n$, $P = \langle 0, 1\rangle$.

Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

Definícia – bodová konvergencia na množine

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $P \subset M$. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje k funkcii f na množine P, akk v každom bode $x \in P$ konverguje číselná postupnosť $(f_n(x))_1^\infty$. Označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pre $x \in P$ alebo $f_n \to_P f$.

Úloha: zapíšte $f_n \to_P f$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big)$$

Poznámka: Najväčšiu množinu, na ktorej postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje, nazývame obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$.

Úloha: Vyšetrite bodovú konvergenciu postupností $(f_n)_1^\infty$ na množine P:

- $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n+1}}$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = n^2 x^n$, $P = \langle 0, 1\rangle$.