Matematická analýza III.

(prezentácia k prednáške MAN2c/10)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MAN2c.html
Prednáška 11

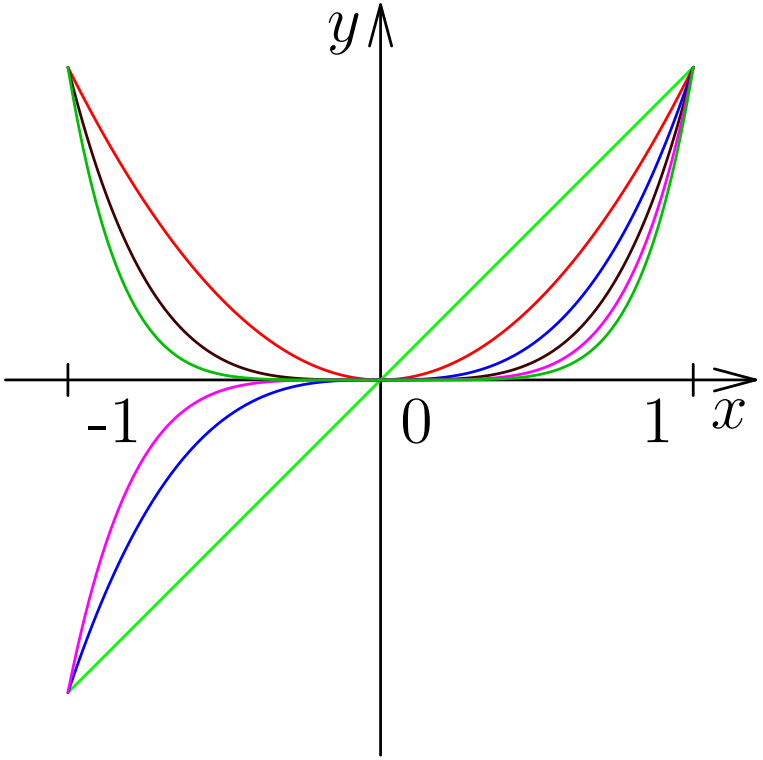
8. decembra 2023

Nekonečné postupnosti funkcií

Definícia – funkcionálna postupnosť

Nekonečná postupnosť, ktorej členy sú funkcie, sa nazýva funkcionálna postupnosť, zapisujeme $(f_n(x))_1^\infty = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots\}$.

Príklady: $f_n(x) = x^n,\ x \in (-1, 1)$, $\quad g_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{nx}{1 + \sin n^2x^2},\ x \in \langle 0, 1\rangle$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

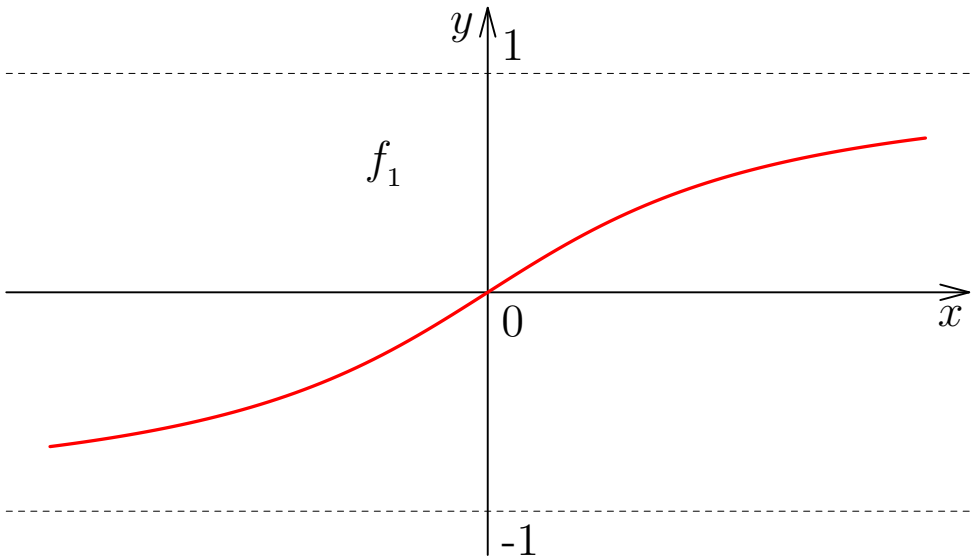
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

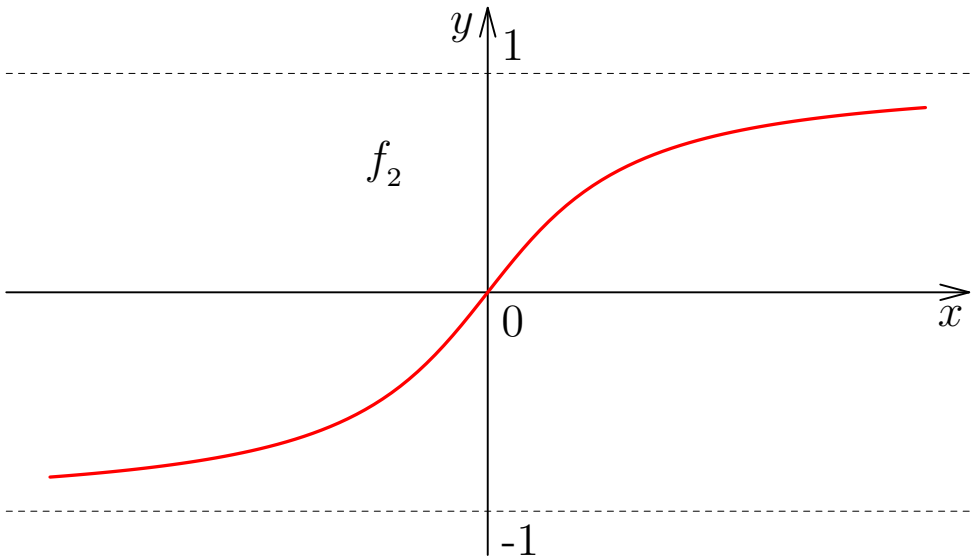
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

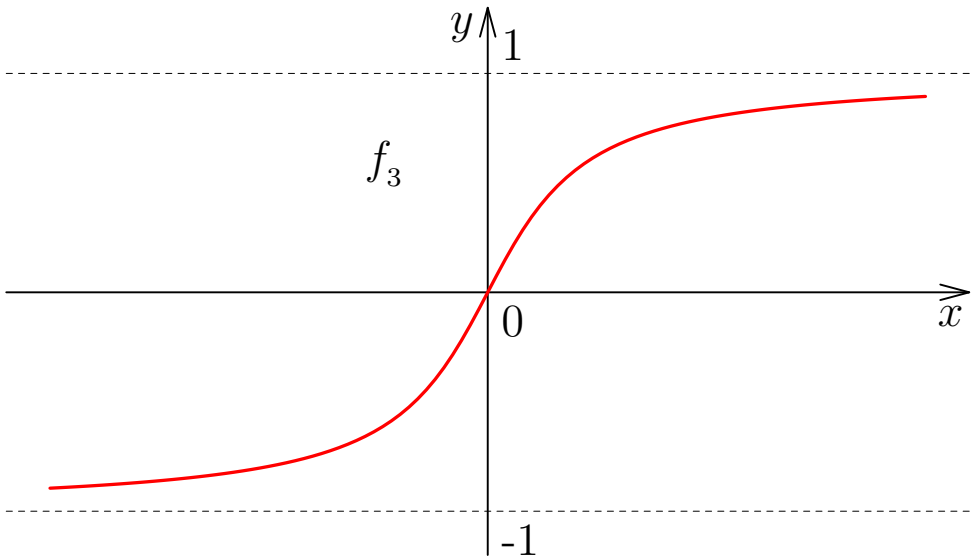
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

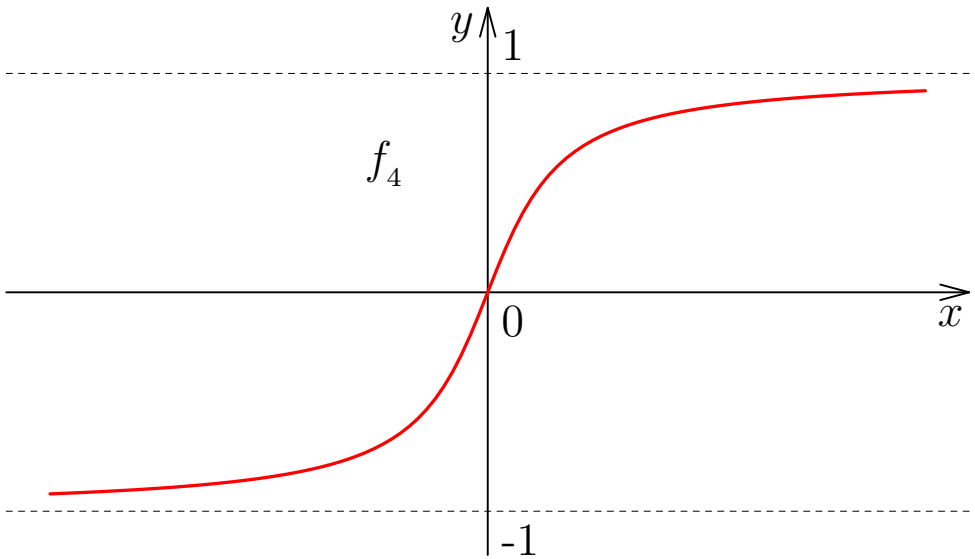
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

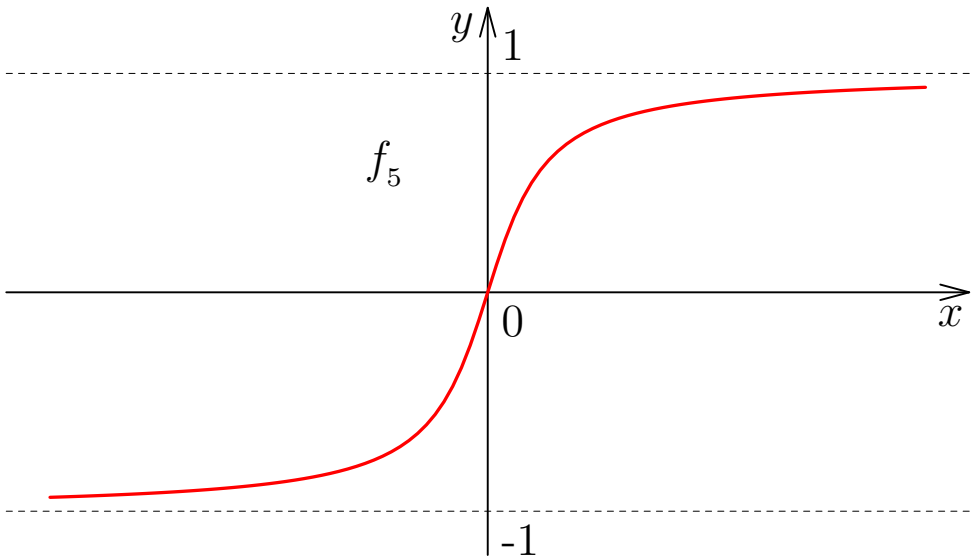
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

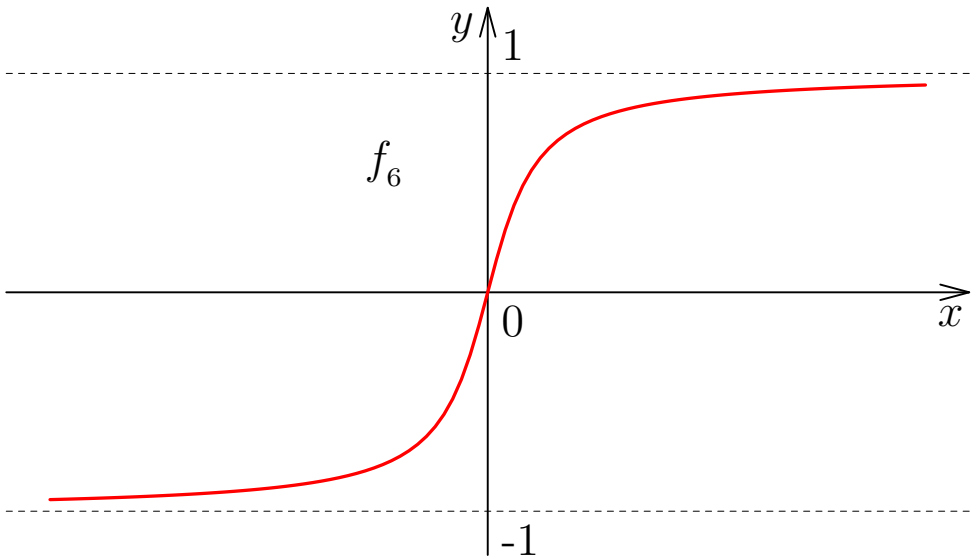
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

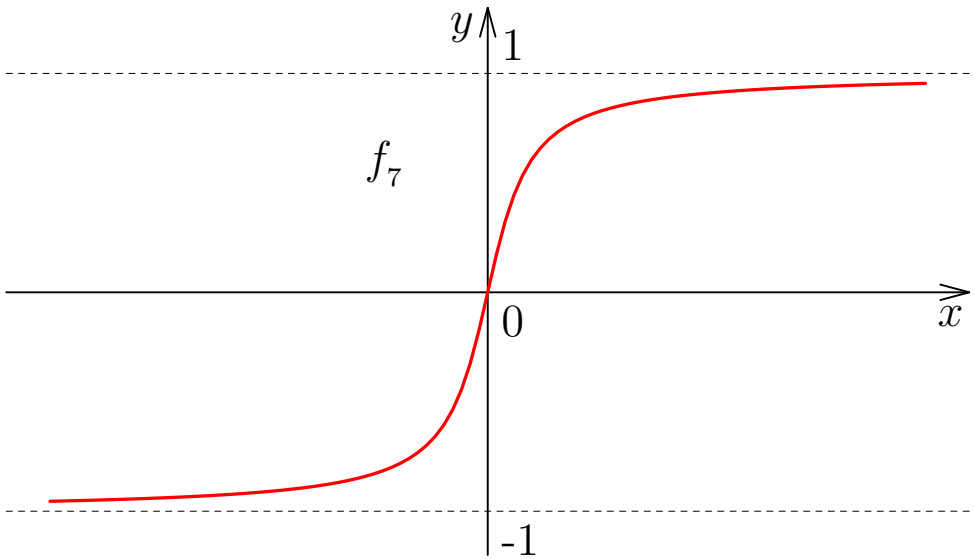
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

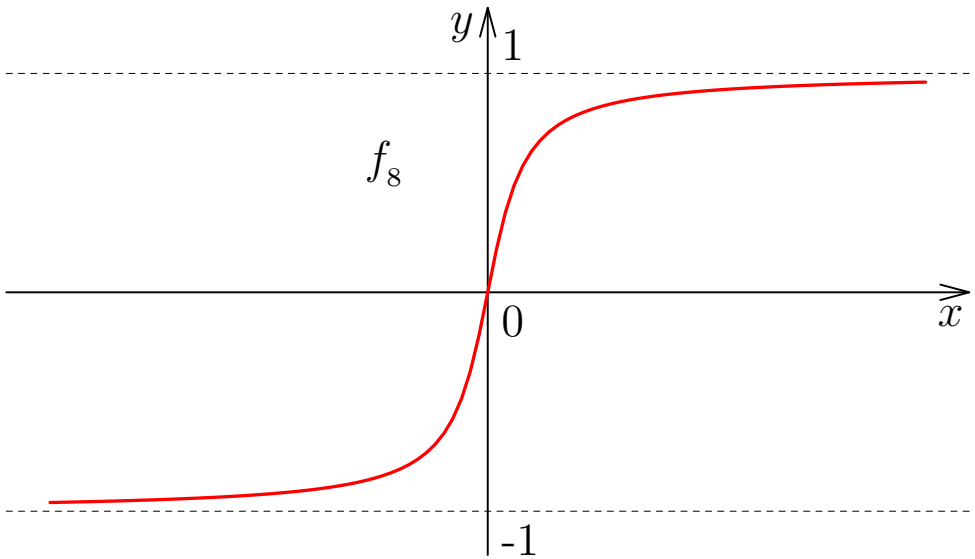
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

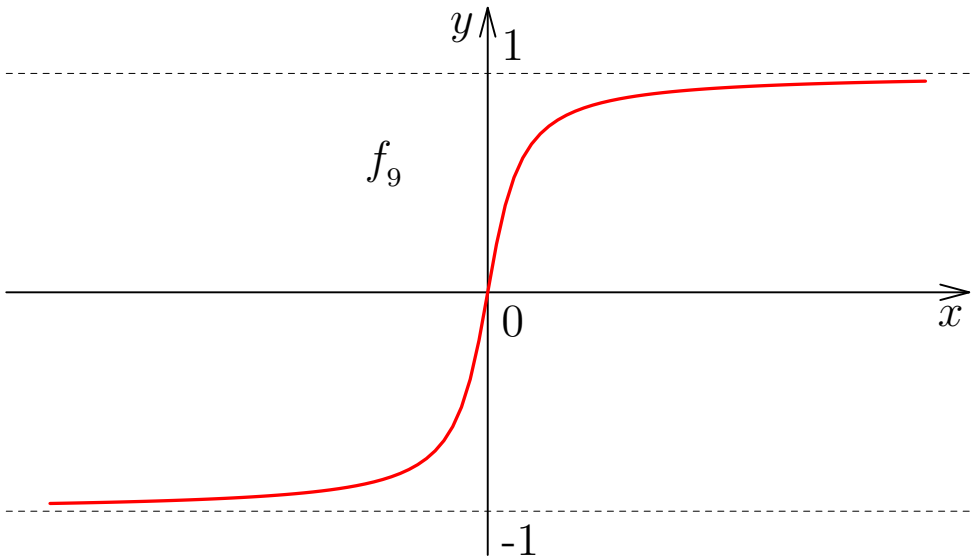
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

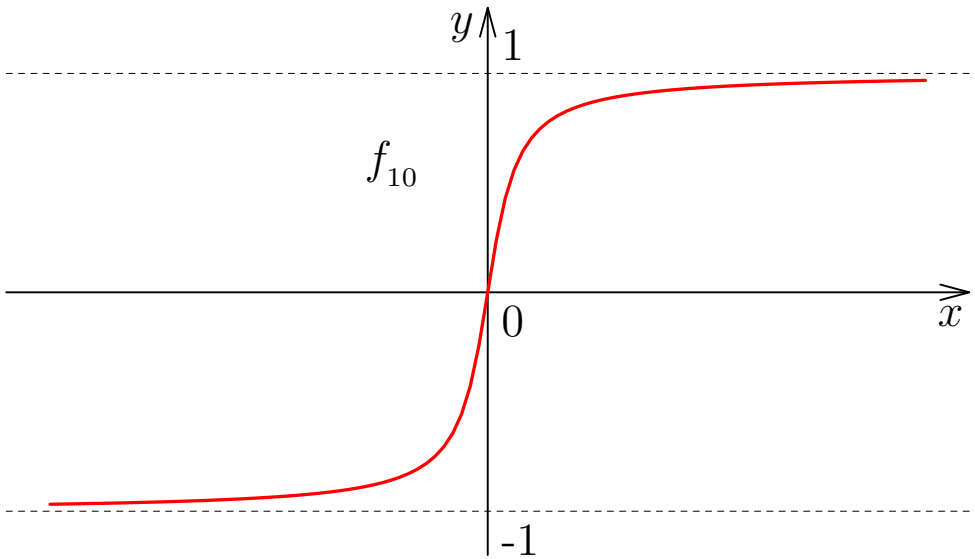
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

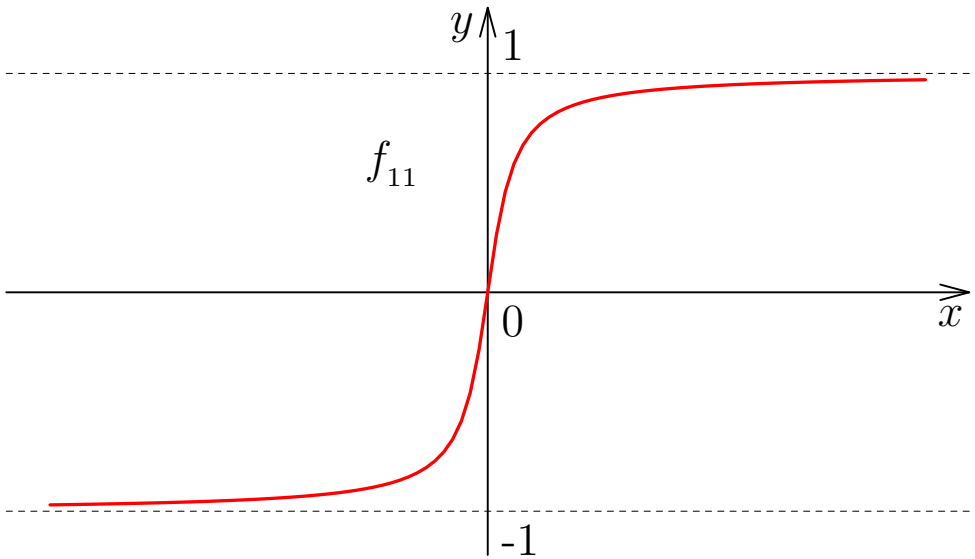
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

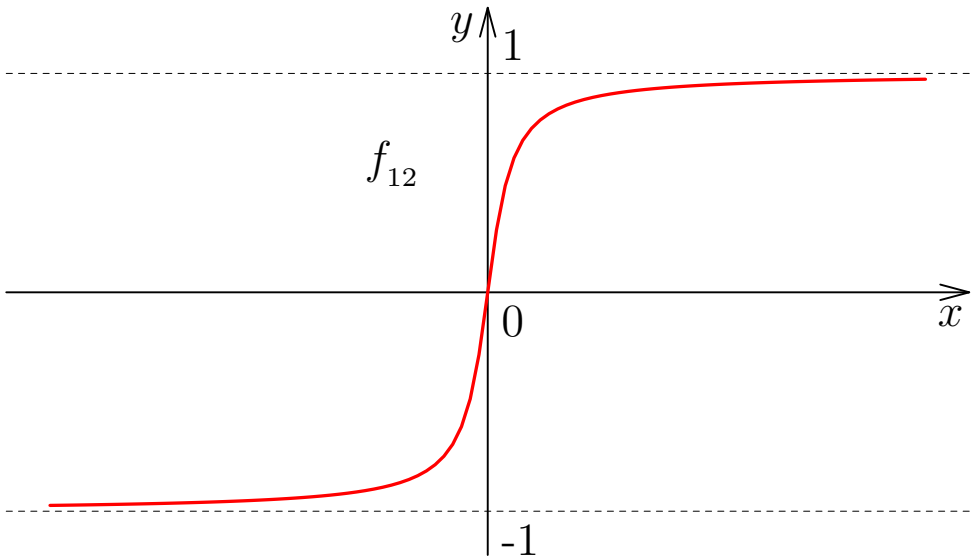
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

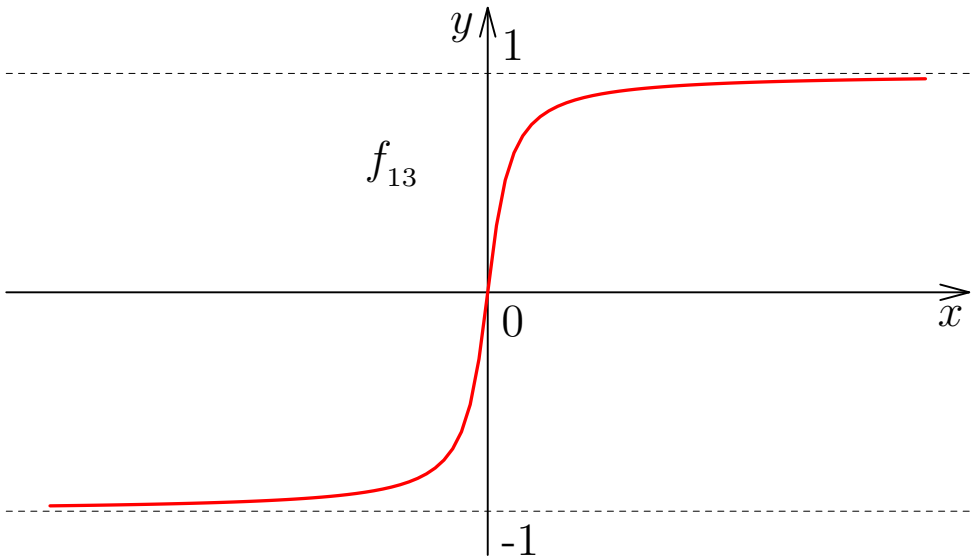
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

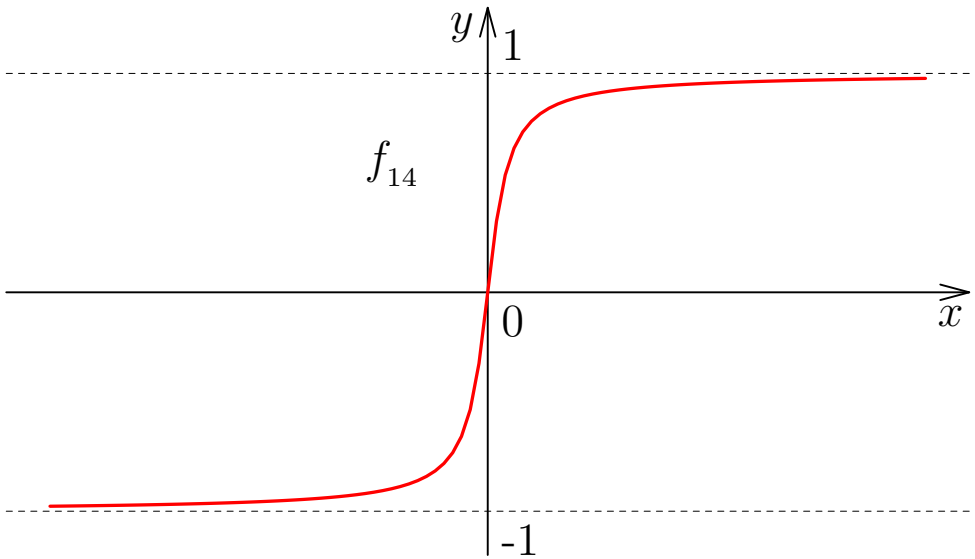
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

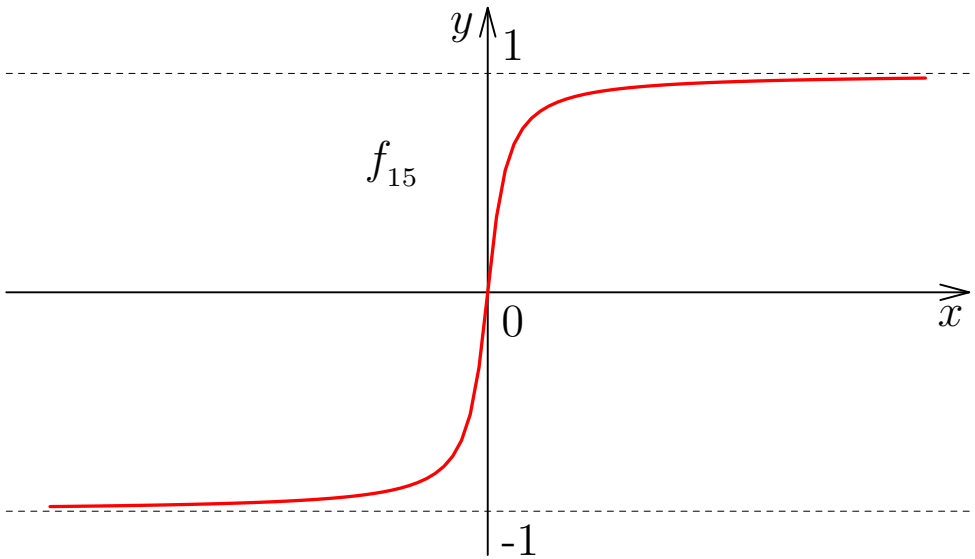
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

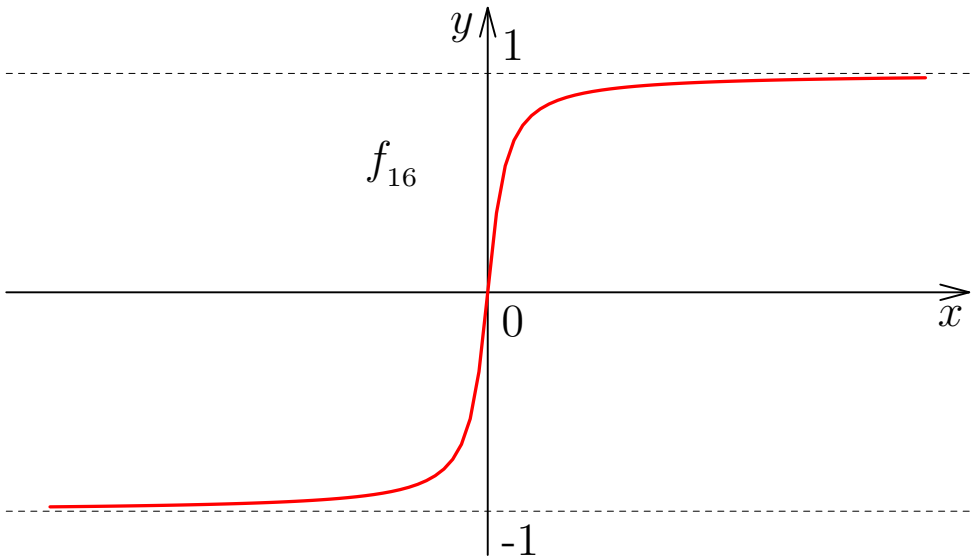
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

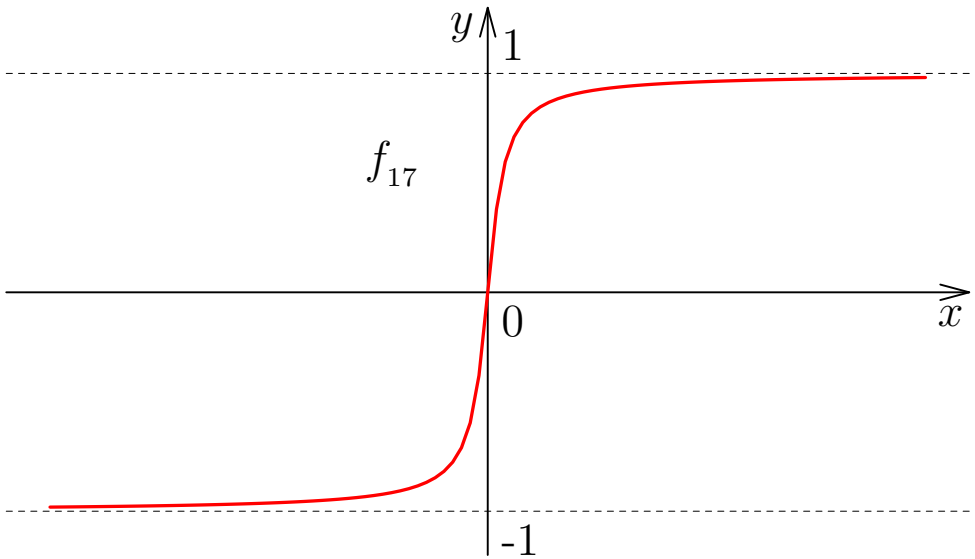
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

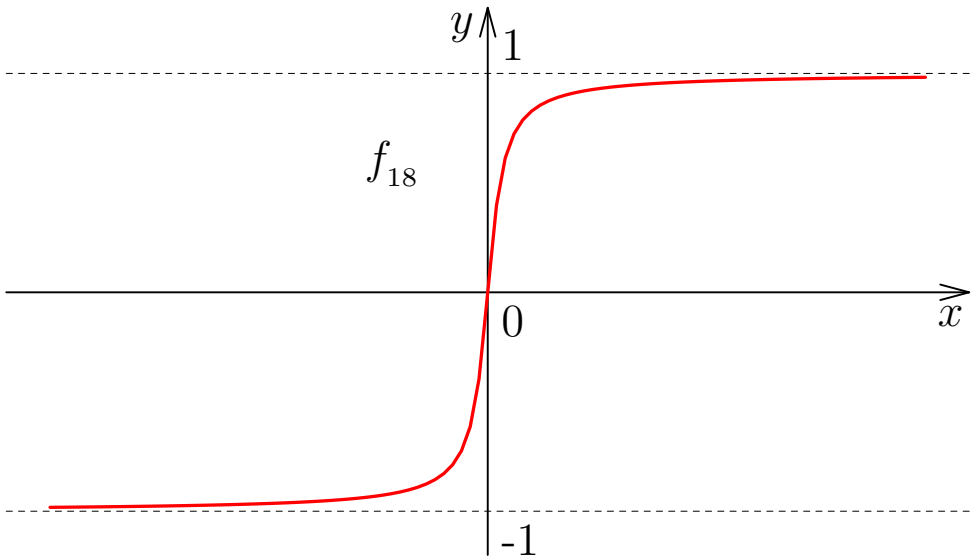
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

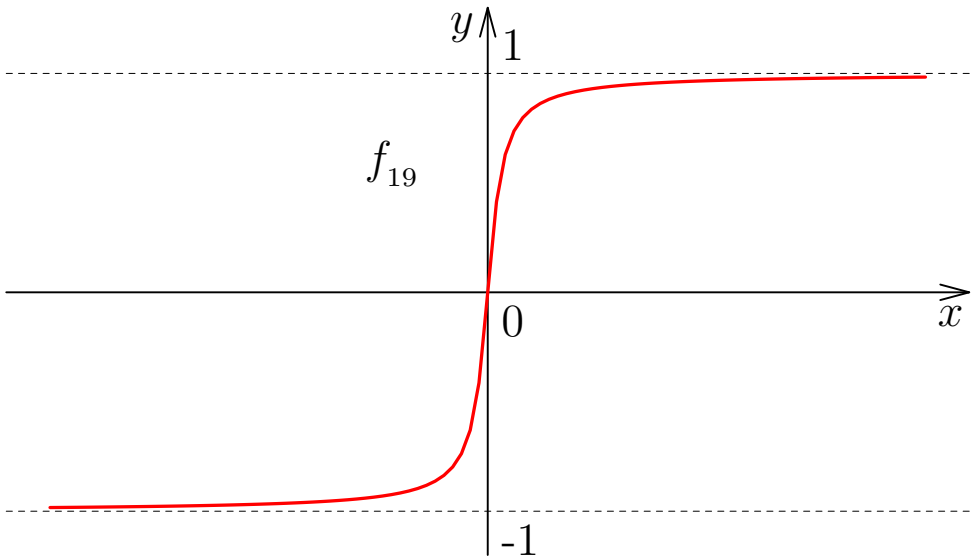
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

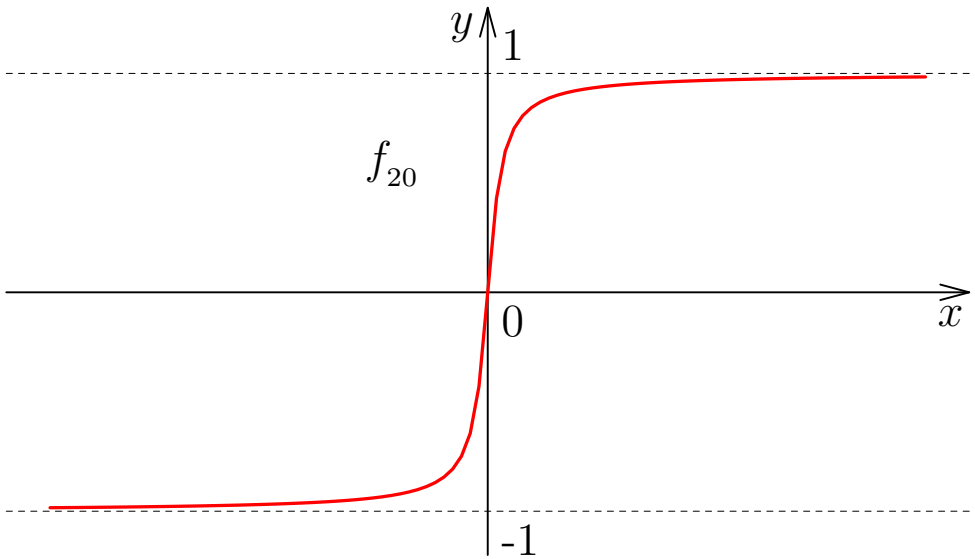
Definícia – bodová konvergencia postupnosti funkcií

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $x_0 \in M$ je ľubovoľné. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0, akk číselná postupnosť $(f_n(x_0))_1^\infty$ je konvergentná.

Úloha: zapíšte $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode x_0 ako kvantifikovaný výrok!

$$(\exists a = a(x_0) \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x_0) - a| < \varepsilon\Big)$$

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$ v bode $x_0 = 1$



Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

Definícia – bodová konvergencia na množine

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $P \subset M$. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje k funkcii f na množine P, akk v každom bode $x \in P$ konverguje číselná postupnosť $(f_n(x))_1^\infty$. Označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pre $x \in P$ alebo $f_n \to_P f$.

Úloha: zapíšte $f_n \to_P f$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big)$$

Poznámka: Najväčšiu množinu, na ktorej postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje, nazývame obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$.

Úloha: Vyšetrite bodovú konvergenciu postupností $(f_n)_1^\infty$ na množine P:

- $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n+1}}$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = n^2 x^n$, $P = \langle 0, 1\rangle$.

Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

Definícia – bodová konvergencia na množine

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $P \subset M$. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje k funkcii f na množine P, akk v každom bode $x \in P$ konverguje číselná postupnosť $(f_n(x))_1^\infty$. Označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pre $x \in P$ alebo $f_n \to_P f$.

Úloha: zapíšte $f_n \to_P f$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big)$$

Poznámka: Najväčšiu množinu, na ktorej postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje, nazývame obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$.

Úloha: Vyšetrite bodovú konvergenciu postupností $(f_n)_1^\infty$ na množine P:

- $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n+1}}$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = n^2 x^n$, $P = \langle 0, 1\rangle$.

Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

Definícia – bodová konvergencia na množine

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $P \subset M$. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje k funkcii f na množine P, akk v každom bode $x \in P$ konverguje číselná postupnosť $(f_n(x))_1^\infty$. Označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pre $x \in P$ alebo $f_n \to_P f$.

Úloha: zapíšte $f_n \to_P f$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big)$$

Poznámka: Najväčšiu množinu, na ktorej postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje, nazývame obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$.

Úloha: Vyšetrite bodovú konvergenciu postupností $(f_n)_1^\infty$ na množine P:

- $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n+1}}$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = n^2 x^n$, $P = \langle 0, 1\rangle$.

Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

Definícia – bodová konvergencia na množine

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $P \subset M$. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje k funkcii f na množine P, akk v každom bode $x \in P$ konverguje číselná postupnosť $(f_n(x))_1^\infty$. Označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pre $x \in P$ alebo $f_n \to_P f$.

Úloha: zapíšte $f_n \to_P f$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big)$$

Poznámka: Najväčšiu množinu, na ktorej postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje, nazývame obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$.

Úloha: Vyšetrite bodovú konvergenciu postupností $(f_n)_1^\infty$ na množine P:

- $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n+1}}$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = n^2 x^n$, $P = \langle 0, 1\rangle$.

Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

Definícia – bodová konvergencia na množine

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $P \subset M$. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje k funkcii f na množine P, akk v každom bode $x \in P$ konverguje číselná postupnosť $(f_n(x))_1^\infty$. Označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pre $x \in P$ alebo $f_n \to_P f$.

Úloha: zapíšte $f_n \to_P f$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big)$$

Poznámka: Najväčšiu množinu, na ktorej postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje, nazývame obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$.

Úloha: Vyšetrite bodovú konvergenciu postupností $(f_n)_1^\infty$ na množine P:

- $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n+1}}$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = n^2 x^n$, $P = \langle 0, 1\rangle$.

Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

Definícia – bodová konvergencia na množine

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $P \subset M$. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje k funkcii f na množine P, akk v každom bode $x \in P$ konverguje číselná postupnosť $(f_n(x))_1^\infty$. Označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pre $x \in P$ alebo $f_n \to_P f$.

Úloha: zapíšte $f_n \to_P f$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big)$$

Poznámka: Najväčšiu množinu, na ktorej postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje, nazývame obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$.

Úloha: Vyšetrite bodovú konvergenciu postupností $(f_n)_1^\infty$ na množine P:

- $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n+1}}$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = n^2 x^n$, $P = \langle 0, 1\rangle$.

Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

Definícia – bodová konvergencia na množine

Nech $(f_n)_1^\infty$ je postupnosť funkcií definovaných na množine M a $P \subset M$. Hovoríme, že postupnosť $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje k funkcii f na množine P, akk v každom bode $x \in P$ konverguje číselná postupnosť $(f_n(x))_1^\infty$. Označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pre $x \in P$ alebo $f_n \to_P f$.

Úloha: zapíšte $f_n \to_P f$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big)$$

Poznámka: Najväčšiu množinu, na ktorej postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ bodovo konverguje, nazývame obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$.

Úloha: Vyšetrite bodovú konvergenciu postupností $(f_n)_1^\infty$ na množine P:

- $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n+1}}$, $P = \mathbb{R}$;
- $f_n(x) = n^2 x^n$, $P = \langle 0, 1\rangle$.

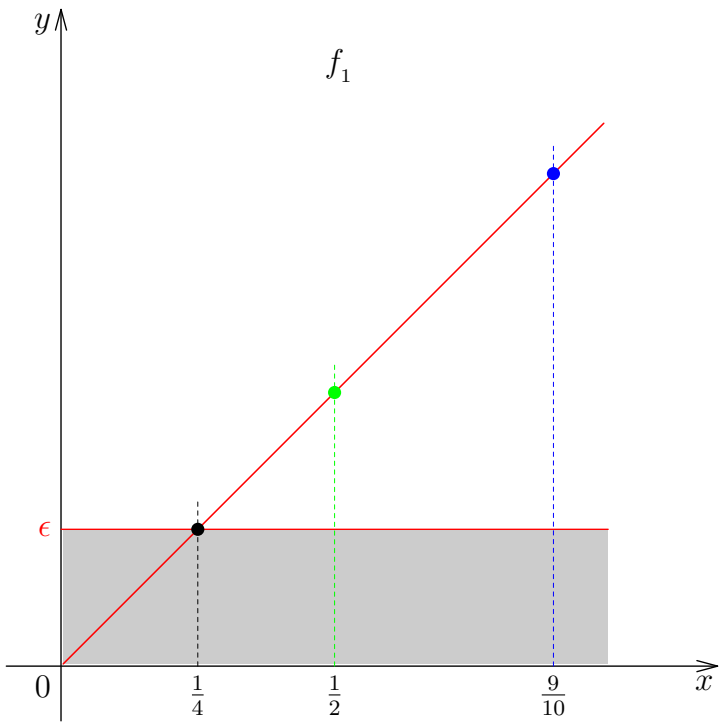
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



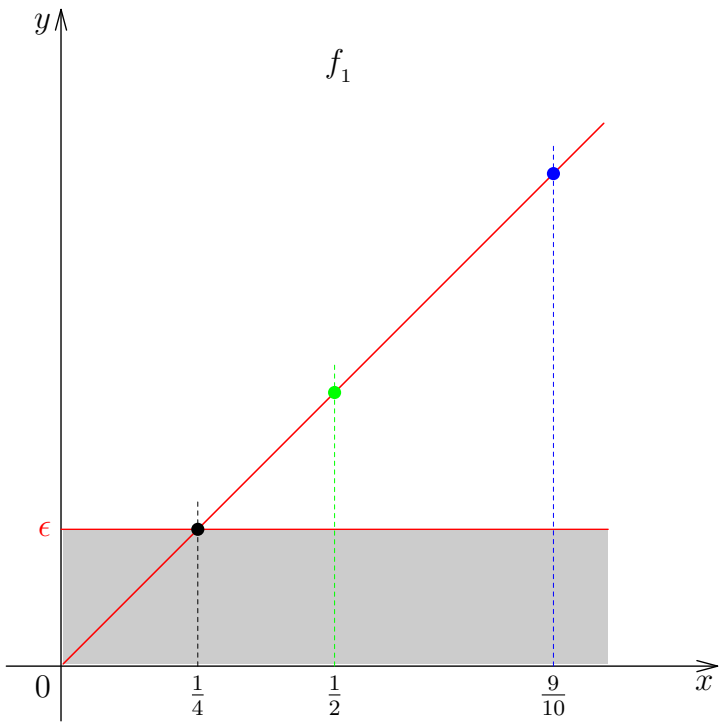
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



Zrejme $f_n(x_0) \longrightarrow 0$ pre $x_0 \in \langle 0, 1)$ a $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$. Zvoľme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom

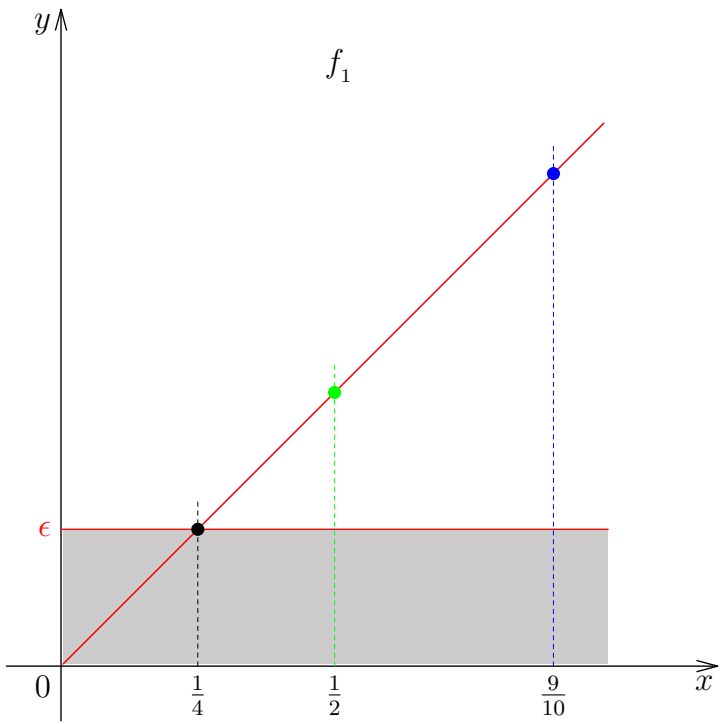
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



Zrejme $f_n(x_0) \to 0$ pre $x_0 \in \langle 0, 1)$ a $f_n(1) = 1 \to 1$. Zvoľme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom

- pre $x_0 = \frac{1}{4}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{4}) - 0\right| = (\frac{1}{4})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 2 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{1}{2}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{2}) - 0\right| = (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 3 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{9}{10}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{9}{10}) - 0\right| = (\frac{9}{10})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 14 = n_0$;

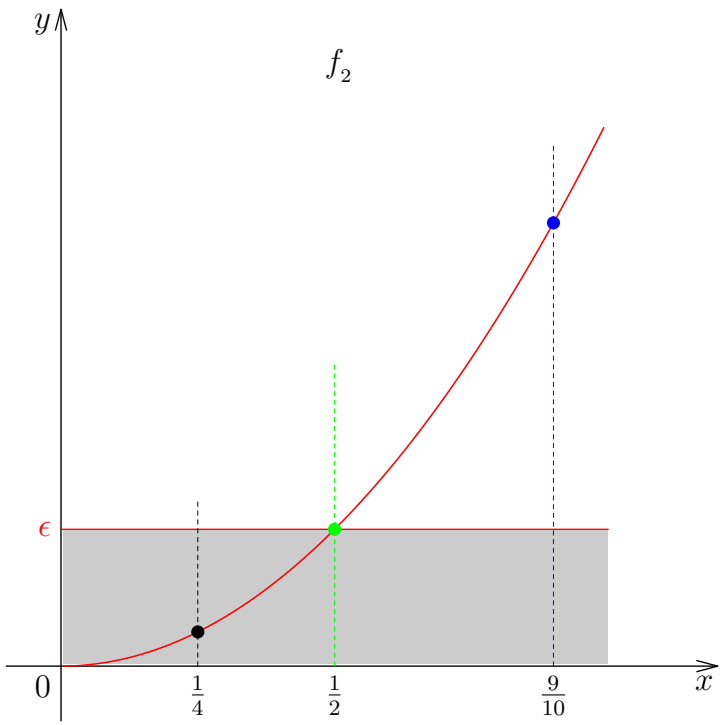
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



Zrejme $f_n(x_0) \longrightarrow 0$ pre $x_0 \in \langle 0, 1)$ a $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$. Zvoľme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom

- pre $x_0 = \frac{1}{4}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{4}) - 0\right| = (\frac{1}{4})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 2 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{1}{2}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{2}) - 0\right| = (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 3 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{9}{10}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{9}{10}) - 0\right| = (\frac{9}{10})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 14 = n_0$;

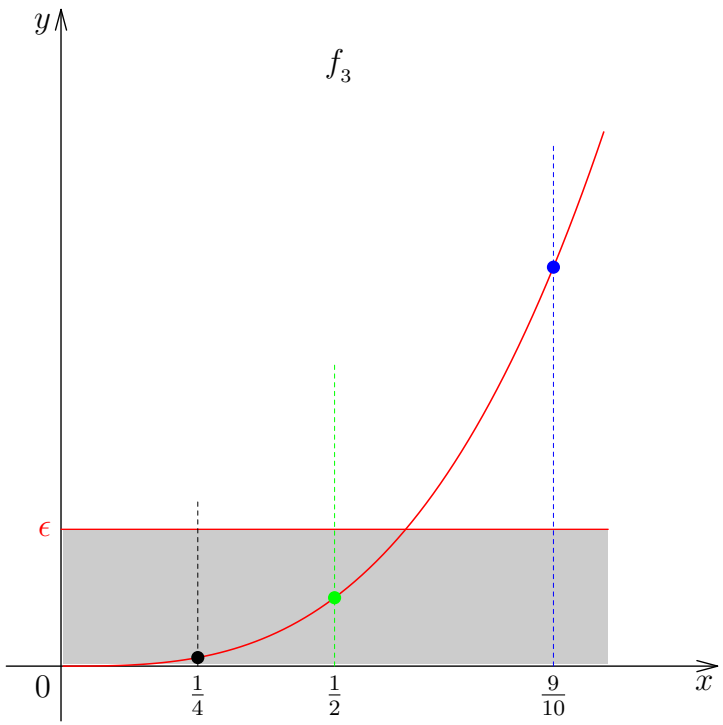
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



Zrejme $f_n(x_0) \longrightarrow 0$ pre $x_0 \in \langle 0, 1)$ a $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$. Zvoľme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom

- pre $x_0 = \frac{1}{4}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{4}) - 0\right| = (\frac{1}{4})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 2 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{1}{2}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{2}) - 0\right| = (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 3 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{9}{10}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{9}{10}) - 0\right| = (\frac{9}{10})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 14 = n_0$;

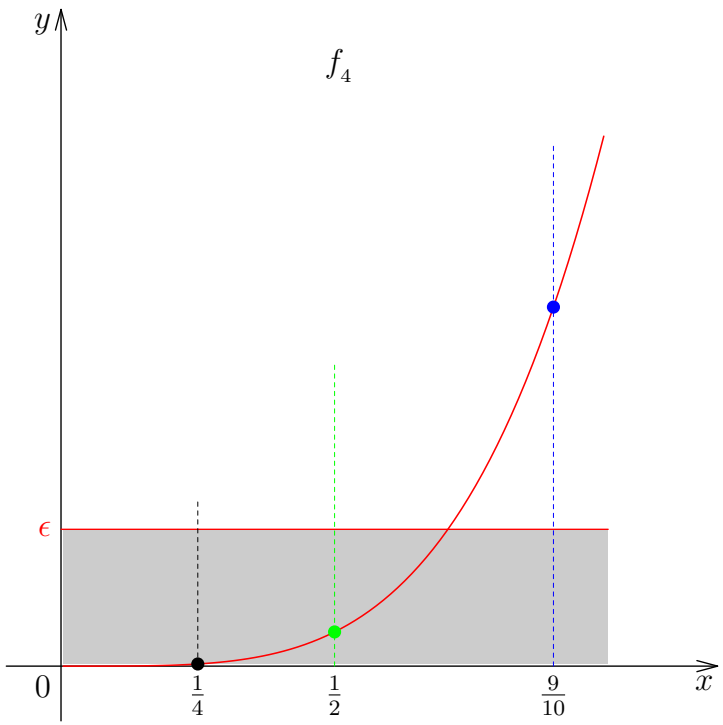
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



Zrejme $f_n(x_0) \longrightarrow 0$ pre $x_0 \in \langle 0, 1)$ a $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$. Zvoľme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom

- pre $x_0 = \frac{1}{4}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{4}) - 0\right| = (\frac{1}{4})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 2 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{1}{2}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{2}) - 0\right| = (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 3 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{9}{10}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{9}{10}) - 0\right| = (\frac{9}{10})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 14 = n_0$;

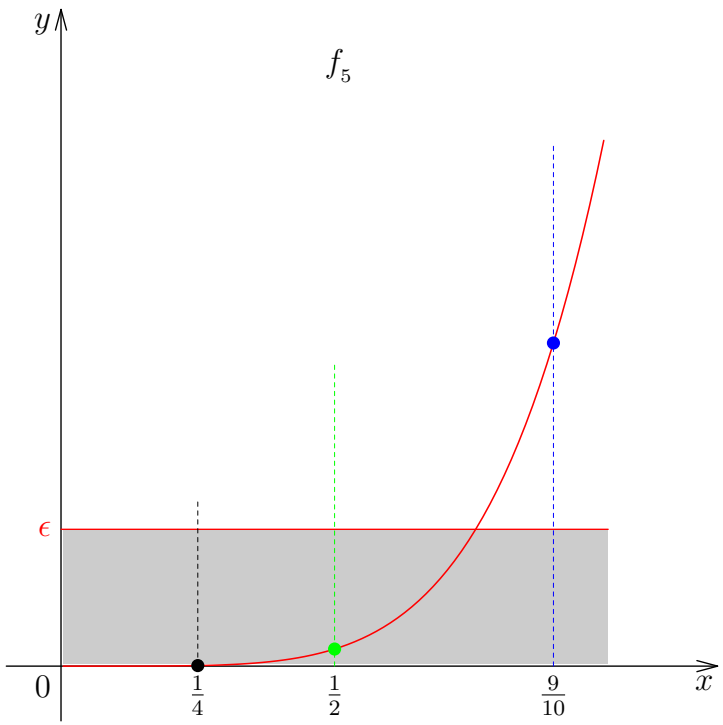
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



Zrejme $f_n(x_0) \longrightarrow 0$ pre $x_0 \in \langle 0, 1)$ a $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$. Zvoľme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom

- pre $x_0 = \frac{1}{4}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{4}) - 0\right| = (\frac{1}{4})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 2 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{1}{2}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{2}) - 0\right| = (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 3 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{9}{10}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{9}{10}) - 0\right| = (\frac{9}{10})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 14 = n_0$;

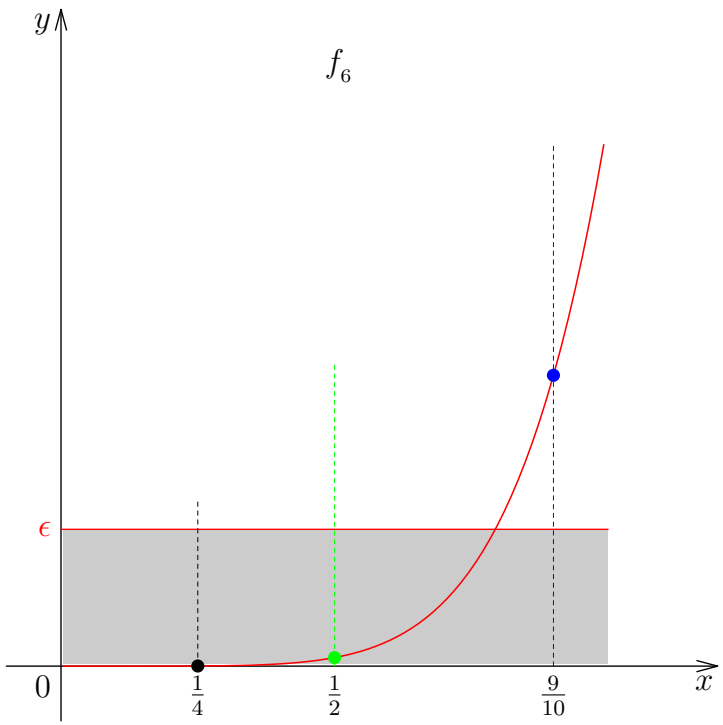
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



Zrejme $f_n(x_0) \longrightarrow 0$ pre $x_0 \in \langle 0, 1)$ a $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$. Zvoľme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom

- pre $x_0 = \frac{1}{4}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{4}) - 0\right| = (\frac{1}{4})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 2 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{1}{2}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{2}) - 0\right| = (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 3 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{9}{10}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{9}{10}) - 0\right| = (\frac{9}{10})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 14 = n_0$;

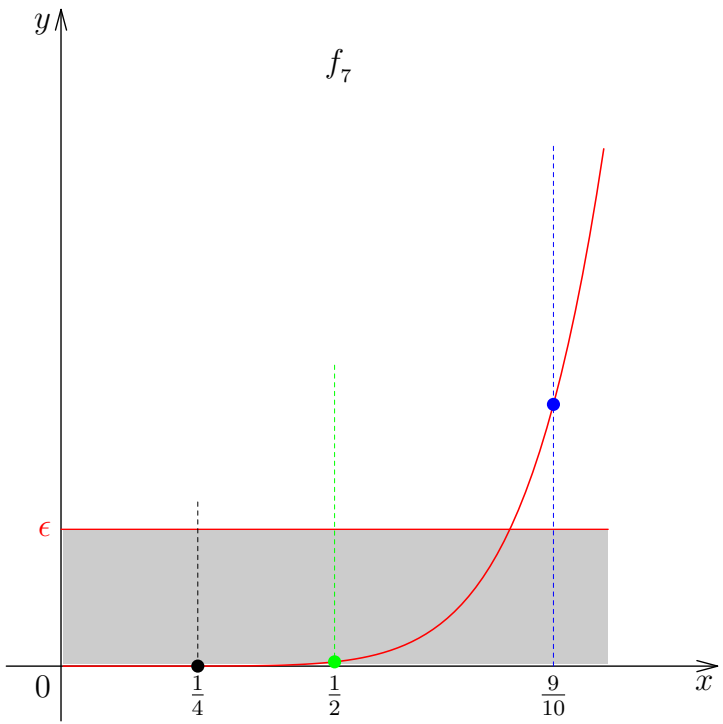
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



Zrejme $f_n(x_0) \longrightarrow 0$ pre $x_0 \in \langle 0, 1)$ a $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$. Zvoľme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom

- pre $x_0 = \frac{1}{4}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{4}) - 0\right| = (\frac{1}{4})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 2 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{1}{2}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{2}) - 0\right| = (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 3 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{9}{10}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{9}{10}) - 0\right| = (\frac{9}{10})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 14 = n_0$;

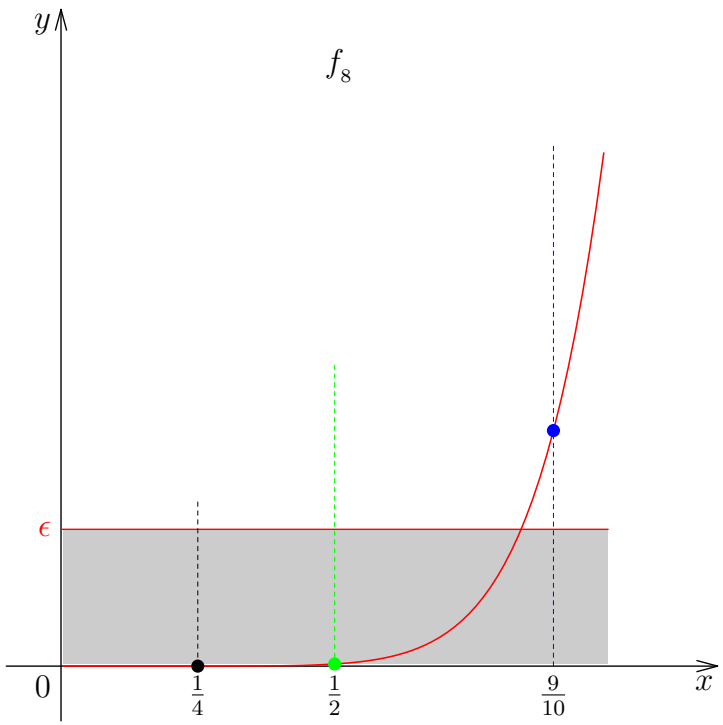
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



Zrejme $f_n(x_0) \longrightarrow 0$ pre $x_0 \in \langle 0, 1)$ a $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$. Zvoľme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom

- pre $x_0 = \frac{1}{4}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{4}) - 0\right| = (\frac{1}{4})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 2 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{1}{2}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{2}) - 0\right| = (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 3 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{9}{10}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{9}{10}) - 0\right| = (\frac{9}{10})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 14 = n_0$;

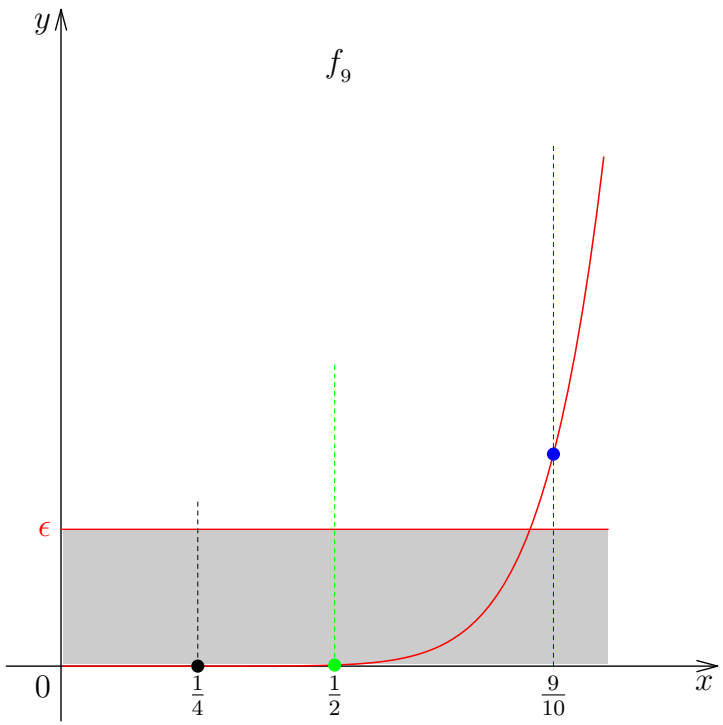
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



Zrejme $f_n(x_0) \longrightarrow 0$ pre $x_0 \in \langle 0, 1)$ a $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$. Zvoľme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom

- pre $x_0 = \frac{1}{4}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{4}) - 0\right| = (\frac{1}{4})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 2 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{1}{2}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{2}) - 0\right| = (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 3 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{9}{10}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{9}{10}) - 0\right| = (\frac{9}{10})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 14 = n_0$;

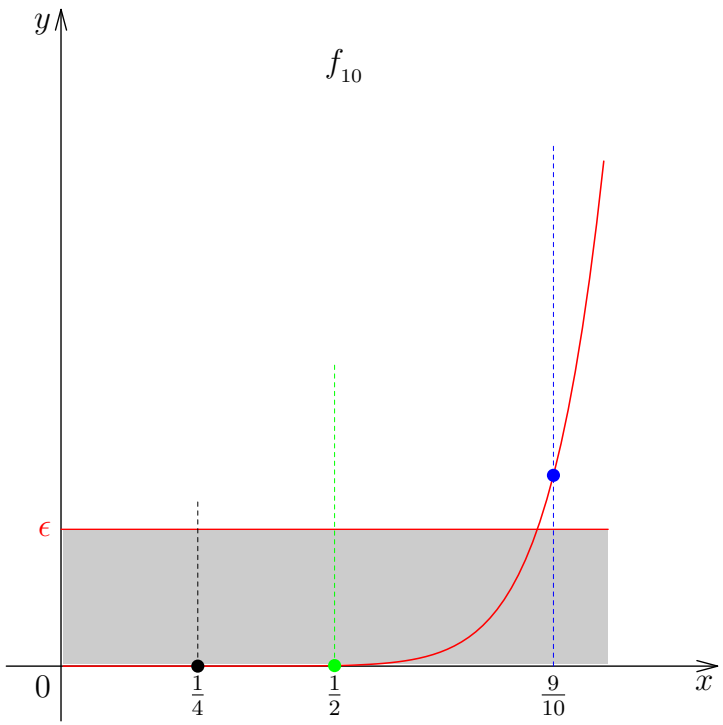
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



Zrejme $f_n(x_0) \longrightarrow 0$ pre $x_0 \in \langle 0, 1)$ a $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$. Zvoľme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom

- pre $x_0 = \frac{1}{4}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{4}) - 0\right| = (\frac{1}{4})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 2 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{1}{2}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{2}) - 0\right| = (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 3 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{9}{10}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{9}{10}) - 0\right| = (\frac{9}{10})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 14 = n_0$;

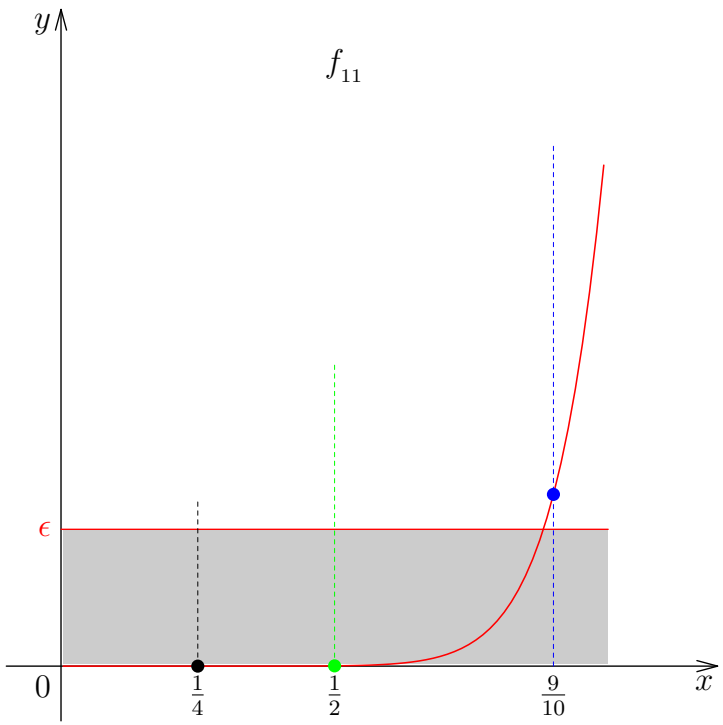
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



Zrejme $f_n(x_0) \longrightarrow 0$ pre $x_0 \in \langle 0, 1)$ a $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$. Zvoľme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom

- pre $x_0 = \frac{1}{4}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{4}) - 0\right| = (\frac{1}{4})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 2 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{1}{2}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{2}) - 0\right| = (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 3 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{9}{10}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{9}{10}) - 0\right| = (\frac{9}{10})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 14 = n_0$;

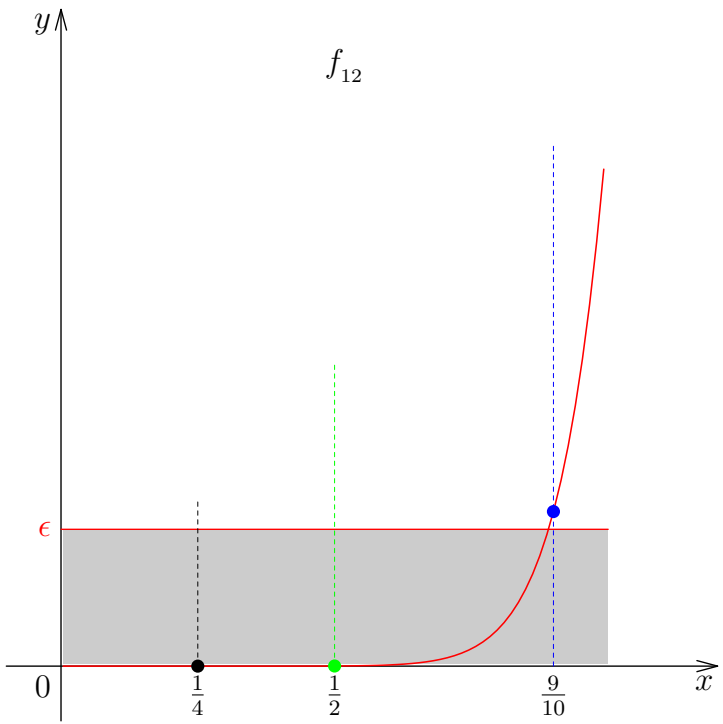
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



Zrejme $f_n(x_0) \longrightarrow 0$ pre $x_0 \in \langle 0, 1)$ a $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$. Zvoľme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom

- pre $x_0 = \frac{1}{4}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{4}) - 0\right| = (\frac{1}{4})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 2 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{1}{2}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{2}) - 0\right| = (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 3 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{9}{10}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{9}{10}) - 0\right| = (\frac{9}{10})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 14 = n_0$;

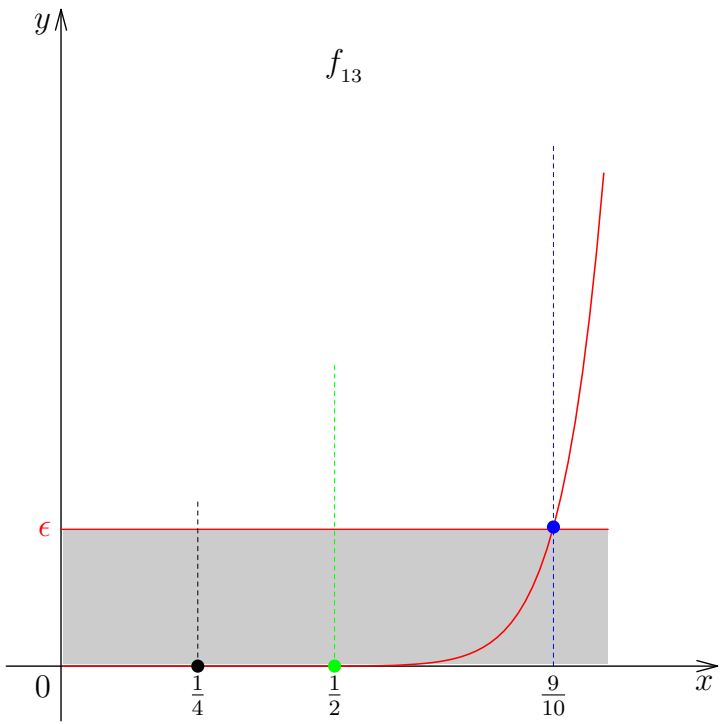
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



Zrejme $f_n(x_0) \longrightarrow 0$ pre $x_0 \in \langle 0, 1)$ a $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$. Zvoľme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom

- pre $x_0 = \frac{1}{4}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{4}) - 0\right| = (\frac{1}{4})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 2 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{1}{2}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{2}) - 0\right| = (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 3 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{9}{10}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{9}{10}) - 0\right| = (\frac{9}{10})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 14 = n_0$;

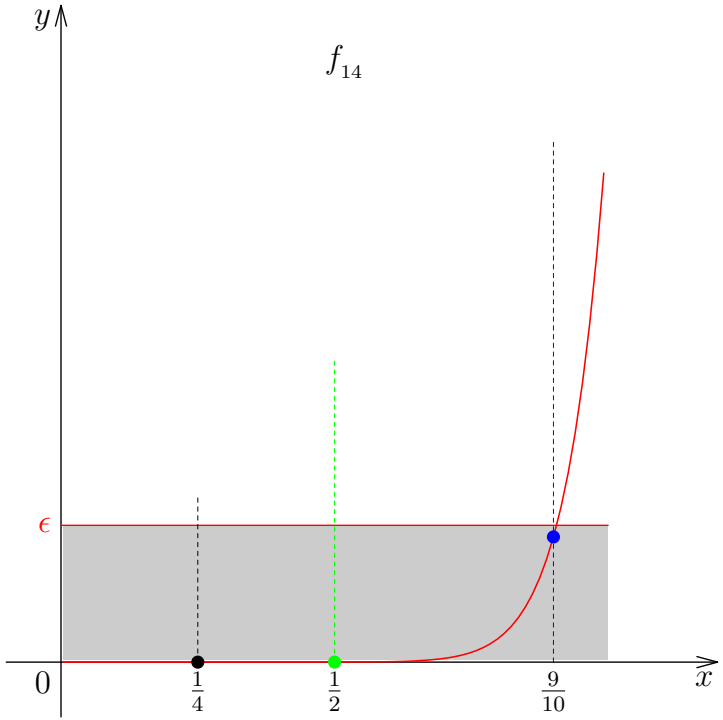
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



Zrejme $f_n(x_0) \longrightarrow 0$ pre $x_0 \in \langle 0, 1)$ a $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$. Zvoľme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom

- pre $x_0 = \frac{1}{4}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{4}) - 0\right| = (\frac{1}{4})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 2 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{1}{2}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{2}) - 0\right| = (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 3 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{9}{10}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{9}{10}) - 0\right| = (\frac{9}{10})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 14 = n_0$;

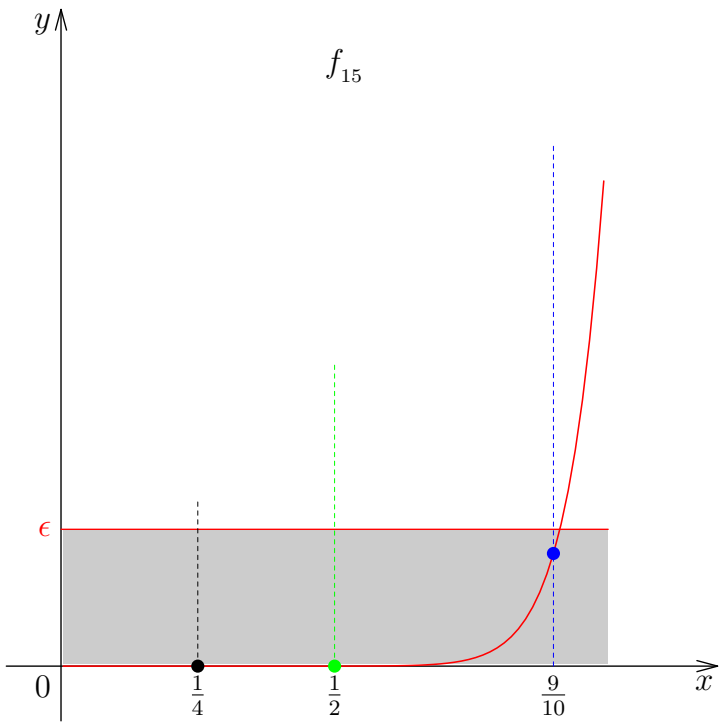
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



Zrejme $f_n(x_0) \longrightarrow 0$ pre $x_0 \in \langle 0, 1)$ a $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$. Zvoľme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom

- pre $x_0 = \frac{1}{4}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{4}) - 0\right| = (\frac{1}{4})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 2 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{1}{2}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{2}) - 0\right| = (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 3 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{9}{10}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{9}{10}) - 0\right| = (\frac{9}{10})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 14 = n_0$;

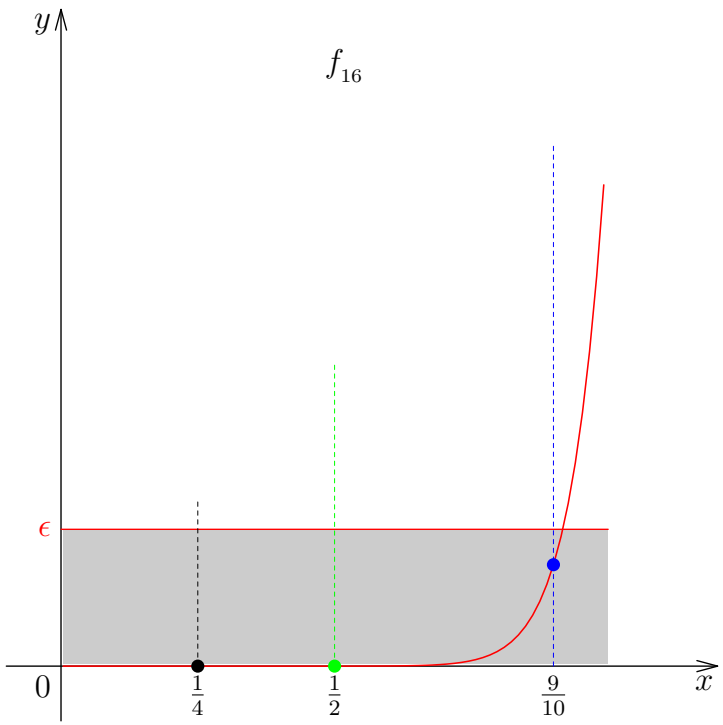
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



Zrejme $f_n(x_0) \longrightarrow 0$ pre $x_0 \in \langle 0, 1)$ a $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$. Zvoľme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom

- pre $x_0 = \frac{1}{4}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{4}) - 0\right| = (\frac{1}{4})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 2 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{1}{2}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{2}) - 0\right| = (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 3 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{9}{10}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{9}{10}) - 0\right| = (\frac{9}{10})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 14 = n_0$;

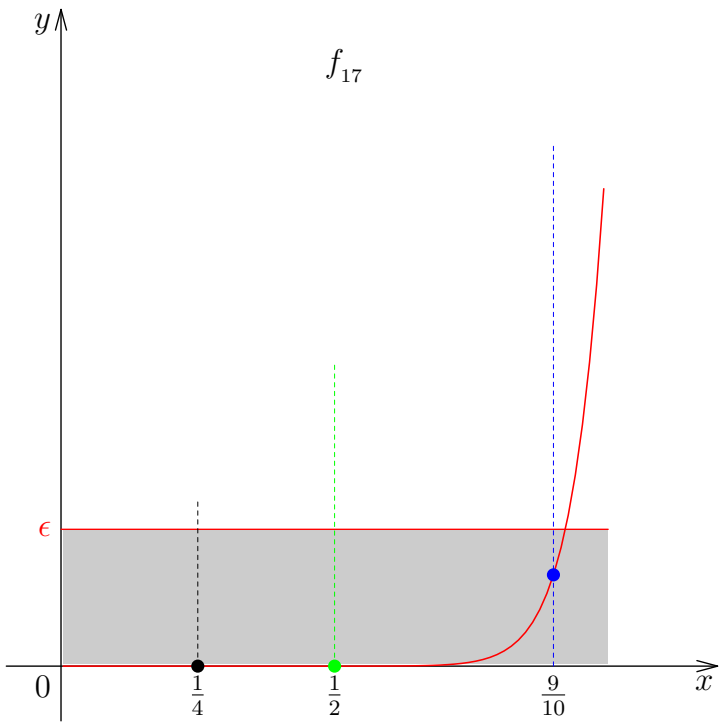
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



Zrejme $f_n(x_0) \longrightarrow 0$ pre $x_0 \in \langle 0, 1)$ a $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$. Zvoľme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom

- pre $x_0 = \frac{1}{4}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{4}) - 0\right| = (\frac{1}{4})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 2 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{1}{2}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{2}) - 0\right| = (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 3 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{9}{10}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{9}{10}) - 0\right| = (\frac{9}{10})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 14 = n_0$;

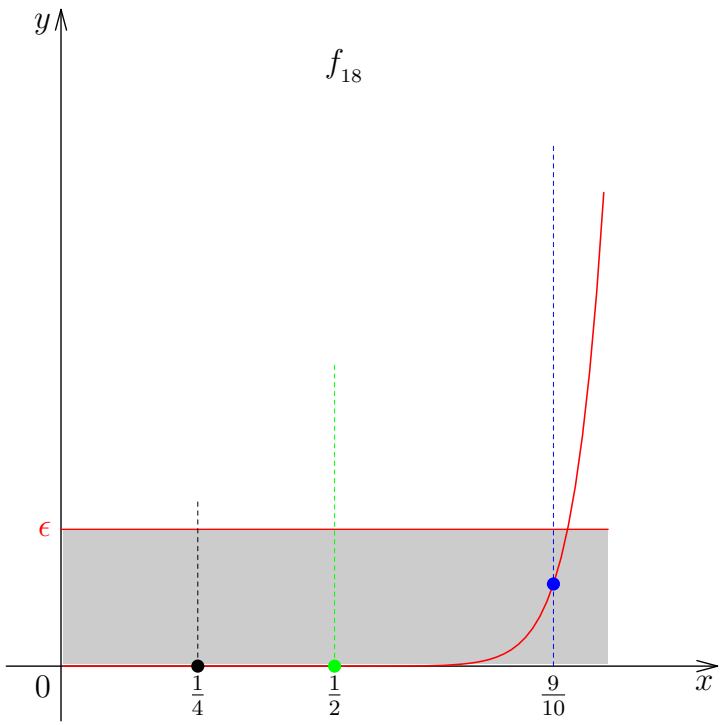
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



Zrejme $f_n(x_0) \longrightarrow 0$ pre $x_0 \in \langle 0, 1)$ a $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$. Zvoľme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom

- pre $x_0 = \frac{1}{4}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{4}) - 0\right| = (\frac{1}{4})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 2 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{1}{2}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{2}) - 0\right| = (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 3 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{9}{10}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{9}{10}) - 0\right| = (\frac{9}{10})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 14 = n_0$;

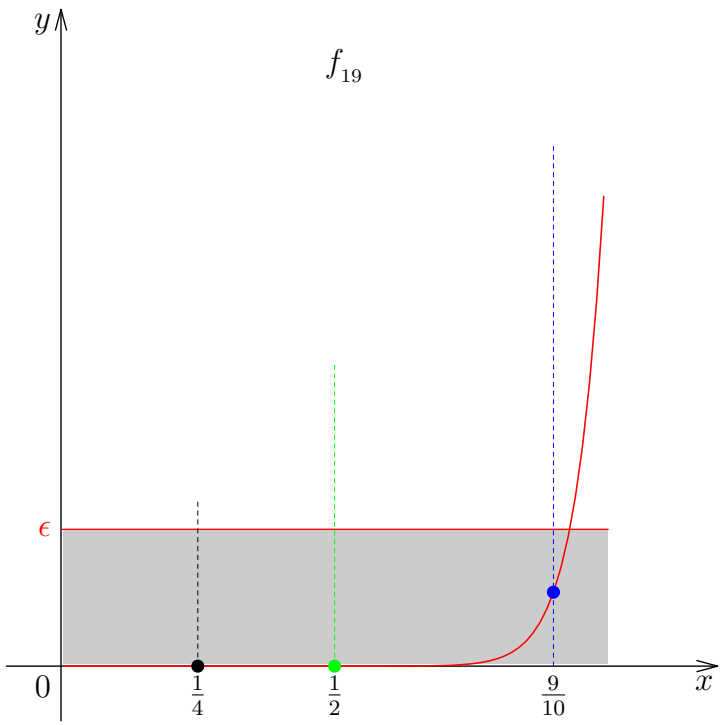
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



Zrejme $f_n(x_0) \longrightarrow 0$ pre $x_0 \in \langle 0, 1)$ a $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$. Zvoľme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom

- pre $x_0 = \frac{1}{4}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{4}) - 0\right| = (\frac{1}{4})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 2 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{1}{2}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{2}) - 0\right| = (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 3 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{9}{10}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{9}{10}) - 0\right| = (\frac{9}{10})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 14 = n_0$;

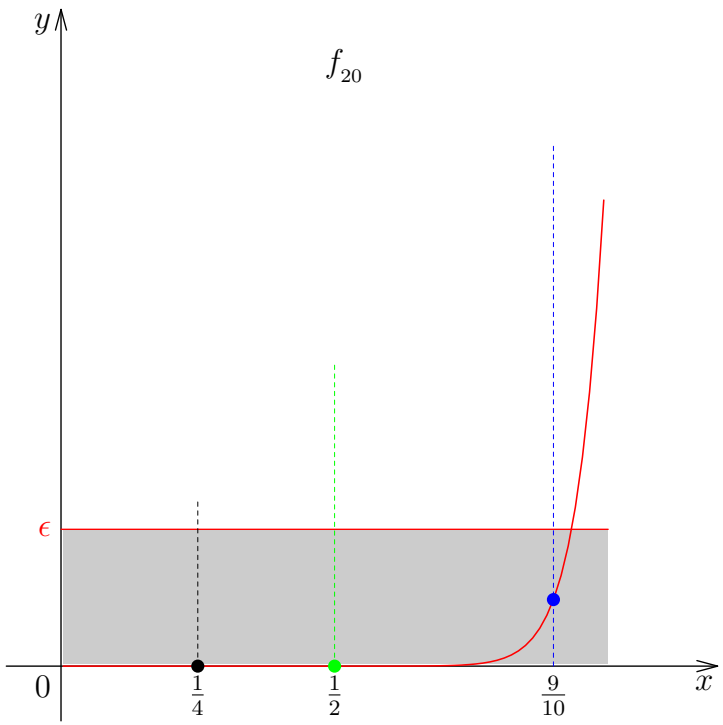
Bodová konvergencia = konvergencia bod po bode

$$f_n \to_P f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in P)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$f_n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$



Zrejme $f_n(x_0) \longrightarrow 0$ pre $x_0 \in \langle 0, 1)$ a $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$. Zvoľme $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Potom

- pre $x_0 = \frac{1}{4}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{4}) - 0\right| = (\frac{1}{4})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 2 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{1}{2}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{1}{2}) - 0\right| = (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 3 = n_0$;
- pre $x_0 = \frac{9}{10}$ platí nerovnosť $\left|f_n(\frac{9}{10}) - 0\right| = (\frac{9}{10})^n < \frac{1}{4}$ pre každé prirodzené číslo $n \geq 14 = n_0$;

Paralela: spojitosť versus rovnomerná spojitosť

It has apparently not yet been observed, that ... continuity at any single point ... is not the continuity ... which can be called *uniform continuity*, because it extends uniformly to all points and in all directions.

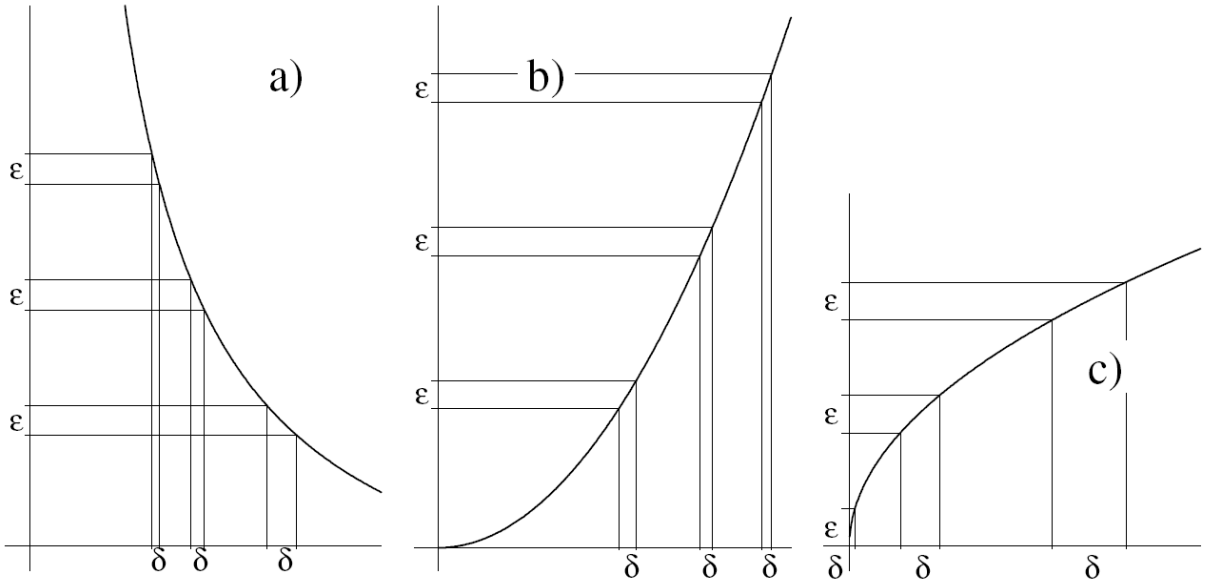
Heine: *Ueber trigonometrische Reihen* (1870), p. 361

Funkciu f sme nazvali spojitá na množine $M \subseteq D_f$, akk

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in M)(\exists \delta > 0)(\forall y \in M)\ [|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon]$$

?? **čo ak jednoducho prehodíme poradie kvantifikátorov** ??

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in M)(\forall y \in M)\ [|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon]$$



Paralela: spojitosť versus rovnomerná spojitosť

It has apparently not yet been observed, that ... continuity at any single point ... is not the continuity ... which can be called *uniform continuity*, because it extends uniformly to all points and in all directions.

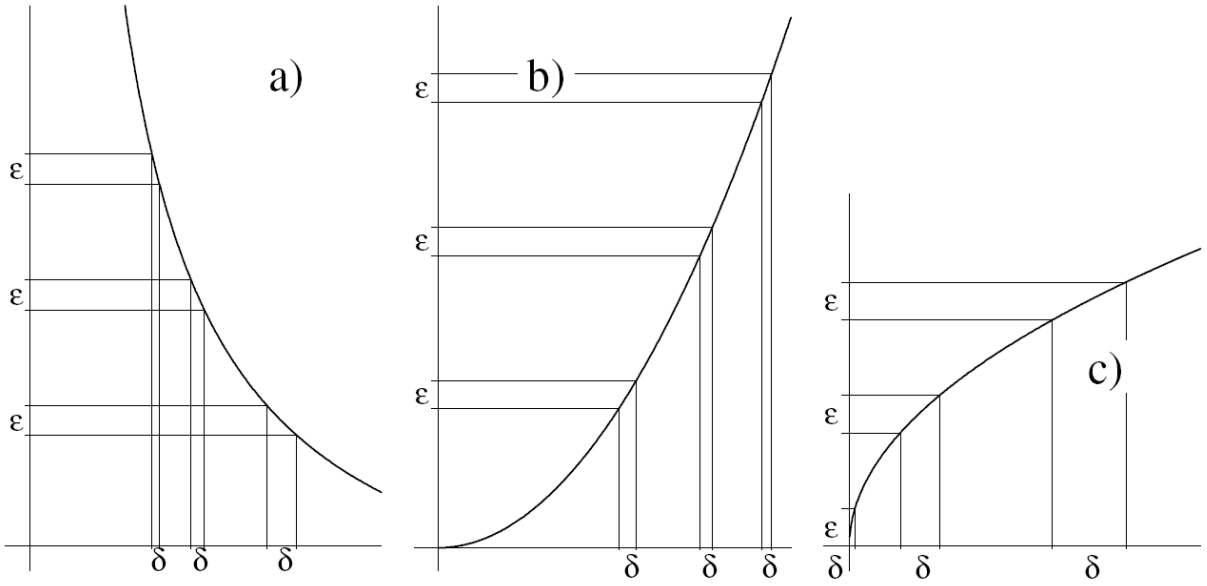
Heine: *Ueber trigonometrische Reihen* (1870), p. 361

Funkciu f sme nazvali spojitá na množine $M \subseteq D_f$, akk

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in M)(\exists \delta > 0)(\forall y \in M)\ [|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon]$$

?? **čo ak jednoducho prehodíme poradie kvantifikátorov** ??

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in M)(\forall y \in M)\ [|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon]$$



Vykrádanie myšlienok v praxi...

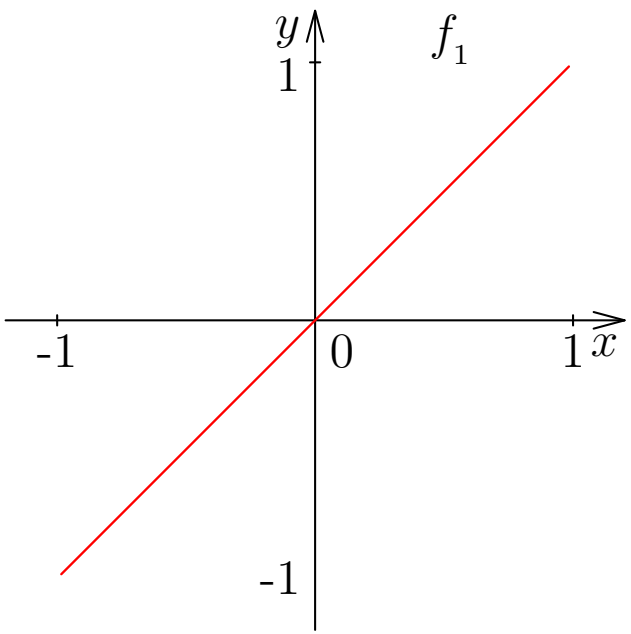
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: V ktorom zmysle konverguje $f_n(x) = x^n$ na $P = (-1, 1)$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

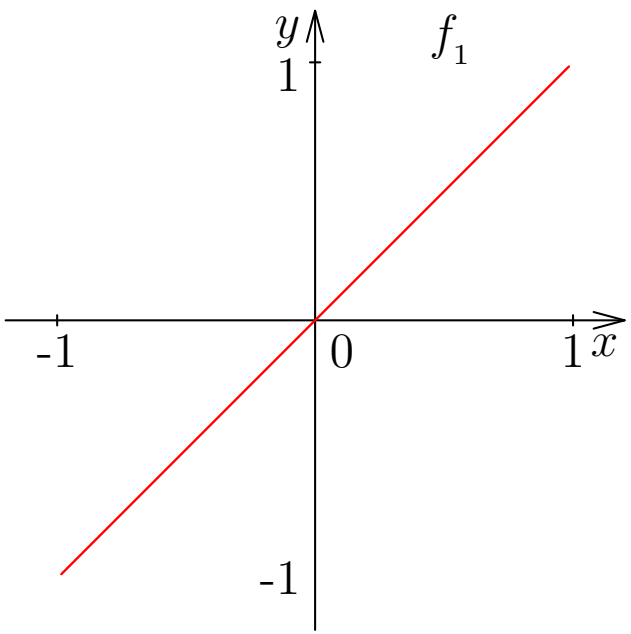
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: V ktorom zmysle konverguje $f_n(x) = x^n$ na $P = (-1, 1)$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

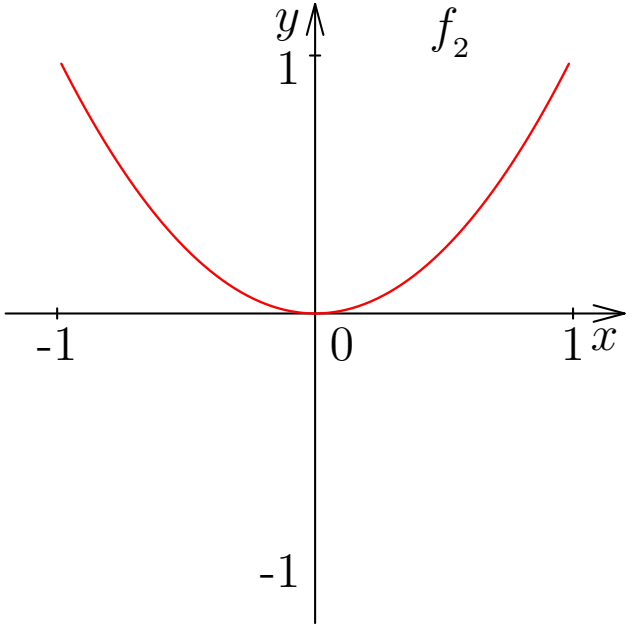
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: V ktorom zmysle konverguje $f_n(x) = x^n$ na $P = (-1, 1)$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

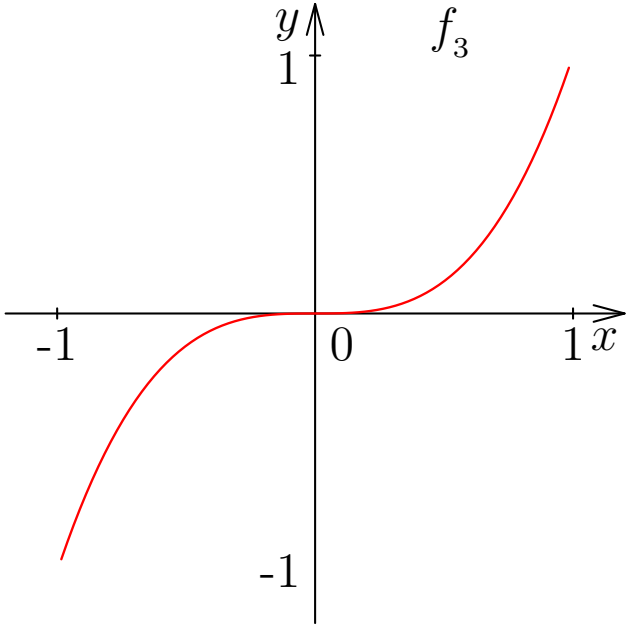
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: V ktorom zmysle konverguje $f_n(x) = x^n$ na $P = (-1, 1)$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

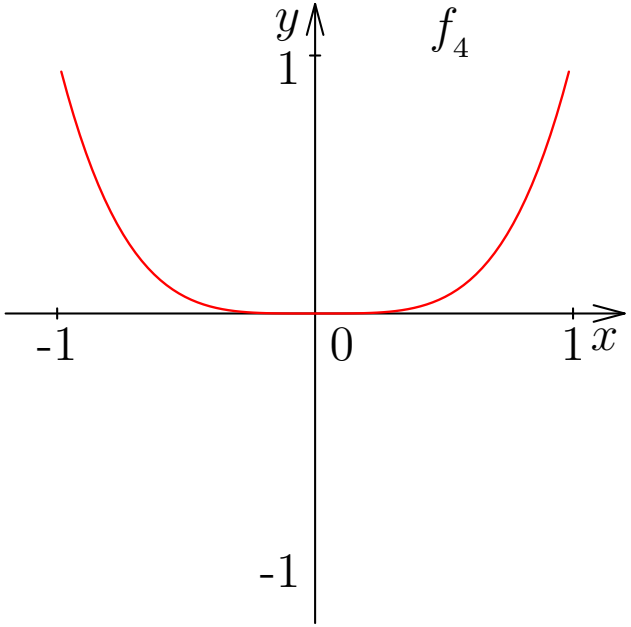
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: V ktorom zmysle konverguje $f_n(x) = x^n$ na $P = (-1, 1)$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

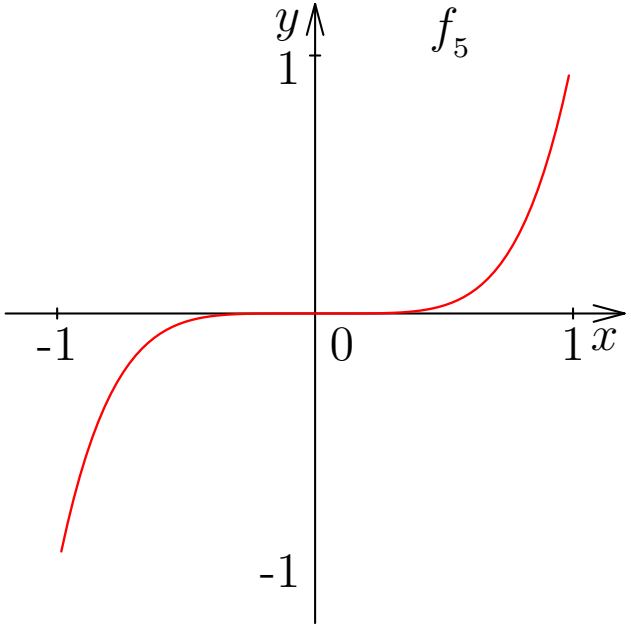
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: V ktorom zmysle konverguje $f_n(x) = x^n$ na $P = (-1, 1)$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

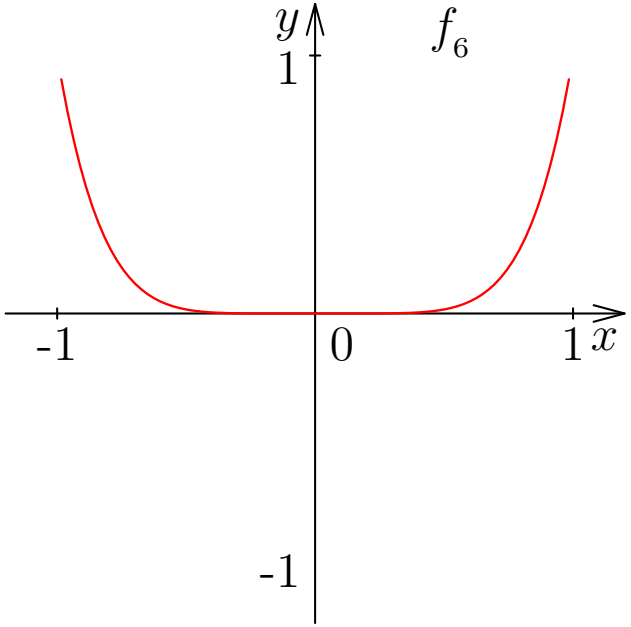
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: V ktorom zmysle konverguje $f_n(x) = x^n$ na $P = (-1, 1)$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

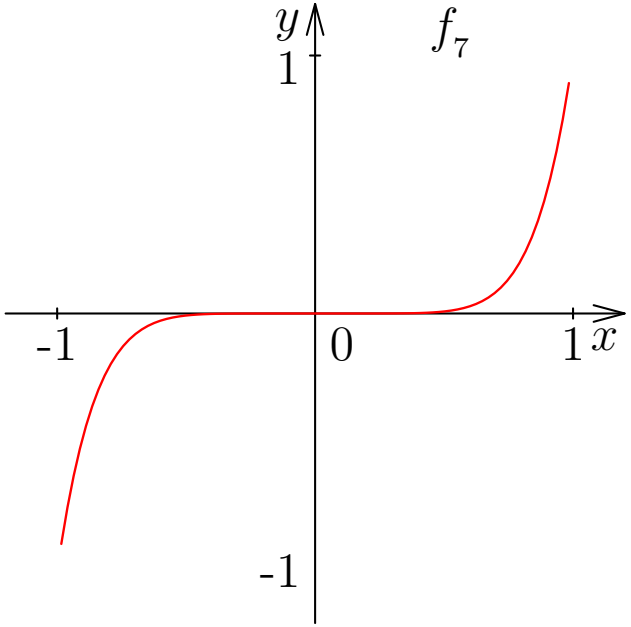
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: V ktorom zmysle konverguje $f_n(x) = x^n$ na $P = (-1, 1)$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

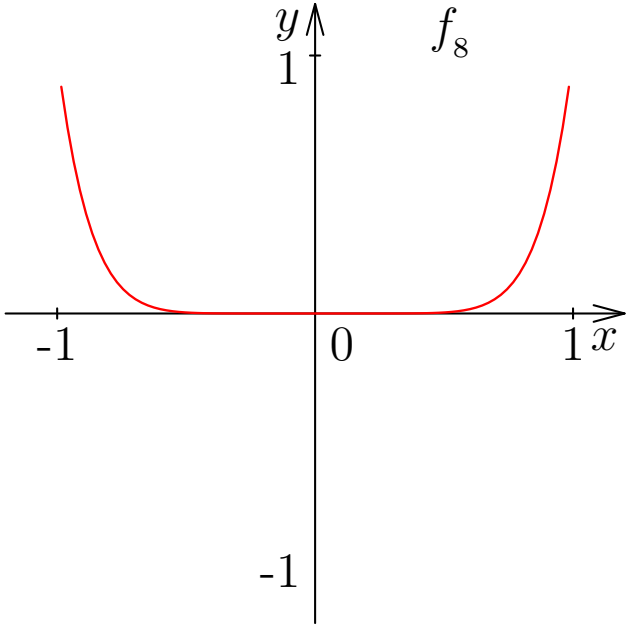
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: V ktorom zmysle konverguje $f_n(x) = x^n$ na $P = (-1, 1)$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

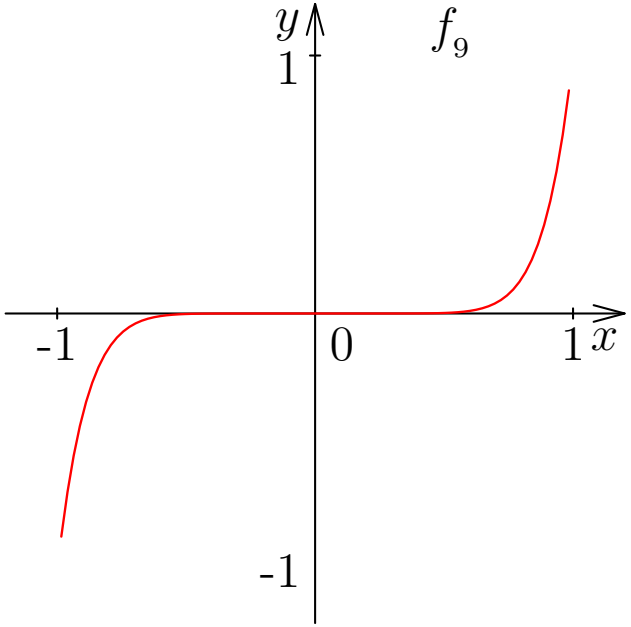
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: V ktorom zmysle konverguje $f_n(x) = x^n$ na $P = (-1, 1)$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

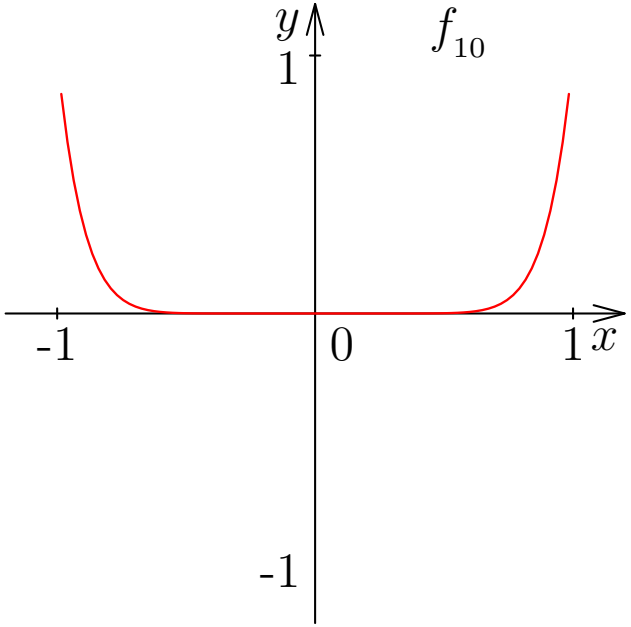
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: V ktorom zmysle konverguje $f_n(x) = x^n$ na $P = (-1, 1)$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

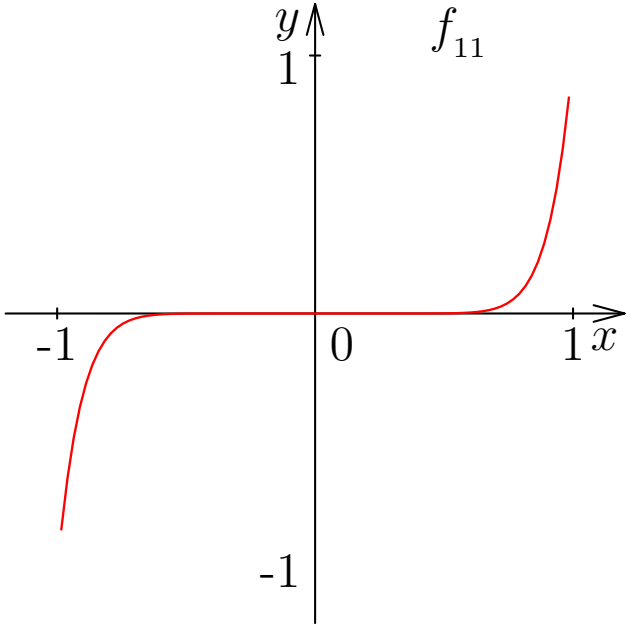
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: V ktorom zmysle konverguje $f_n(x) = x^n$ na $P = (-1, 1)$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

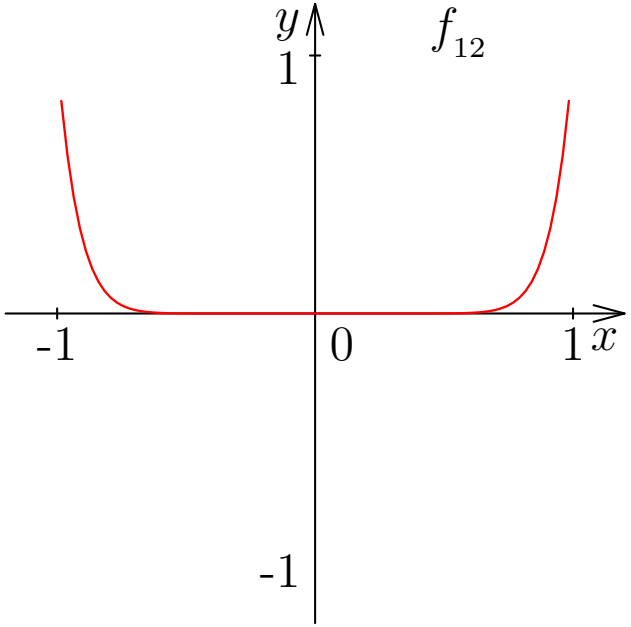
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: V ktorom zmysle konverguje $f_n(x) = x^n$ na $P = (-1, 1)$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

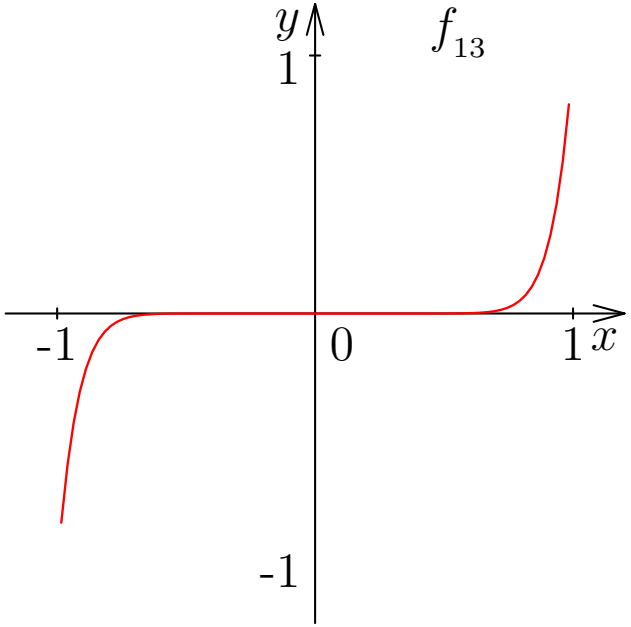
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: V ktorom zmysle konverguje $f_n(x) = x^n$ na $P = (-1, 1)$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

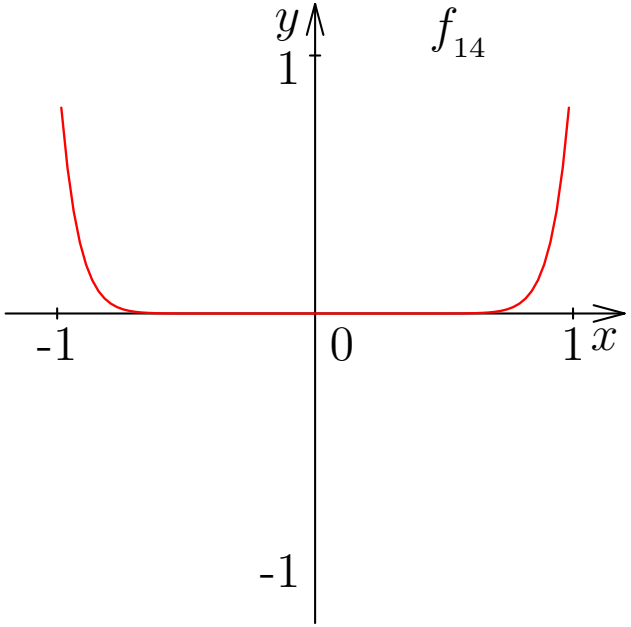
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: V ktorom zmysle konverguje $f_n(x) = x^n$ na $P = (-1, 1)$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

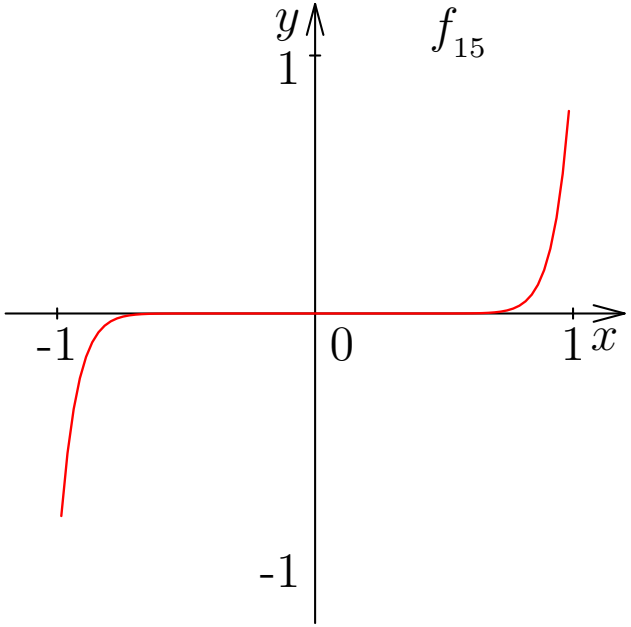
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: V ktorom zmysle konverguje $f_n(x) = x^n$ na $P = (-1, 1)$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

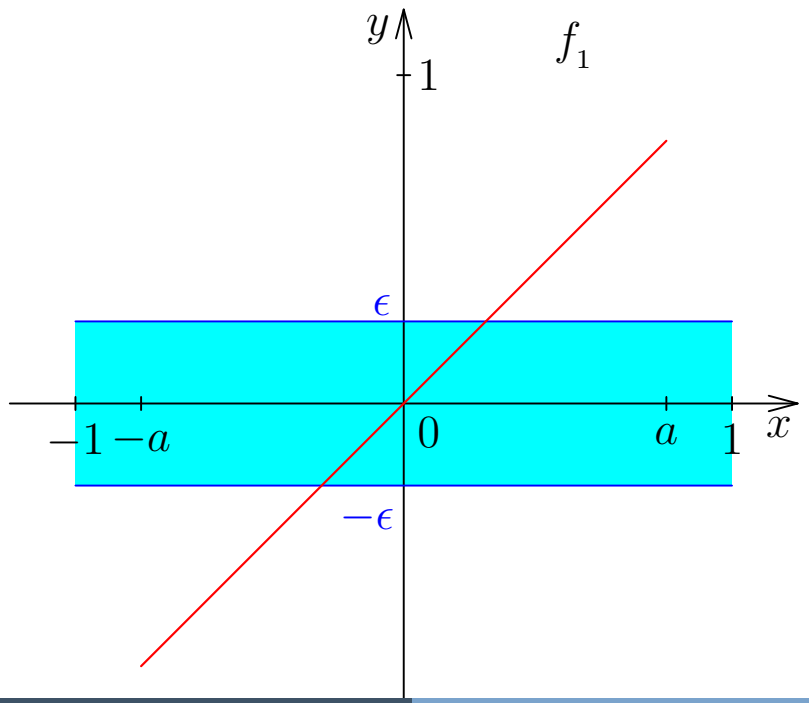
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: Čo ak sa tie chvosty „odstrihnú“, t.j. $P = \langle -a, a \rangle$ pre $0 < a < 1$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

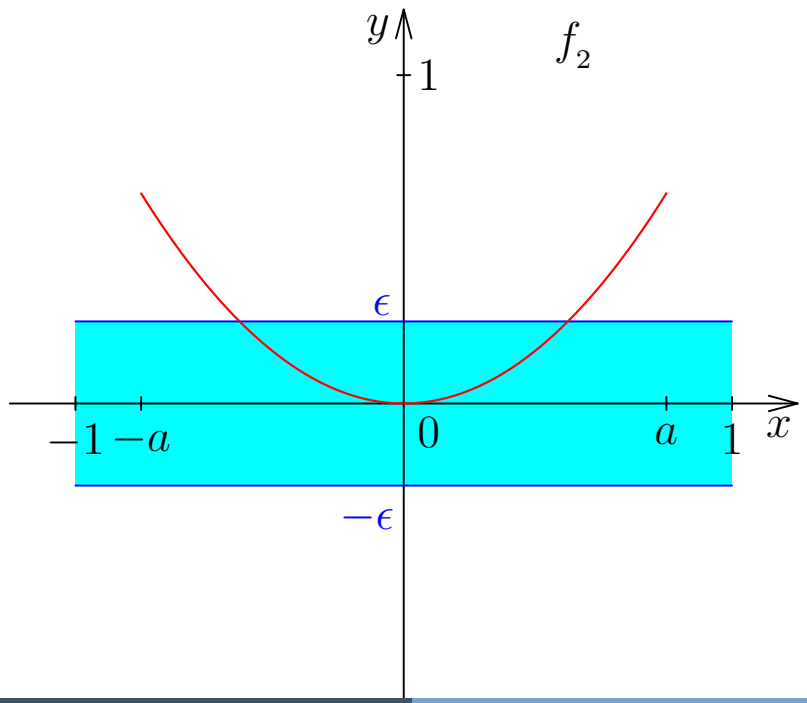
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: Čo ak sa tie chvosty „odstrihnú“, t.j. $P = \langle -a, a \rangle$ pre $0 < a < 1$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

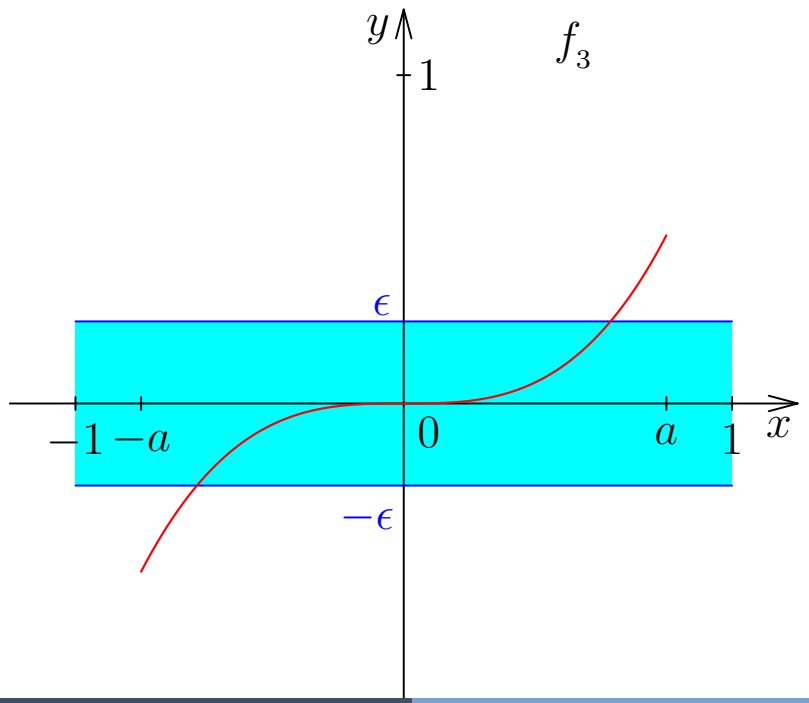
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: Čo ak sa tie chvosty „odstrihnú“, t.j. $P = \langle -a, a \rangle$ pre $0 < a < 1$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

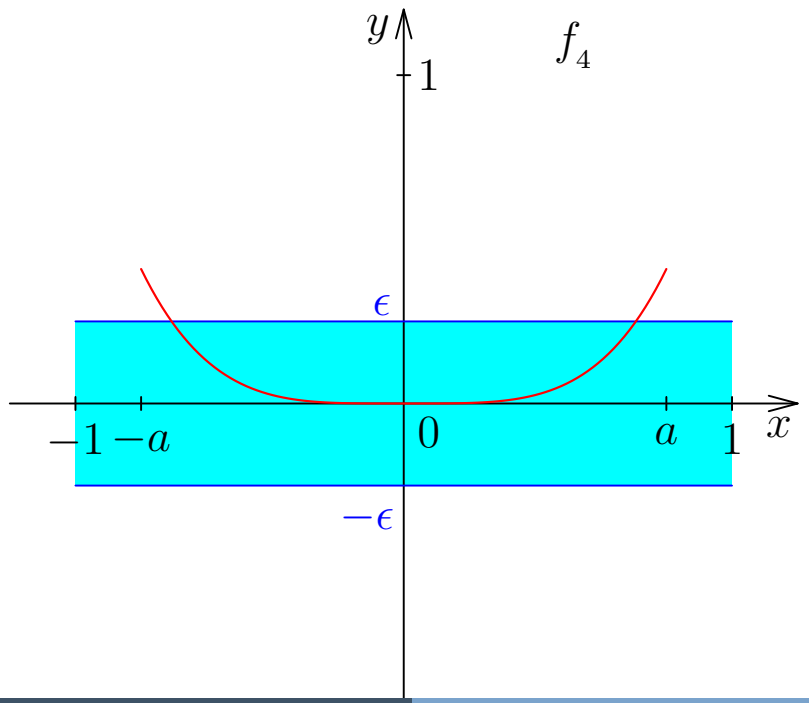
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: Čo ak sa tie chvosty „odstrihnú“, t.j. $P = \langle -a, a \rangle$ pre $0 < a < 1$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

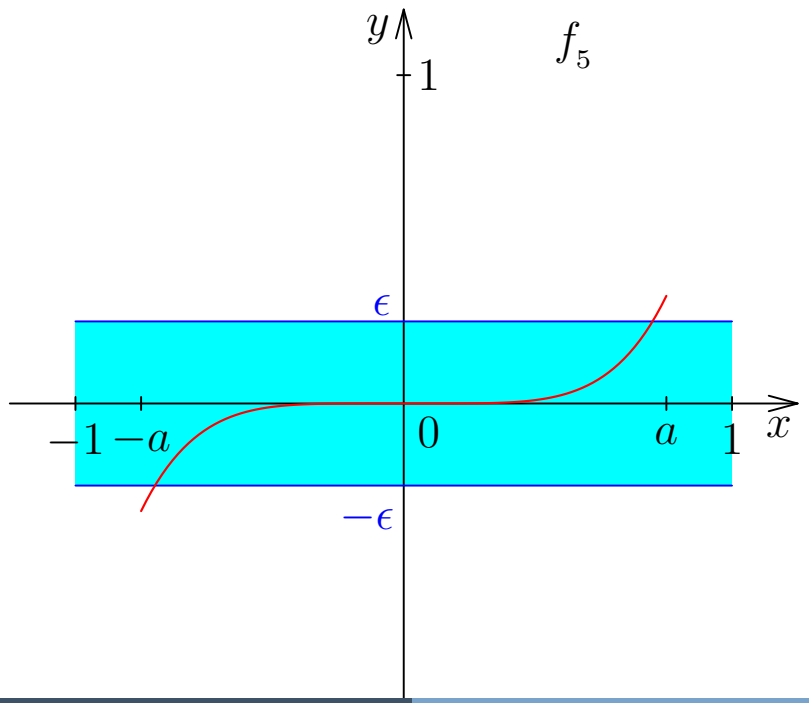
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: Čo ak sa tie chvosty „odstrihnú“, t.j. $P = \langle -a, a \rangle$ pre $0 < a < 1$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

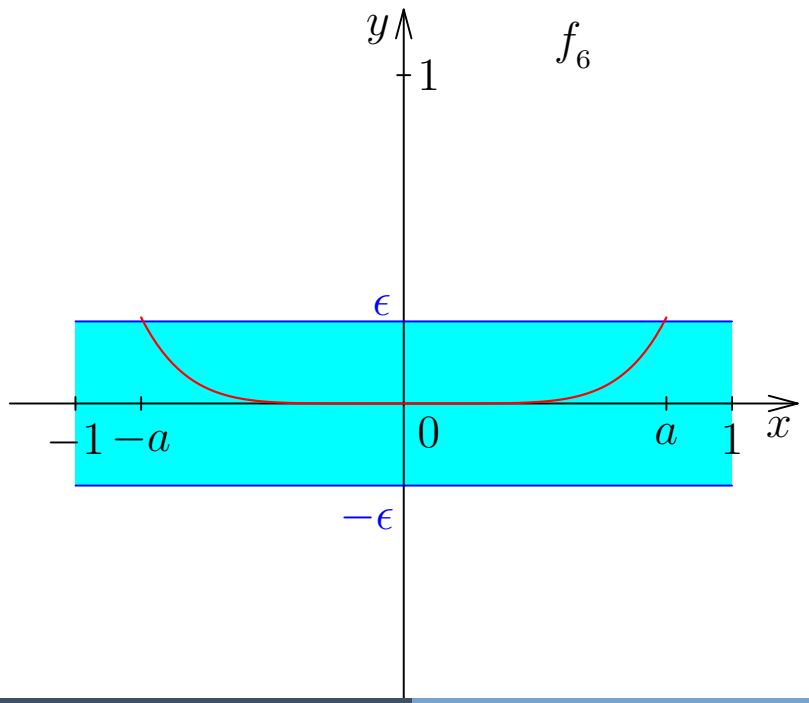
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: Čo ak sa tie chvosty „odstrihnú“, t.j. $P = \langle -a, a \rangle$ pre $0 < a < 1$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

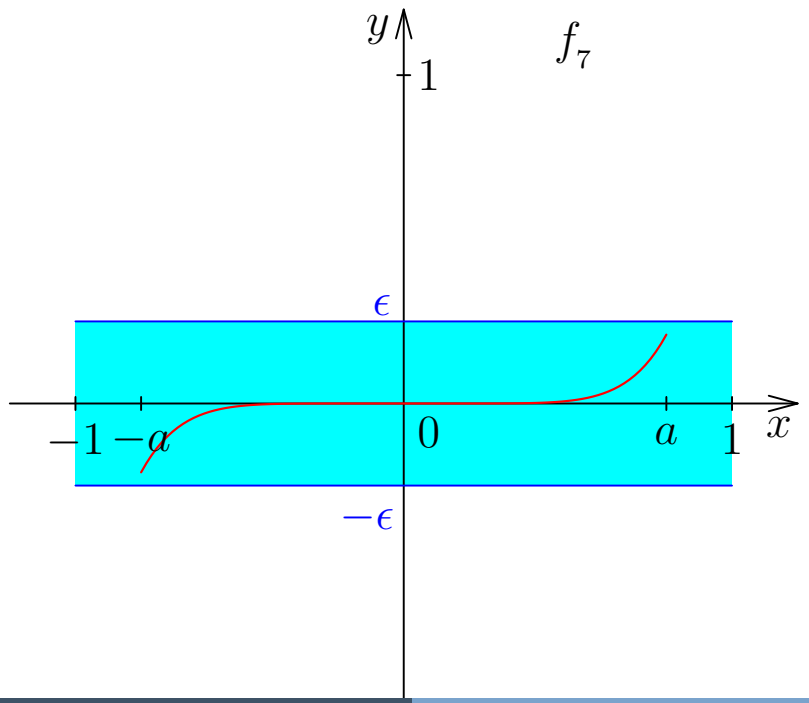
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: Čo ak sa tie chvosty „odstrihnú“, t.j. $P = \langle -a, a \rangle$ pre $0 < a < 1$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

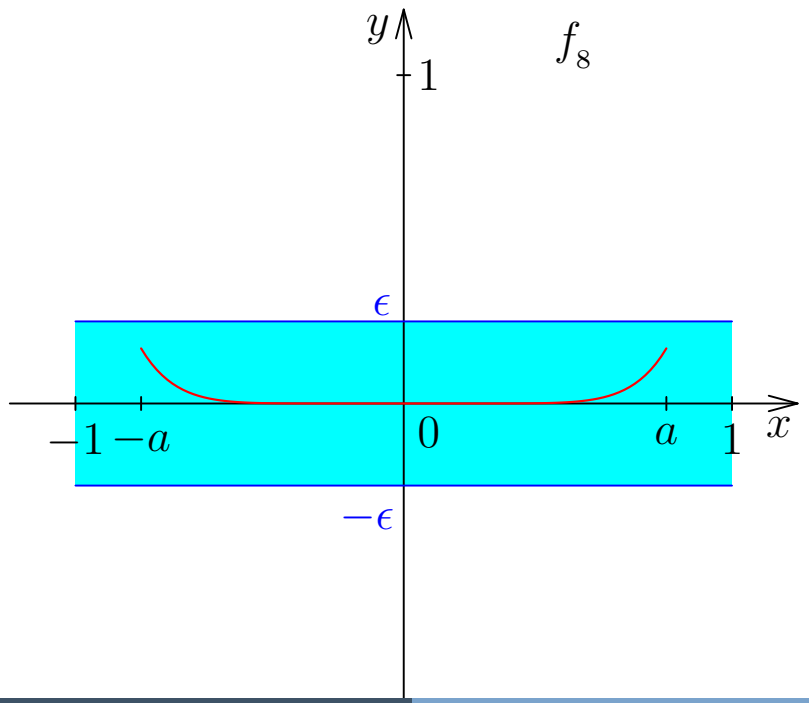
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: Čo ak sa tie chvosty „odstrihnú“, t.j. $P = \langle -a, a \rangle$ pre $0 < a < 1$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

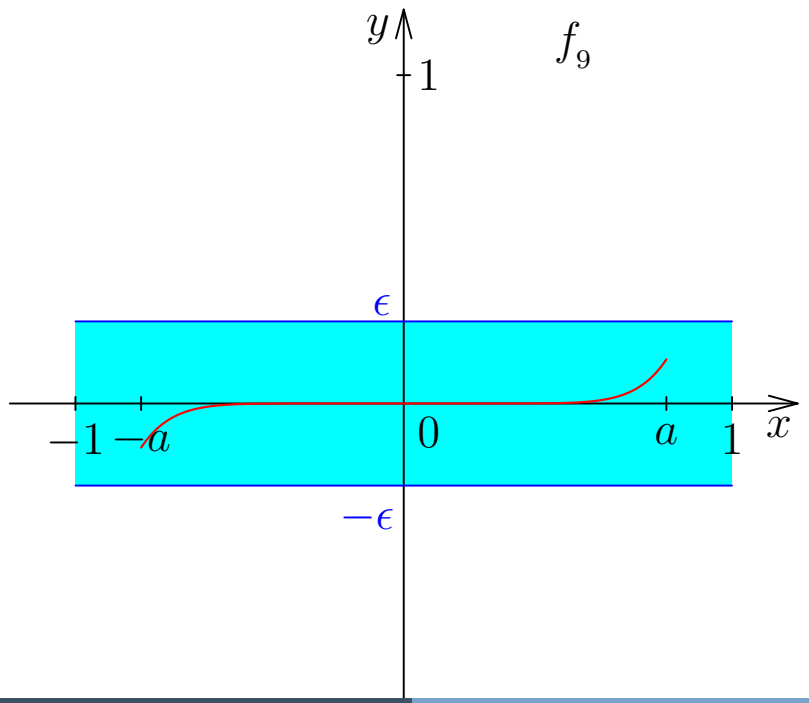
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: Čo ak sa tie chvosty „odstrihnú“, t.j. $P = \langle -a, a \rangle$ pre $0 < a < 1$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

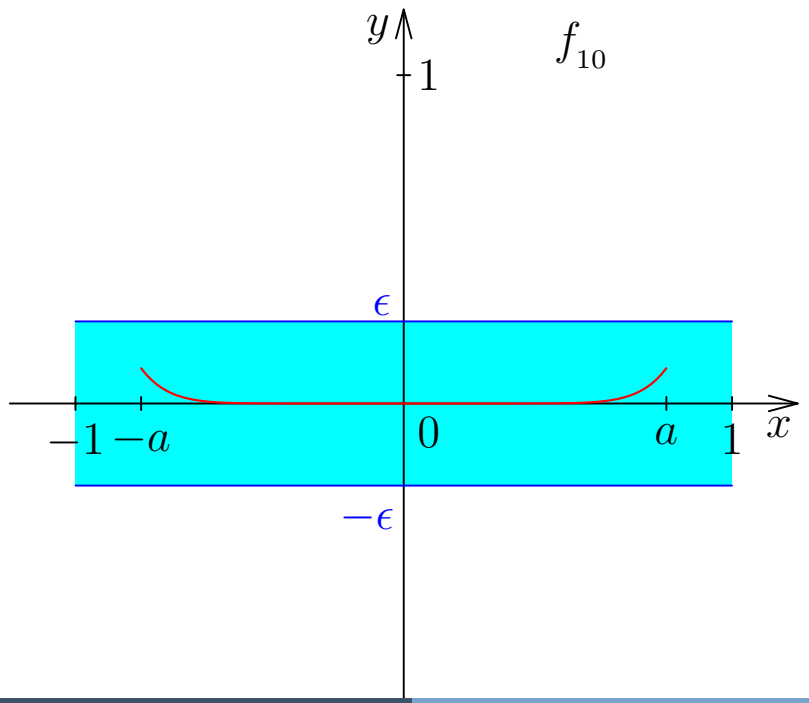
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: Čo ak sa tie chvosty „odstrihnú“, t.j. $P = \langle -a, a \rangle$ pre $0 < a < 1$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

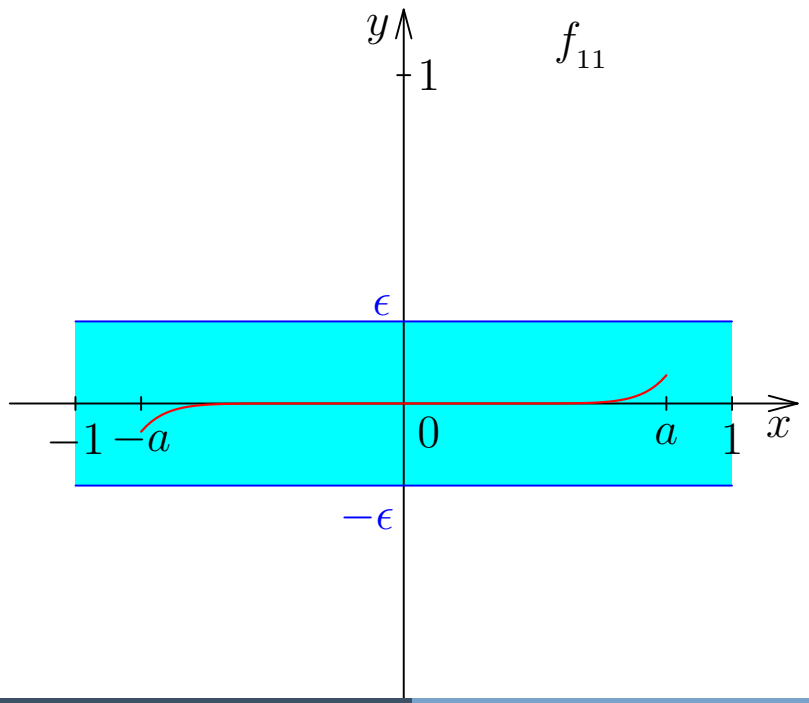
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: Čo ak sa tie chvosty „odstrihnú“, t.j. $P = \langle -a, a \rangle$ pre $0 < a < 1$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

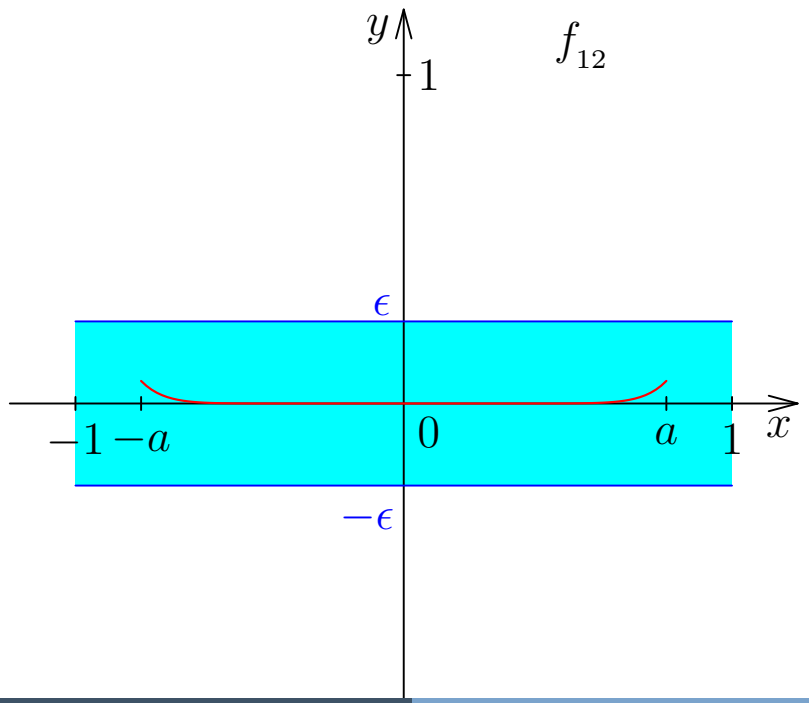
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: Čo ak sa tie chvosty „odstrihnú“, t.j. $P = \langle -a, a \rangle$ pre $0 < a < 1$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

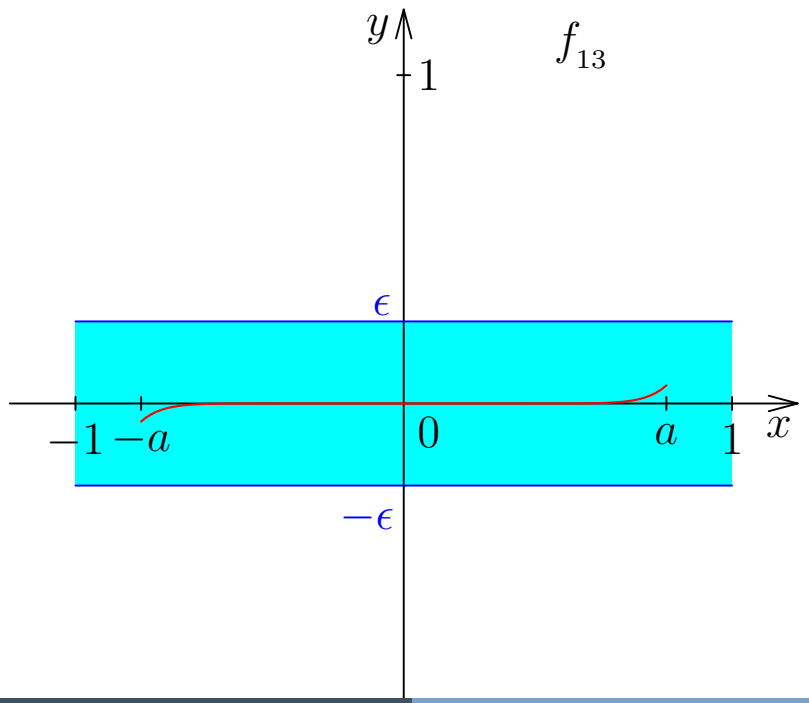
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: Čo ak sa tie chvosty „odstrihnú“, t.j. $P = \langle -a, a \rangle$ pre $0 < a < 1$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

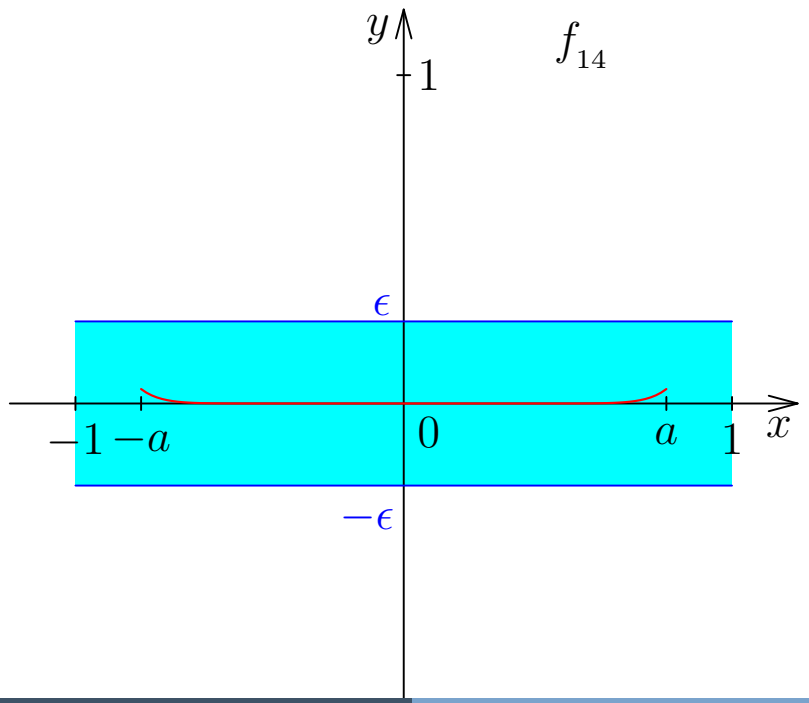
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: Čo ak sa tie chvosty „odstrihnú“, t.j. $P = \langle -a, a \rangle$ pre $0 < a < 1$?



Vykrádanie myšlienok v praxi...

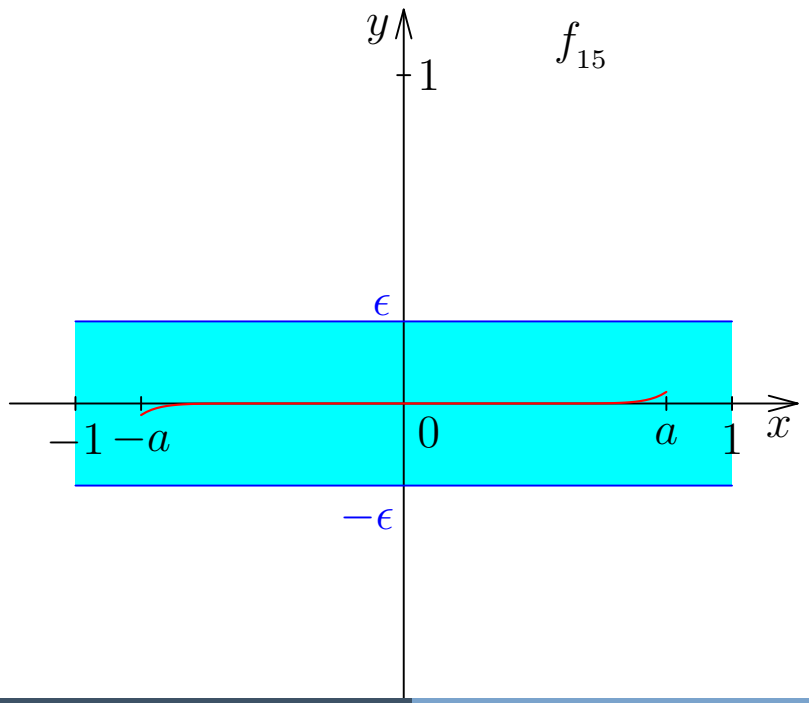
Bodová konvergencia $f_n \to_P f$ kvantifikovane

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0(\varepsilon, x))(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Čo keby sme jednoducho prehodili poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

Úloha: Čo ak sa tie chvosty „odstrihnú“, t.j. $P = \langle -a, a \rangle$ pre $0 < a < 1$?



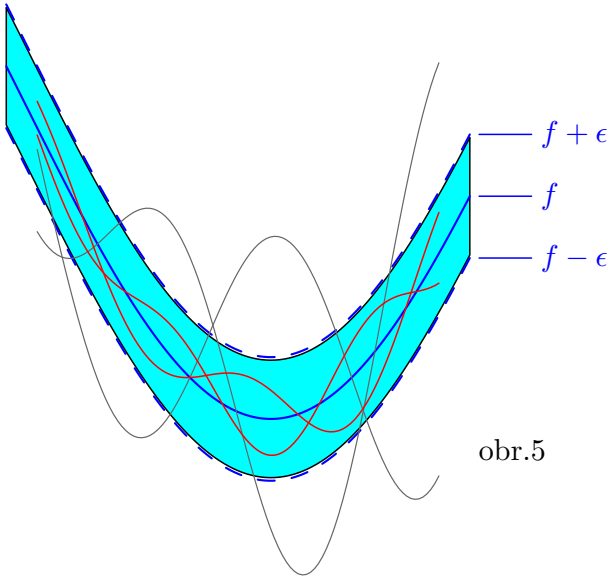
Rovnomerná konvergencia postupnosti funkcií

Until very recently it was believed, that the integral of a convergent series ... is equal to the sum of the integrals of the individual terms, and Mr. Weierstrass was the first to observe ...

Heine: *Ueber trigonometrischen Reihen* (1870)

Definícia – rovnomerná konvergencia postupnosti (Weierstrass, 1841)

Hovoríme, že postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ rovnomerne konverguje k funkcii f na množine P, akk pre každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ a každé $x \in P$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Zapisujeme $f_n \rightrightarrows_P f$.



obr.5

Ak nakreslíme okolo limitnej funkcie f pás šírky $\varepsilon > 0$, tak existuje také n_0, že grafy všetkých funkcií f_n pre $n > n_0$ (teda počnúc istou funkciou v postupnosti funkcií) ležia v tomto páse.

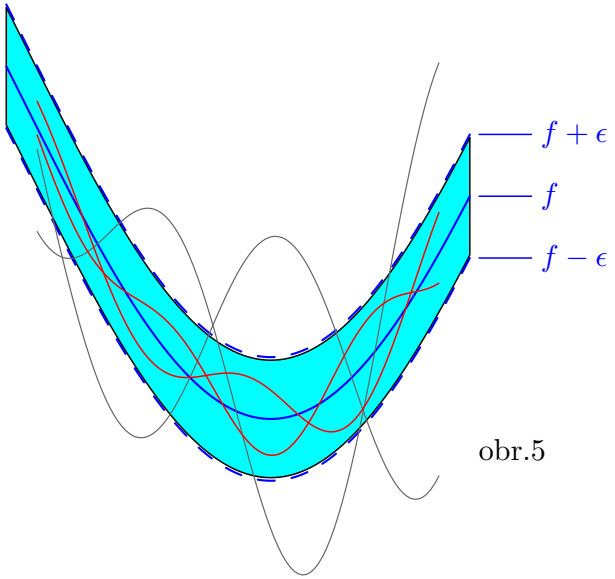
Rovnomerná konvergencia postupnosti funkcií

Until very recently it was believed, that the integral of a convergent series ... is equal to the sum of the integrals of the individual terms, and Mr. Weierstrass was the first to observe ...

Heine: *Ueber trigonometrischen Reihen* (1870)

Definícia – rovnomerná konvergencia postupnosti (Weierstrass, 1841)

Hovoríme, že postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ rovnomerne konverguje k funkcii f na množine P, akk pre každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ a každé $x \in P$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Zapisujeme $f_n \rightrightarrows_P f$.



obr.5

Ak nakreslíme okolo limitnej funkcie f pás šírky $\varepsilon > 0$, tak existuje také n_0, že grafy všetkých funkcií f_n pre $n > n_0$ (teda počnúc istou funkciou v postupnosti funkcií) ležia v tomto páse.

Rovnomerná konvergencia postupnosti funkcií

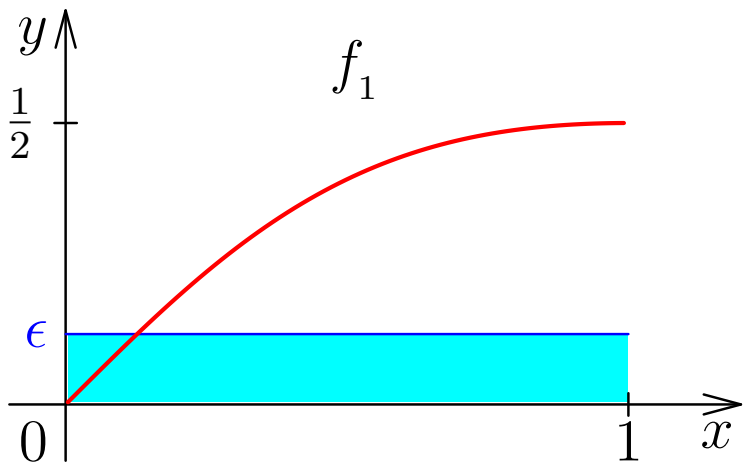
Until very recently it was believed, that the integral of a convergent series ... is equal to the sum of the integrals of the individual terms, and Mr. Weierstrass was the first to observe ...

Heine: *Ueber trigonometrischen Reihen* (1870)

Weierstrass explains uniform convergence to Cauchy who meditates over Abel's counterexample
(Drawing by K.Wanner)

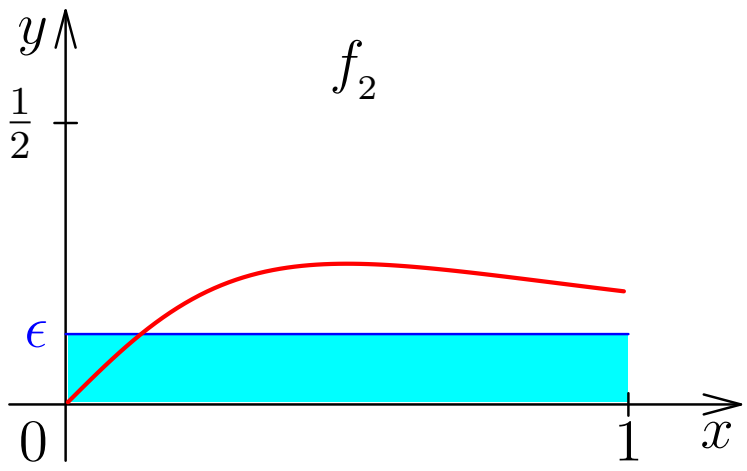
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



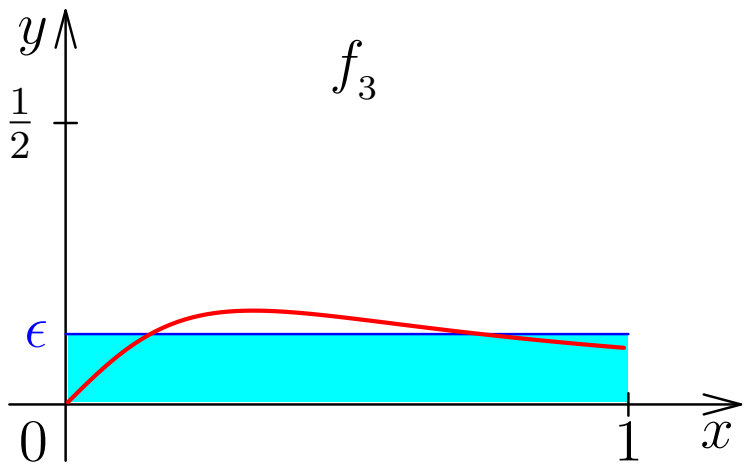
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



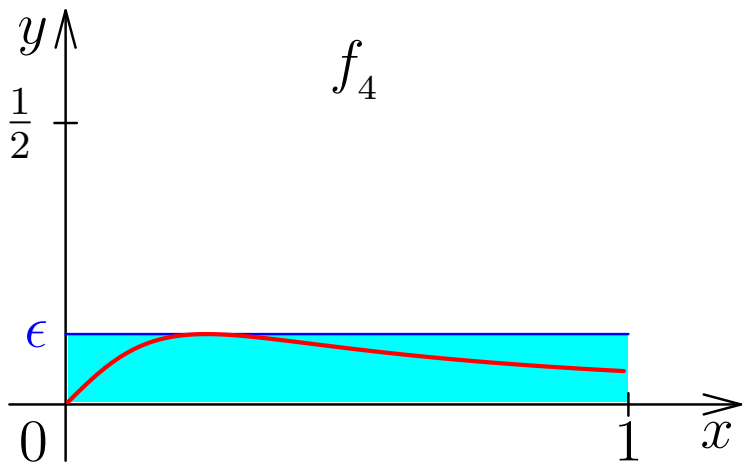
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



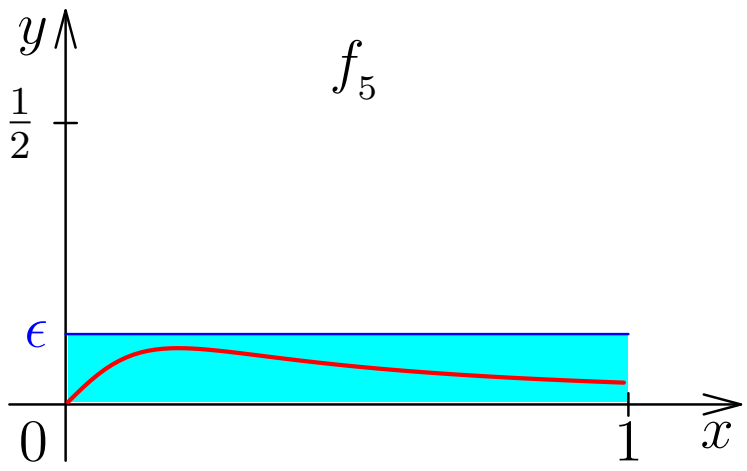
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



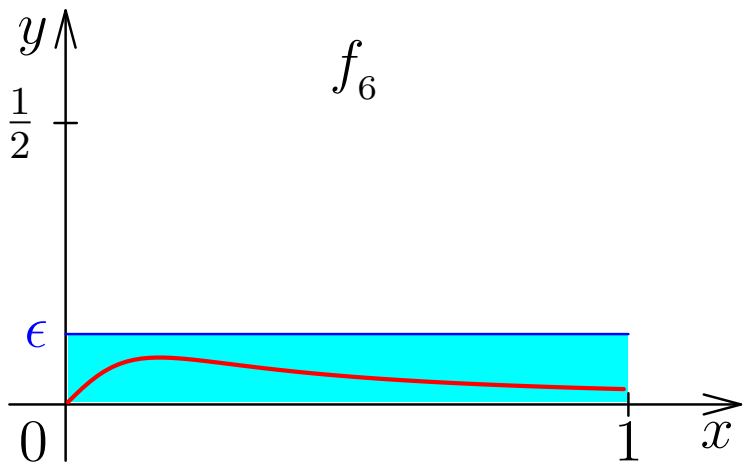
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



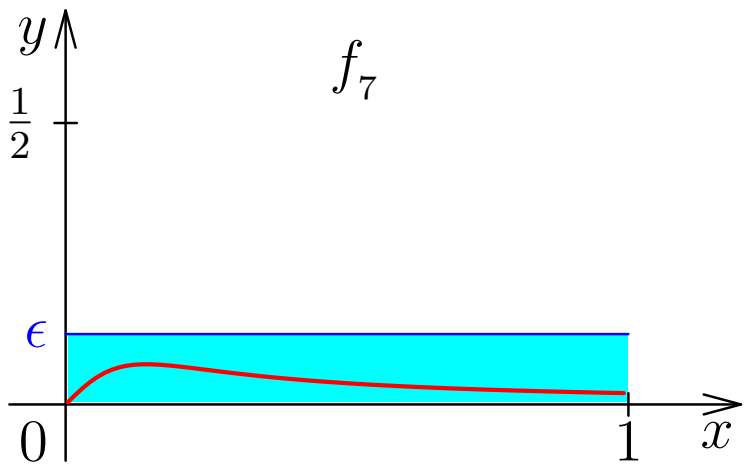
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



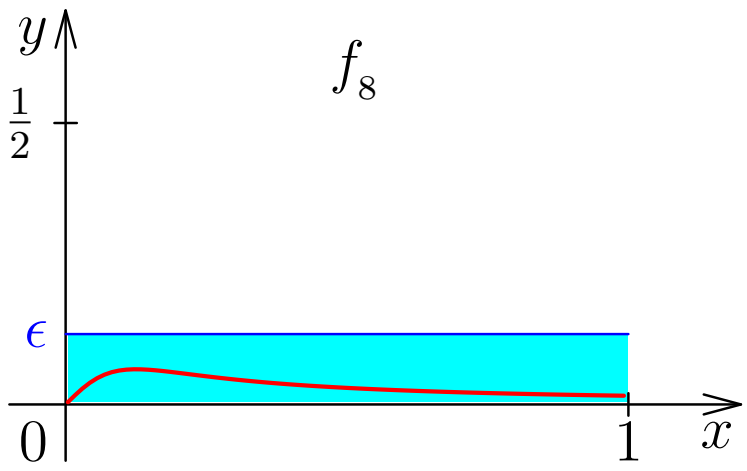
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



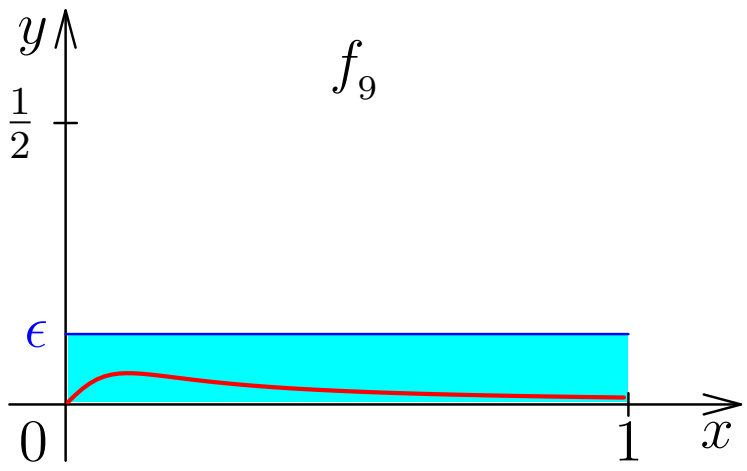
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



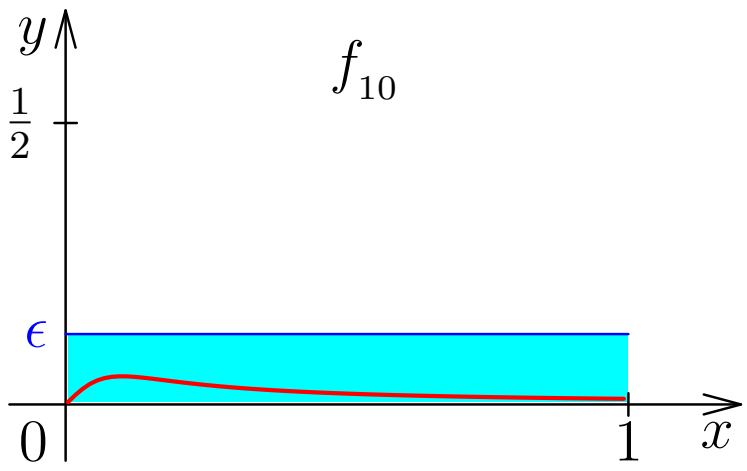
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



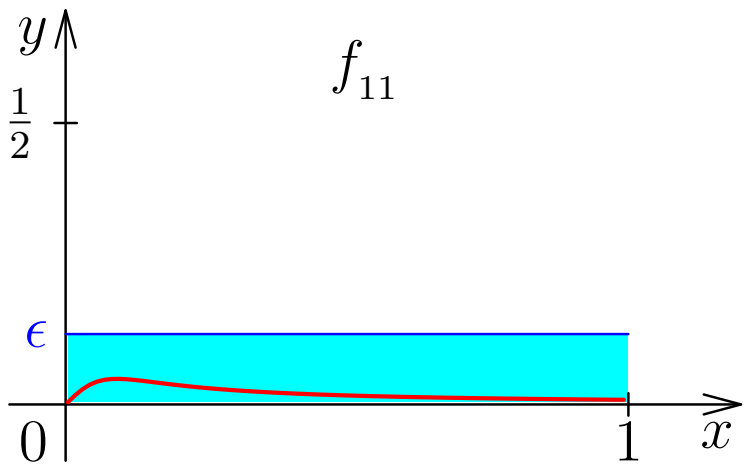
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



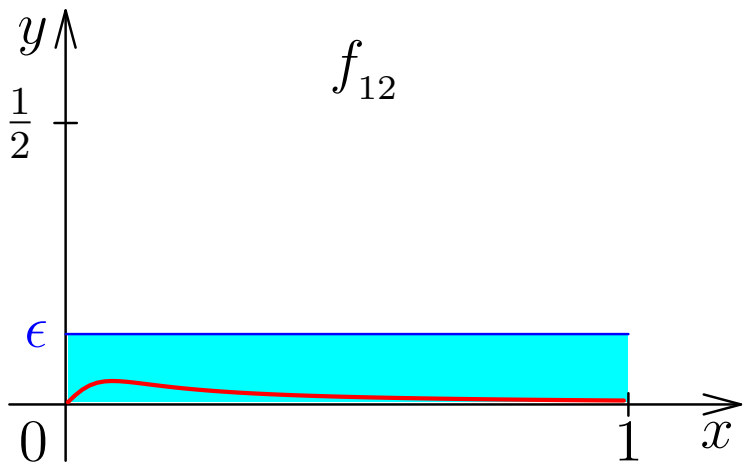
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



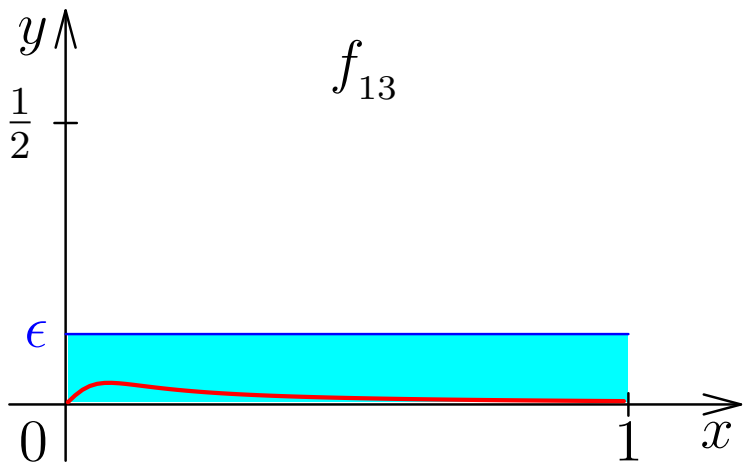
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



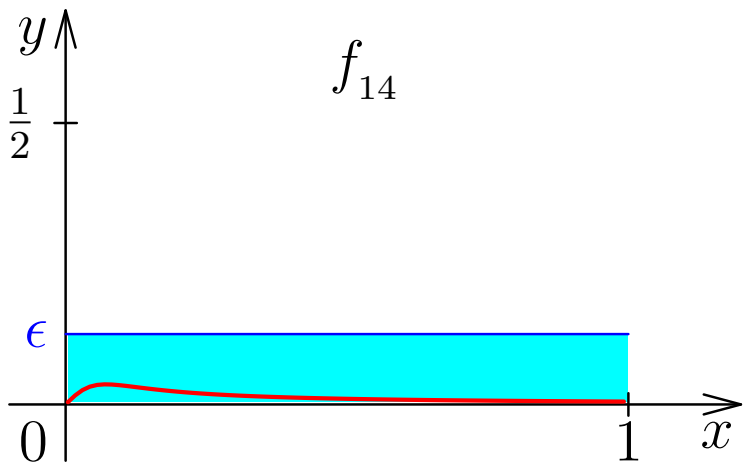
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



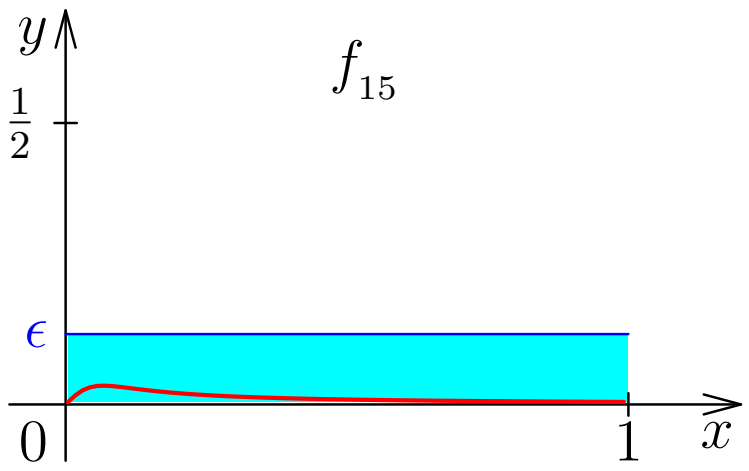
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



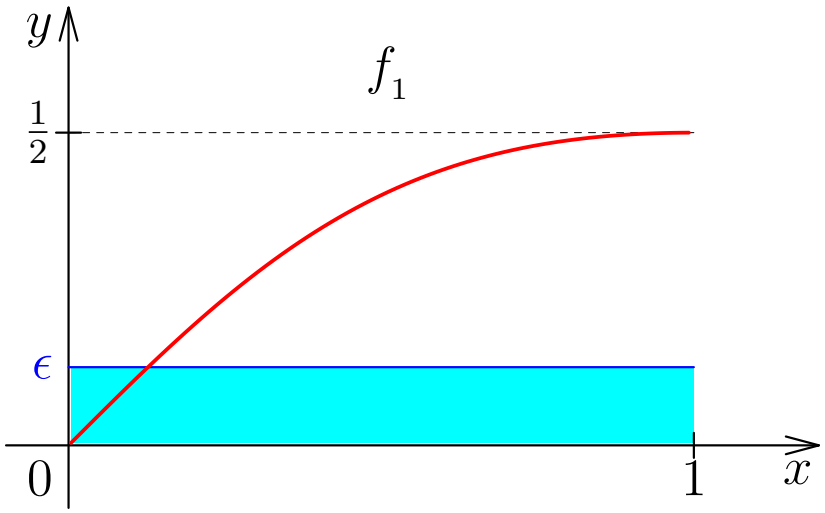
Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Potom podľa Archimedovej vlastnosti k číslu $\frac{1}{2\varepsilon}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $\frac{1}{2n_0} < \varepsilon$. Potom pre každé $x \in P$ a $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ máme

$$|f_n(x) - 0| = \frac{x}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n_0} < \varepsilon,$$

čiže $f_n \rightrightarrows_P 0$ (spojité funkcie konvergujú rovnomerne k spojitej funkcii).

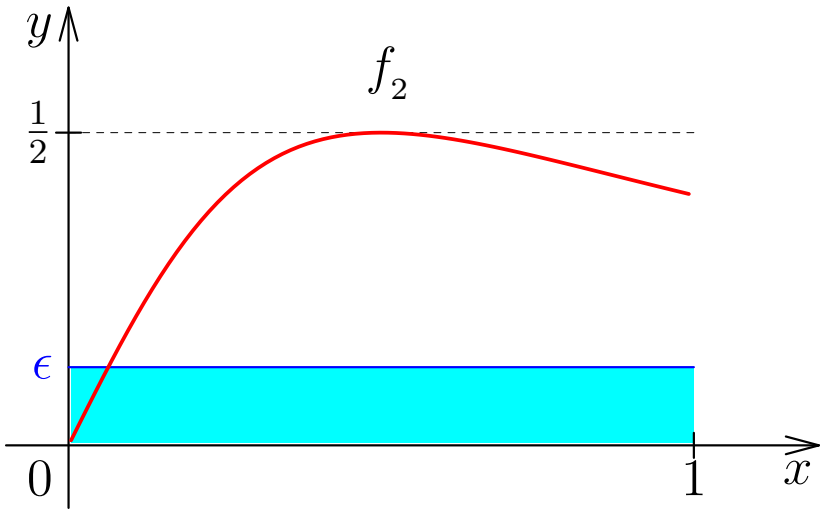
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



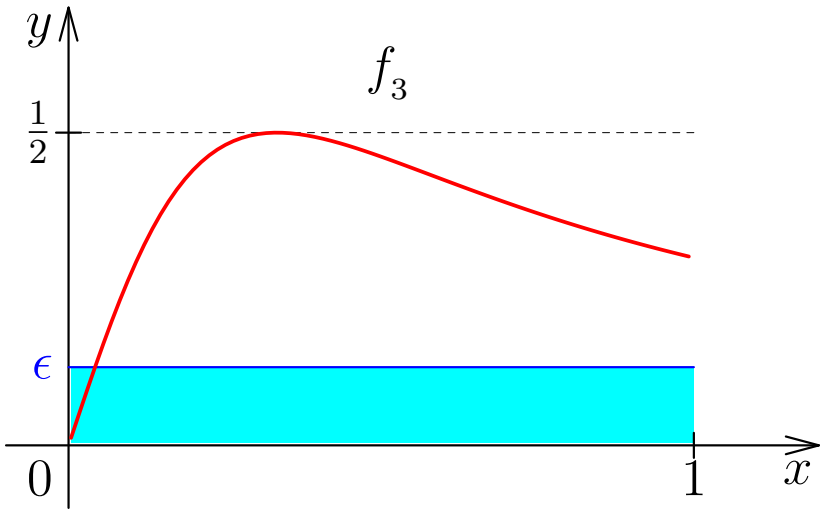
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



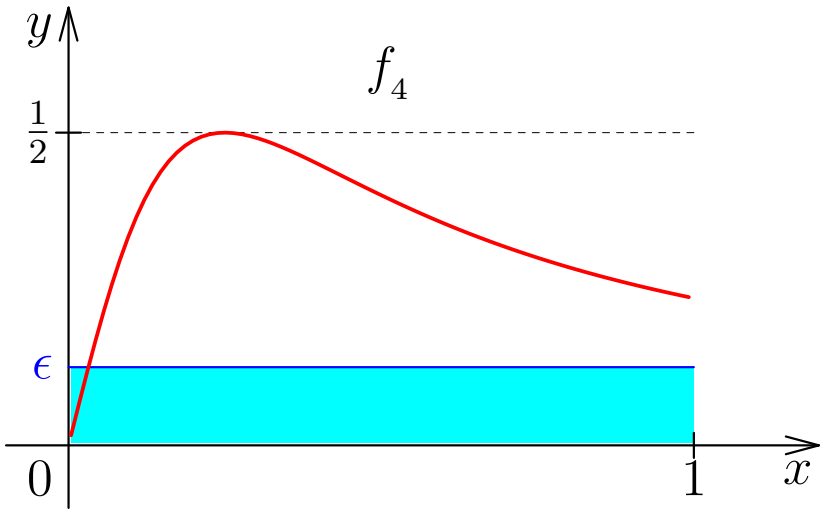
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



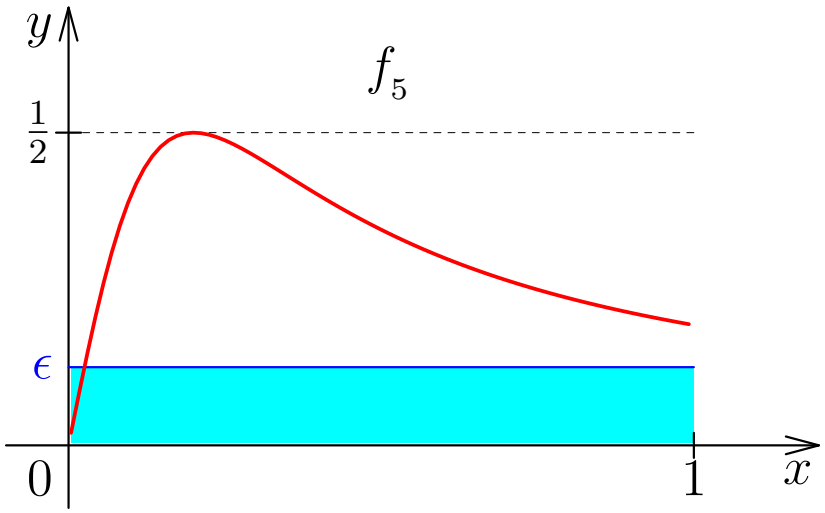
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



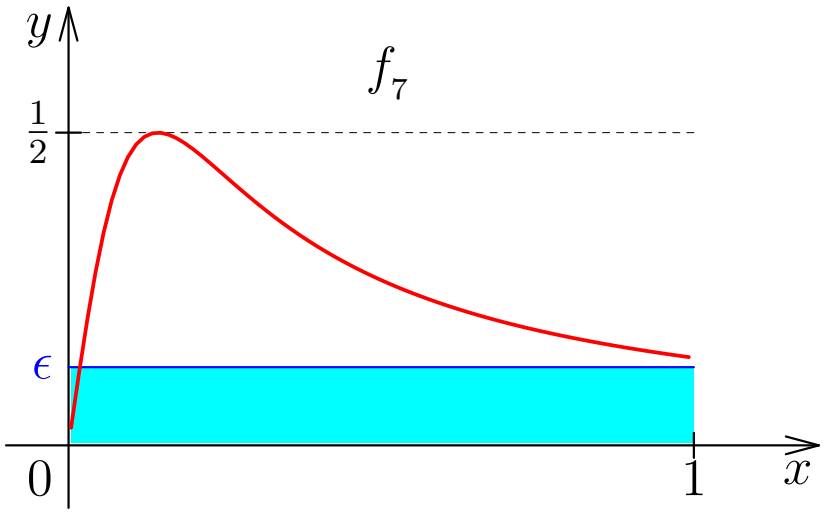
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



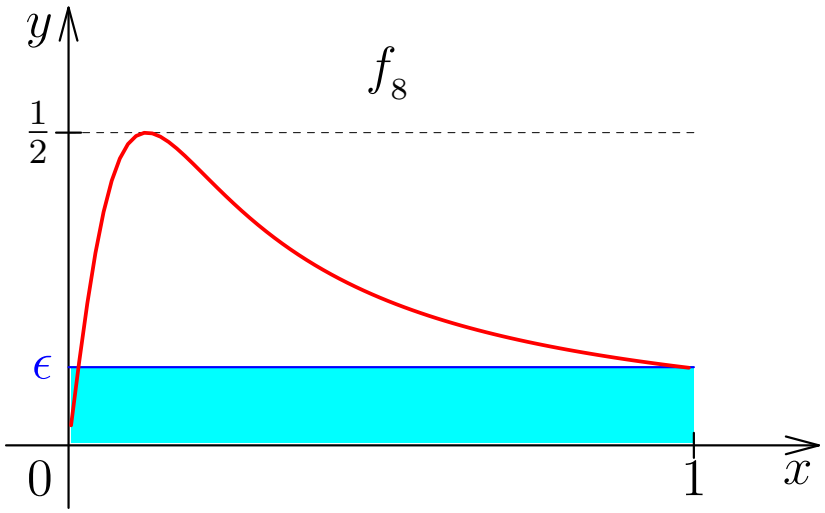
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



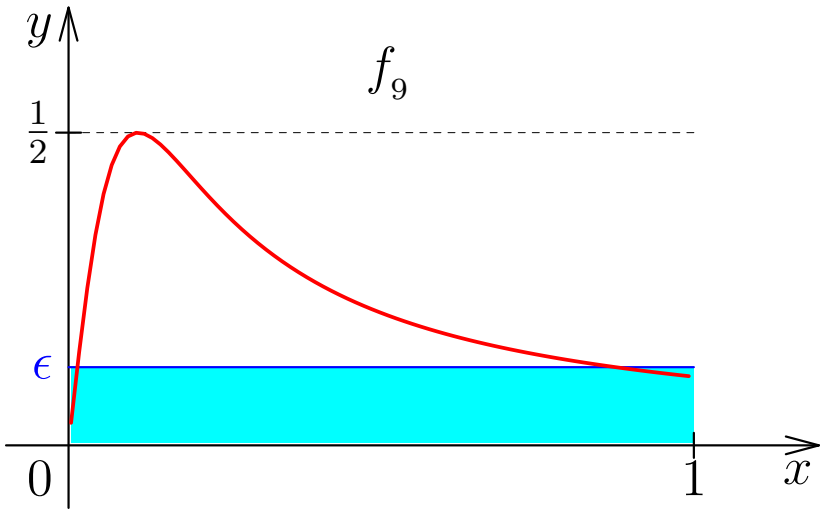
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



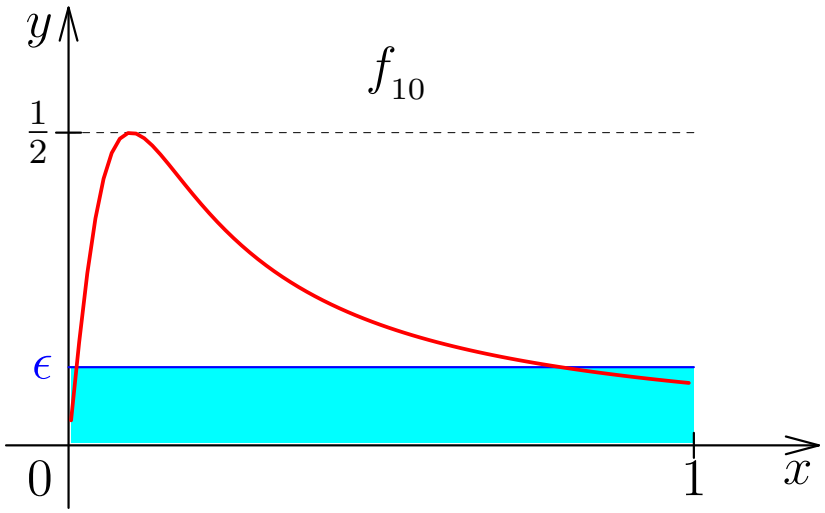
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



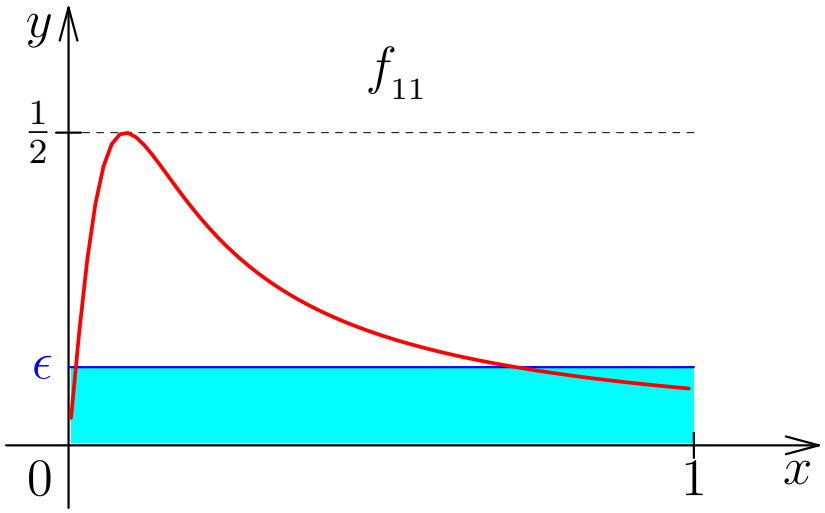
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



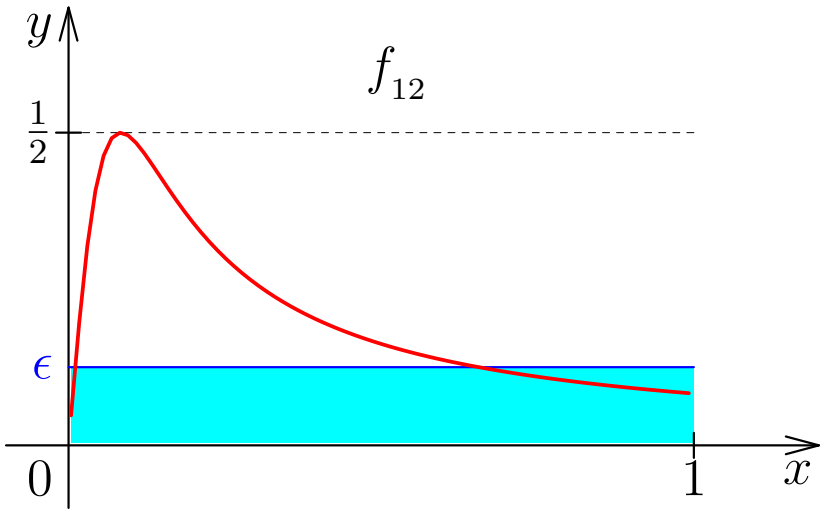
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



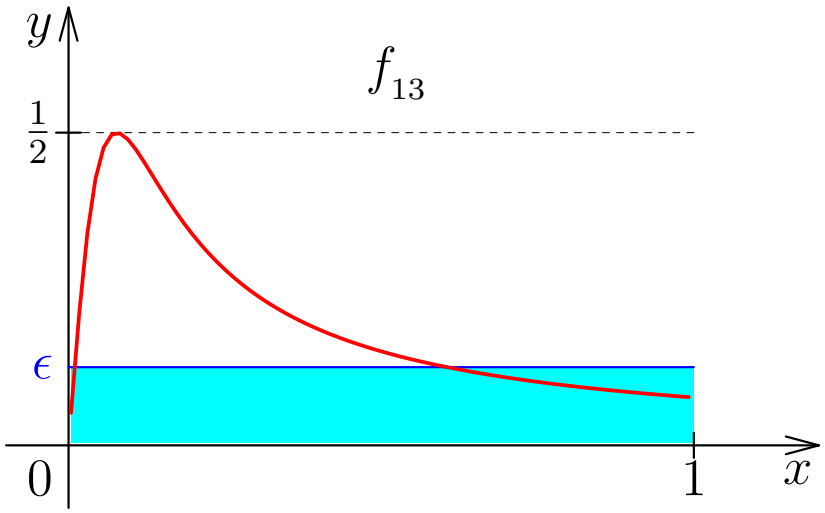
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



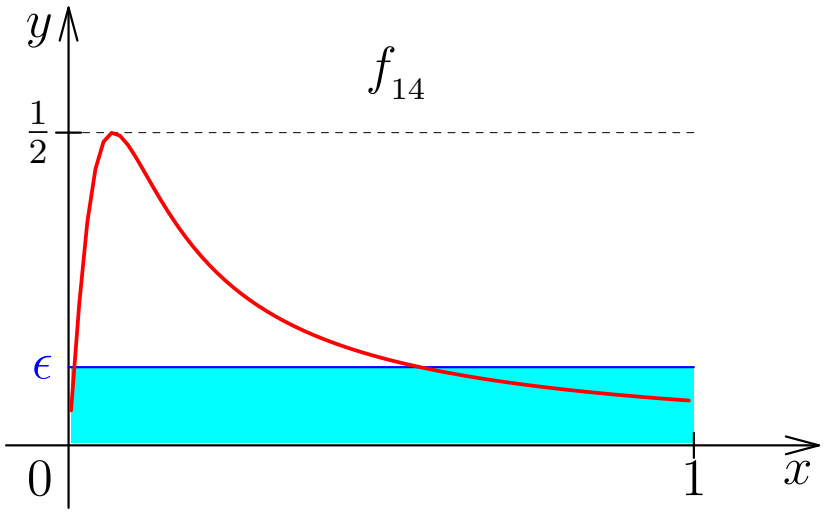
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



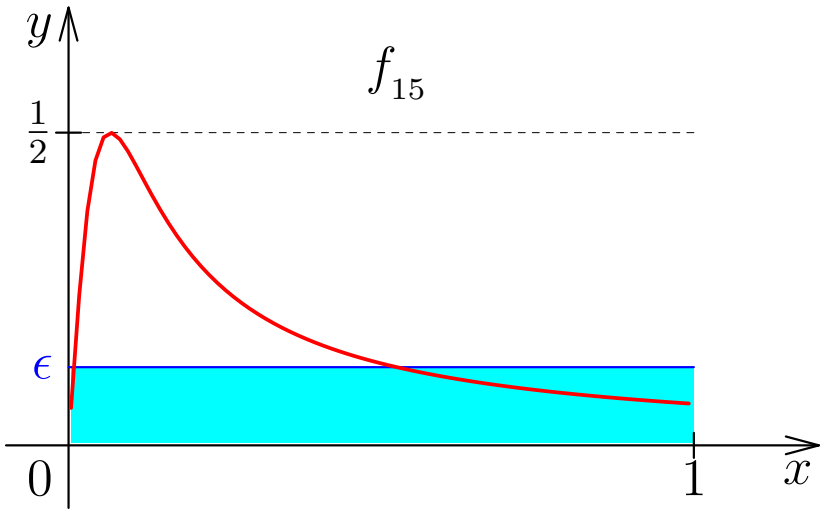
Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



Rovnomerná konvergencia – príklady

Úloha: Vyšetrite konvergenciu postupnosti $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ na množine $P = \langle 0, 1\rangle$.



Funkcie f_n nadobúdajú v bode $\frac{1}{n} \in \langle 0, 1\rangle$ svoje maximum s hodnotou $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. To znamená, že ak zoberieme nejaké $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, tak pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n = \frac{1}{n} \in \langle 0, 1\rangle$ také, že

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} > \varepsilon,$$

čiže postupnosť $(f_n)_1^\infty$ nekonverguje rovnomerne na P k nulovej funkcii, hoci je výsledok spojitá funkcia.

Nekonečné rady funkcií

Definícia – funkcionálny rad

Nekonečný rad, ktorého členy sú funkcie, sa nazýva nekonečný funkcionálny rad, zapisujeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \ldots .$$

Napríklad: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{nx}\cos nx}{4+\ln^2((n+1)x)},\ x \in \langle 1, +\infty),$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}$

Funkcionálnu postupnosť $(s_n)_1^{\infty}$ danú predpisom

$$\begin{aligned} s_1 &= f_1, \\ s_2 &= f_1 + f_2 = s_1 + f_2, \\ &\vdots \\ s_n &= f_1 + \cdots + f_n = s_{n-1} + f_n, \end{aligned}$$

nazývame postupnosť čiastočných súčtov (p.č.s.) radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Nekonečné rady funkcií

Definícia – funkcionálny rad

Nekonečný rad, ktorého členy sú funkcie, sa nazýva nekonečný funkcionálny rad, zapisujeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \ldots.$$

Napríklad: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{nx}\cos nx}{4+\ln^2((n+1)x)},\ x \in \langle 1, +\infty),$ $\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}$

Funkcionálnu postupnosť $(s_n)_1^\infty$ danú predpisom

$$\begin{aligned} s_1 &= f_1, \\ s_2 &= f_1 + f_2 = s_1 + f_2, \\ &\vdots \\ s_n &= f_1 + \cdots + f_n = s_{n-1} + f_n, \end{aligned}$$

nazývame postupnosť čiastočných súčtov (p.č.s.) radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Nekonečné rady funkcií

Definícia – funkcionálny rad

Nekonečný rad, ktorého členy sú funkcie, sa nazýva nekonečný funkcionálny rad, zapisujeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \ldots.$$

Napríklad: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{nx}\cos nx}{4+\ln^2((n+1)x)},\ x \in \langle 1, +\infty),$ $\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}$

Funkcionálnu postupnosť $(s_n)_1^{\infty}$ danú predpisom

$$\begin{aligned} s_1 &= f_1, \\ s_2 &= f_1 + f_2 = s_1 + f_2, \\ &\vdots \\ s_n &= f_1 + \cdots + f_n = s_{n-1} + f_n, \end{aligned}$$

nazývame postupnosť čiastočných súčtov (p.č.s.) radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Konvergencie nekonečných funkcionálnych radov

Definícia – bodová konvergencia funkcionálneho radu

Hovoríme, že rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ bodovo konverguje k funkcii s na množine P, akk jeho p.č.s. $(s_n)_1^{\infty}$ bodovo konverguje k funkcii s na množine P. Funkciu $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$, $x \in P$, nazývame súčtom radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in P$.

Zapisujeme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to_P s$.

Úloha: zapíšte $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to_P s$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_1(x) + \cdots + f_n(x) - s(x)| < \varepsilon\Big)$$

Obor konvergencie radu = najväčšia množina, na ktorej konverguje bodovo

Úloha: nájdite obor konvergencie radov $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, ak

(i) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, (ii) $f_n(x) = \mathrm{e}^{-xn^2}$.

Konvergencie nekonečných funkcionálnych radov

Definícia – bodová konvergencia funkcionálneho radu

Hovoríme, že rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ bodovo konverguje k funkcii s na množine P, akk jeho p.č.s. $(s_n)_1^{\infty}$ bodovo konverguje k funkcii s na množine P. Funkciu $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$, $x \in P$, nazývame súčtom radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in P$.

Zapisujeme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to_P s$.

Úloha: zapíšte $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to_P s$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_1(x) + \cdots + f_n(x) - s(x)| < \varepsilon\Big)$$

Obor konvergencie radu = najväčšia množina, na ktorej konverguje bodovo

Úloha: nájdite obor konvergencie radov $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, ak

(i) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, (ii) $f_n(x) = \mathrm{e}^{-xn^2}$.

Konvergencie nekonečných funkcionálnych radov

Definícia – bodová konvergencia funkcionálneho radu

Hovoríme, že rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ bodovo konverguje k funkcii s na množine P, akk jeho p.č.s. $(s_n)_1^{\infty}$ bodovo konverguje k funkcii s na množine P. Funkciu $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$, $x \in P$, nazývame súčtom radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in P$.

Zapisujeme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to_P s$.

Úloha: zapíšte $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to_P s$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_1(x) + \cdots + f_n(x) - s(x)| < \varepsilon\Big)$$

Obor konvergencie radu = najväčšia množina, na ktorej konverguje bodovo

Úloha: nájdite obor konvergencie radov $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, ak

(i) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$,

(ii) $f_n(x) = \mathrm{e}^{-xn^2}$.

Konvergencie nekonečných funkcionálnych radov

Definícia – bodová konvergencia funkcionálneho radu

Hovoríme, že rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ bodovo konverguje k funkcii s na množine P, akk jeho p.č.s. $(s_n)_1^{\infty}$ bodovo konverguje k funkcii s na množine P. Funkciu $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$, $x \in P$, nazývame súčtom radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in P$.

Zapisujeme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to_P s$.

Úloha: zapíšte $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to_P s$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_1(x) + \cdots + f_n(x) - s(x)| < \varepsilon\Big)$$

Obor konvergencie radu = najväčšia množina, na ktorej konverguje bodovo

Úloha: nájdite obor konvergencie radov $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, ak

(i) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$,

(ii) $f_n(x) = \mathrm{e}^{-xn^2}$.

Konvergencie nekonečných funkcionálnych radov

Definícia – bodová konvergencia funkcionálneho radu

Hovoríme, že rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ bodovo konverguje k funkcii s na množine P, akk jeho p.č.s. $(s_n)_1^{\infty}$ bodovo konverguje k funkcii s na množine P. Funkciu $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$, $x \in P$, nazývame súčtom radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in P$.

Zapisujeme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to_P s$.

Úloha: zapíšte $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to_P s$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_1(x) + \cdots + f_n(x) - s(x)| < \varepsilon\Big)$$

Obor konvergencie radu = najväčšia množina, na ktorej konverguje bodovo

Úloha: nájdite obor konvergencie radov $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, ak

(i) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$,

(ii) $f_n(x) = \mathrm{e}^{-xn^2}$.

Konvergencie nekonečných funkcionálnych radov

Definícia – bodová konvergencia funkcionálneho radu

Hovoríme, že rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ bodovo konverguje k funkcii s na množine P, akk jeho p.č.s. $(s_n)_1^{\infty}$ bodovo konverguje k funkcii s na množine P. Funkciu $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$, $x \in P$, nazývame súčtom radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in P$.

Zapisujeme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to_P s$.

Úloha: zapíšte $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to_P s$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in P)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_1(x) + \cdots + f_n(x) - s(x)| < \varepsilon\Big)$$

Obor konvergencie radu = najväčšia množina, na ktorej konverguje bodovo

Úloha: nájdite obor konvergencie radov $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, ak

(i) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$,

(ii) $f_n(x) = \mathrm{e}^{-xn^2}$.

Konvergencie nekonečných funkcionálnych radov

Definícia – rovnomerná konvergencia funkcionálneho radu

Hovoríme, že rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje k svojmu súčtu s na množine P, akk postupnosť $(s_n)_1^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov rovnomerne konverguje k funkcii s na množine P. Zapisujeme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows_P s$.

Úloha: zapíšte $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows_P s$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_1(x) + \cdots + f_n(x) - s(x)| < \varepsilon\Big)$$

Tvrdenie VIII.1

Rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na množine P práve vtedy, keď postupnosť zvyškov $(R_n)_1^{\infty}$ rovnomerne konverguje k 0 na P.

Úloha: vyšetrite rovnomernú konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

Konvergencie nekonečných funkcionálnych radov

Definícia – rovnomerná konvergencia funkcionálneho radu

Hovoríme, že rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje k svojmu súčtu s na množine P, akk postupnosť $(s_n)_1^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov rovnomerne konverguje k funkcii s na množine P. Zapisujeme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows_P s$.

Úloha: zapíšte $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows_P s$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_1(x) + \cdots + f_n(x) - s(x)| < \varepsilon\Big)$$

Tvrdenie VIII.1

Rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na množine P práve vtedy, keď postupnosť zvyškov $(R_n)_1^{\infty}$ rovnomerne konverguje k 0 na P.

Úloha: vyšetrite rovnomernú konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

Konvergencie nekonečných funkcionálnych radov

Definícia – rovnomerná konvergencia funkcionálneho radu

Hovoríme, že rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje k svojmu súčtu s na množine P, akk postupnosť $(s_n)_1^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov rovnomerne konverguje k funkcii s na množine P. Zapisujeme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows_P s$.

Úloha: zapíšte $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows_P s$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_1(x) + \cdots + f_n(x) - s(x)| < \varepsilon\Big)$$

Tvrdenie VIII.1

Rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na množine P práve vtedy, keď postupnosť zvyškov $(R_n)_1^{\infty}$ rovnomerne konverguje k 0 na P.

Úloha: vyšetrite rovnomernú konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

Konvergencie nekonečných funkcionálnych radov

Definícia – rovnomerná konvergencia funkcionálneho radu

Hovoríme, že rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje k svojmu súčtu s na množine P, akk postupnosť $(s_n)_1^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov rovnomerne konverguje k funkcii s na množine P. Zapisujeme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows_P s$.

Úloha: zapíšte $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows_P s$ ako kvantifikovaný výrok!

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall x \in P)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_1(x) + \cdots + f_n(x) - s(x)| < \varepsilon\Big)$$

Tvrdenie VIII.1

Rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na množine P práve vtedy, keď postupnosť zvyškov $(R_n)_1^{\infty}$ rovnomerne konverguje k 0 na P.

Úloha: vyšetrite rovnomernú konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

Mocninové rady – historické okienko

- niektoré mocninové rady (ako napr. geometrický rad) boli intuitívne známe už v starovekom Grécku;
- indický matematik MADHAVA (14. stor.) je považovaný za predchodcu modernej koncepcie mocninových radov – zaslúžil sa o štúdium konvergenčných kritérií;
- v Európe JAMES GREGORY ako prvý vytvoril niekoľko mocninových radov v polovici 17. storočia – od neho pochádzajú pojmy konvergencia a divergencia radu (1668);
- prvé systematické použitie učinil ISAAC NEWTON, podľa ktorého to bol jeho najväčší matematický objav: ľubovoľná rovnica (algebrická, diferenciálna, atď.) sa dá riešiť pomocou substituovania mocninového radu s neurčitými koeficientmi, ktoré sa dajú presne určiť;
- v roku 1715 vytvoril BROOK TAYLOR všeobecnú metódu pre konštrukciu Taylorových radov;
- matematici 18. storočia (Euler, d'Alembert, MacLaurin, Lagrange, atď.) mocninové rady začali používať vo veľkom na riešenie všetkých druhov problémov – prevažne formálne manipulácie, častokrát s nesprávnym výsledkom!
- rigorózna teória konvergencie však bola učinená až Cauchym a Abelom v 20. rokoch 19. storočia;

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Definícia (mocninového radu)

Rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, kde $a, x \in \mathbb{R}$ a $a_n \in \mathbb{R}$ nazývame mocninový rad.

Pričom

- a_n nazývame n-tý koeficient radu,
- a nazývame stred radu,
- $a_n(x-a)^n$ nazývame n-tý člen radu.

Pozorovanie: Geometrický rad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ je mocninový rad so stredom $a = 0$ a koeficientmi $a_n \equiv 1$, ktorý je konvergentný len pre $x \in (-1, 1)$ a pre také x má súčet rovný $\frac{1}{1-x}$, t.j.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Provokačná otázka: Prečo uvažujeme indexy len nezáporné celé čísla? Nemôžeme uvažovať všetky celé čísla?

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Definícia (mocninového radu)

Rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, kde $a, x \in \mathbb{R}$ a $a_n \in \mathbb{R}$ nazývame mocninový rad.

Pričom

- a_n nazývame n-tý koeficient radu,
- a nazývame stred radu,
- $a_n(x-a)^n$ nazývame n-tý člen radu.

Pozorovanie: Geometrický rad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ je mocninový rad so stredom $a = 0$ a koeficientmi $a_n \equiv 1$, ktorý je konvergentný len pre $x \in (-1, 1)$ a pre také x má súčet rovný $\frac{1}{1-x}$, t.j.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Provokačná otázka: Prečo uvažujeme indexy len nezáporné celé čísla? Nemôžeme uvažovať všetky celé čísla?

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Definícia (mocninového radu)

Rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, kde $a, x \in \mathbb{R}$ a $a_n \in \mathbb{R}$ nazývame mocninový rad.

Pričom

- a_n nazývame n-tý koeficient radu,
- a nazývame stred radu,
- $a_n(x-a)^n$ nazývame n-tý člen radu.

Pozorovanie: Geometrický rad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ je mocninový rad so stredom $a = 0$ a koeficientmi $a_n \equiv 1$, ktorý je konvergentný len pre $x \in (-1, 1)$ a pre také x má súčet rovný $\frac{1}{1-x}$, t.j.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Provokačná otázka: Prečo uvažujeme indexy len nezáporné celé čísla? Nemôžeme uvažovať všetky celé čísla?

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Definícia (mocninového radu)

Rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, kde $a, x \in \mathbb{R}$ a $a_n \in \mathbb{R}$ nazývame mocninový rad.

Pričom

- a_n nazývame n-tý koeficient radu,
- a nazývame stred radu,
- $a_n(x-a)^n$ nazývame n-tý člen radu.

Pozorovanie: Geometrický rad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ je mocninový rad so stredom $a = 0$ a koeficientmi $a_n \equiv 1$, ktorý je konvergentný len pre $x \in (-1, 1)$ a pre také x má súčet rovný $\frac{1}{1-x}$, t.j.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Provokačná otázka: Prečo uvažujeme indexy len nezáporné celé čísla? Nemôžeme uvažovať všetky celé čísla?

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Definícia (oboru konvergencie)

Oborom konvergencie mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ nazývame množinu

$$\left\{x \in \mathbb{R};\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ konverguje}\right\}.$$

Pozorovania:

- Obor konvergencie mocninového radu je vždy neprázdna množina, t.j. obsahuje aspoň stred mocninového radu.
- Obor konvergencie geometrického radu je interval, ktorý je symetrický vzhľadom na stred tohto radu.

Platí to pre každý mocninový rad?

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Definícia (oboru konvergencie)

Oborom konvergencie mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ nazývame množinu

$$\left\{x \in \mathbb{R};\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ konverguje}\right\}.$$

Pozorovania:

- Obor konvergencie mocninového radu je vždy neprázdna množina, t.j. obsahuje aspoň stred mocninového radu.
- Obor konvergencie geometrického radu je interval, ktorý je symetrický vzhľadom na stred tohto radu.

Platí to pre každý mocninový rad?

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Definícia (oboru konvergencie)

Oborom konvergencie mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ nazývame množinu

$$\left\{x \in \mathbb{R};\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ konverguje}\right\}.$$

Pozorovania:

- Obor konvergencie mocninového radu je vždy neprázdna množina, t.j. obsahuje aspoň stred mocninového radu.
- Obor konvergencie geometrického radu je interval, ktorý je symetrický vzhľadom na stred tohto radu.

Platí to pre každý mocninový rad?

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Definícia (oboru konvergencie)

Oborom konvergencie mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ nazývame množinu

$$\left\{x \in \mathbb{R};\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ konverguje}\right\}.$$

Pozorovania:

- Obor konvergencie mocninového radu je vždy neprázdna množina, t.j. obsahuje aspoň stred mocninového radu.
- Obor konvergencie geometrického radu je interval, ktorý je symetrický vzhľadom na stred tohto radu.

Platí to pre každý mocninový rad?

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Dohoda (na strede nezáleží?): Substitúciou $x - a = y$ prevedieme rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ so stredom v bode a, na rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ so stredom v bode 0.

Teda vyšetrovanie vlastností týchto radov je ekvivalentné, pre jednoduchosť ďalej vyšetrujeme vlastnosti mocninového radu so stredom v bode $a = 0$, t.j. radov tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Označenie: Pre skrátenie ďalších textov budeme mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ označovať (MR).

Zaujímajú nás dva okruhy problémov:

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Dohoda (na strede nezáleží?): Substitúciou $x - a = y$ prevedieme rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ so stredom v bode a, na rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ so stredom v bode 0.

Teda vyšetrovanie vlastností týchto radov je ekvivalentné, pre jednoduchosť ďalej vyšetrujeme vlastnosti mocninového radu so stredom v bode $a = 0$, t.j. radov tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Označenie: Pre skrátenie ďalších textov budeme mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ označovať (MR).

Zaujímajú nás dva okruhy problémov:

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Dohoda (na strede nezáleží?): Substitúciou $x - a = y$ prevedieme rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ so stredom v bode a, na rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ so stredom v bode 0.

Teda vyšetrovanie vlastností týchto radov je ekvivalentné, pre jednoduchosť ďalej vyšetrujeme vlastnosti mocninového radu so stredom v bode $a = 0$, t.j. radov tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Označenie: Pre skrátenie ďalších textov budeme mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ označovať (MR).

Zaujímajú nás dva okruhy problémov:

(A) *Aký je obor konvergencie radu (MR), ako ho nájsť?*

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Dohoda (na strede nezáleží?): Substitúciou $x - a = y$ prevedieme rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ so stredom v bode a, na rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ so stredom v bode 0.

Teda vyšetrovanie vlastností týchto radov je ekvivalentné, pre jednoduchosť ďalej vyšetrujeme vlastnosti mocninového radu so stredom v bode $a = 0$, t.j. radov tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Označenie: Pre skrátenie ďalších textov budeme mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ označovať (MR).

Zaujímajú nás dva okruhy problémov:

(A) *Aký je obor konvergencie radu (MR), ako ho nájsť?*

(B) *Aké vlastnosti má funkcia, ktorá je súčtom radu (MR)?*

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Dohoda (na strede nezáleží?): Substitúciou $x - a = y$ prevedieme rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ so stredom v bode a, na rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ so stredom v bode 0.

Teda vyšetrovanie vlastností týchto radov je ekvivalentné, pre jednoduchosť ďalej vyšetrujeme vlastnosti mocninového radu so stredom v bode $a = 0$, t.j. radov tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Označenie: Pre skrátenie ďalších textov budeme mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ označovať (MR).

Zaujímajú nás dva okruhy problémov:

(A) *Aký je obor konvergencie radu* (MR)*, ako ho nájsť?*

(B) *Aké vlastnosti má funkcia, ktorá je súčtom radu* (MR)*?*

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Dohoda (na strede nezáleží?): Substitúciou $x - a = y$ prevedieme rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ so stredom v bode a, na rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ so stredom v bode 0.

Teda vyšetrovanie vlastností týchto radov je ekvivalentné, pre jednoduchosť ďalej vyšetrujeme vlastnosti mocninového radu so stredom v bode $a = 0$, t.j. radov tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Označenie: Pre skrátenie ďalších textov budeme mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ označovať (MR).

Zaujímajú nás dva okruhy problémov:

(A) *Aký je obor konvergencie radu* (MR)*, ako ho nájsť?*

(B) *Aké vlastnosti má funkcia, ktorá je súčtom radu* (MR)*?*

(A) Niekoľko pomocných tvrdení

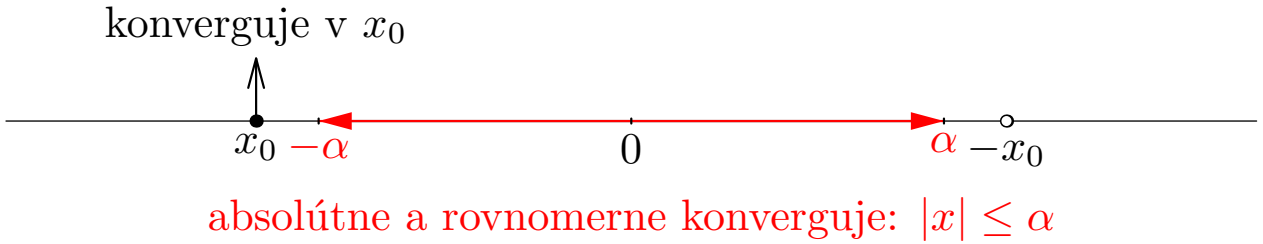
Lema VIII.2

Nech rad (MR) konverguje v bode $x_0 \neq 0$ a nech $0 < \alpha < |x_0|$. Potom tento rad absolútne konverguje v každom $x \in \langle -\alpha, \alpha \rangle$ a konverguje rovnomerne na intervale $\langle -\alpha, \alpha \rangle$.

(A) Niekoľko pomocných tvrdení

Lema VIII.2

Nech rad (MR) konverguje v bode $x_0 \neq 0$ a nech $0 < \alpha < |x_0|$. Potom tento rad absolútne konverguje v každom $x \in \langle -\alpha, \alpha \rangle$ a konverguje rovnomerne na intervale $\langle -\alpha, \alpha \rangle$.



obr.11

(A) Niekoľko pomocných tvrdení

Lema VIII.2

Nech rad (MR) konverguje v bode $x_0 \neq 0$ a nech $0 < \alpha < |x_0|$. Potom tento rad absolútne konverguje v každom $x \in \langle -\alpha, \alpha \rangle$ a konverguje rovnomerne na intervale $\langle -\alpha, \alpha \rangle$.

Lema VIII.3

Nech rad (MR) konverguje v bode $x_0 \neq 0$ a nech $|y| < |x_0|$. Potom rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ absolútne konverguje.

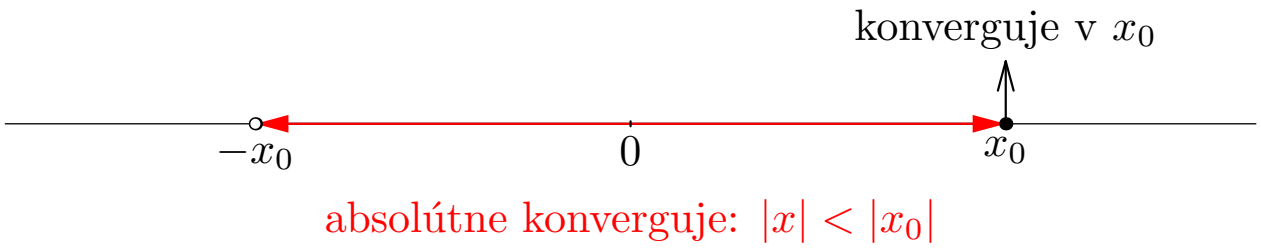
(A) Niekoľko pomocných tvrdení

Lema VIII.2

Nech rad (MR) konverguje v bode $x_0 \neq 0$ a nech $0 < \alpha < |x_0|$. Potom tento rad absolútne konverguje v každom $x \in \langle -\alpha, \alpha \rangle$ a konverguje rovnomerne na intervale $\langle -\alpha, \alpha \rangle$.

Lema VIII.3

Nech rad (MR) konverguje v bode $x_0 \neq 0$ a nech $|y| < |x_0|$. Potom rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ absolútne konverguje.



obr.12

(A) Niekoľko pomocných tvrdení

Lema VIII.2

Nech rad (MR) konverguje v bode $x_0 \neq 0$ a nech $0 < \alpha < |x_0|$. Potom tento rad absolútne konverguje v každom $x \in \langle -\alpha, \alpha \rangle$ a konverguje rovnomerne na intervale $\langle -\alpha, \alpha \rangle$.

Lema VIII.3

Nech rad (MR) konverguje v bode $x_0 \neq 0$ a nech $|y| < |x_0|$. Potom rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ absolútne konverguje.

Lema VIII.4

Nech rad (MR) diverguje alebo relatívne konverguje v bode $x_1 \neq 0$. Potom diverguje v každom $x \in \mathbb{R}$ takom, že $|x| > |x_1|$.

(A) Niekoľko pomocných tvrdení

Lema VIII.2

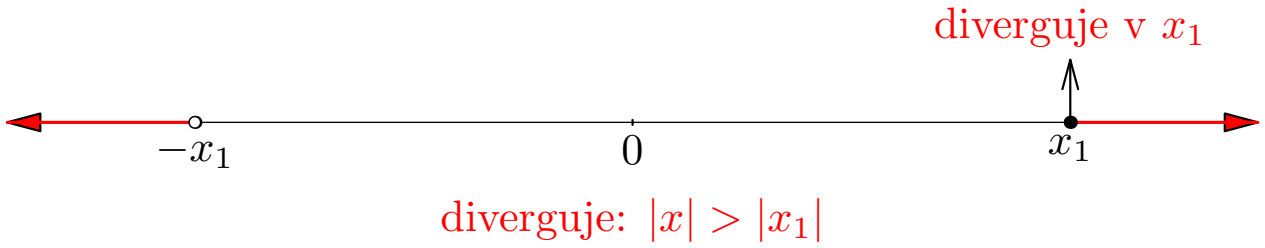
Nech rad (MR) konverguje v bode $x_0 \neq 0$ a nech $0 < \alpha < |x_0|$. Potom tento rad absolútne konverguje v každom $x \in \langle -\alpha, \alpha \rangle$ a konverguje rovnomerne na intervale $\langle -\alpha, \alpha \rangle$.

Lema VIII.3

Nech rad (MR) konverguje v bode $x_0 \neq 0$ a nech $|y| < |x_0|$. Potom rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ absolútne konverguje.

Lema VIII.4

Nech rad (MR) diverguje alebo relatívne konverguje v bode $x_1 \neq 0$. Potom diverguje v každom $x \in \mathbb{R}$ takom, že $|x| > |x_1|$.



(A) Polomer konvergencie

Even if we consider the simplest case, there is not in all mathematics a single infinite series whose sum has been rigorously determined. In other words, the most important areas of mathematics prove to be without a foundation.

Abel: *Ouevres* (1826)

Definícia (polomeru konvergencie)

1. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) nie je $\mathbb{R}$, tak polomerom konvergencie mocninového radu nazývame číslo $\rho \geq 0$ také, že

- pre $|x| < \rho$ mocninový rad konverguje,
- pre $|x| > \rho$ mocninový rad diverguje.

2. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) je $\mathbb{R}$, tak číslo $\rho = +\infty$ nazývame jeho polomer konvergencie.

Pozorovanie: Z definície polomeru konvergencie je zrejmé, že číslo $\rho \geq 0$ súvisí s existenciou suprema množiny

$$A = \left\{ x \geq 0, \text{ takých, že rad} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konverguje} \right\}.$$

Tvrdenie VIII.5

Mocninový rad (MR) má vždy polomer konvergencie.

(A) Polomer konvergencie

Even if we consider the simplest case, there is not in all mathematics a single infinite series whose sum has been rigorously determined. In other words, the most important areas of mathematics prove to be without a foundation.

Abel: *Ouevres* (1826)

Definícia (polomeru konvergencie)

1. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) nie je $\mathbb{R}$, tak polomerom konvergencie mocninového radu nazývame číslo $\rho \geq 0$ také, že

   - pre $|x| < \rho$ mocninový rad konverguje,
   - pre $|x| > \rho$ mocninový rad diverguje.

2. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) je $\mathbb{R}$, tak číslo $\rho = +\infty$ nazývame jeho polomer konvergencie.

Pozorovanie: Z definície polomeru konvergencie je zrejmé, že číslo $\rho \geq 0$ súvisí s existenciou suprema množiny

$$A = \left\{ x \geq 0, \text{ takých, že rad} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konverguje} \right\}.$$

Tvrdenie VIII.5

Mocninový rad (MR) má vždy polomer konvergencie.

(A) Polomer konvergencie

Even if we consider the simplest case, there is not in all mathematics a single infinite series whose sum has been rigorously determined. In other words, the most important areas of mathematics prove to be without a foundation.

Abel: *Ouevres* (1826)

Definícia (polomeru konvergencie)

1. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) nie je $\mathbb{R}$, tak polomerom konvergencie mocninového radu nazývame číslo $\rho \geq 0$ také, že

- pre $|x| < \rho$ mocninový rad konverguje,
- pre $|x| > \rho$ mocninový rad diverguje.

2. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) je $\mathbb{R}$, tak číslo $\rho = +\infty$ nazývame jeho polomer konvergencie.

Pozorovanie: Z definície polomeru konvergencie je zrejmé, že číslo $\rho \geq 0$ súvisí s existenciou suprema množiny

$$A = \left\{ x \geq 0, \text{ takých, že rad} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konverguje} \right\}.$$

Tvrdenie VIII.5

Mocninový rad (MR) má vždy polomer konvergencie.

(A) Polomer konvergencie

Even if we consider the simplest case, there is not in all mathematics a single infinite series whose sum has been rigorously determined. In other words, the most important areas of mathematics prove to be without a foundation.

Abel: *Ouevres* (1826)

Definícia (polomeru konvergencie)

1. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) nie je $\mathbb{R}$, tak polomerom konvergencie mocninového radu nazývame číslo $\rho \geq 0$ také, že

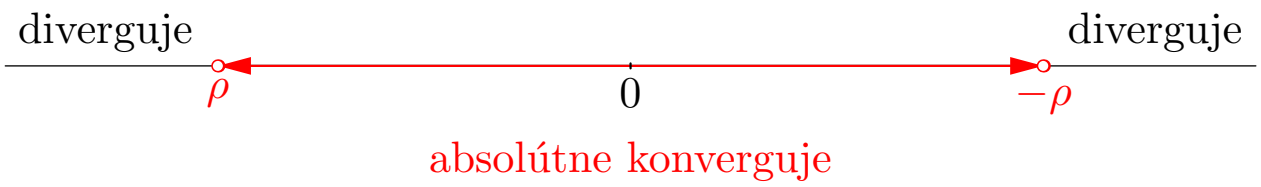
- pre $|x| < \rho$ mocninový rad konverguje,
- pre $|x| > \rho$ mocninový rad diverguje.

2. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) je $\mathbb{R}$, tak číslo $\rho = +\infty$ nazývame jeho polomer konvergencie.

Ponaučenie: Z uvedenej definície vyplýva, že:

(i) číslo ρ je jednoznačne určené;
(ii) ak ρ je polomer konvergencie radu (MR), potom pre $x \in (-\rho, \rho)$ rad konverguje a pre $x \in (-\infty, -\rho) \cup (\rho, +\infty)$ rad diverguje.

Upozornenie: Nič sa nehovorí o konvergencii radu v krajných bodoch $x = \rho$ a $x = -\rho$!



(A) Polomer konvergencie

Even if we consider the simplest case, there is not in all mathematics a single infinite series whose sum has been rigorously determined. In other words, the most important areas of mathematics prove to be without a foundation.

Abel: *Ouevres* (1826)

Definícia (polomeru konvergencie)

1. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) nie je $\mathbb{R}$, tak polomerom konvergencie mocninového radu nazývame číslo $\rho \geq 0$ také, že

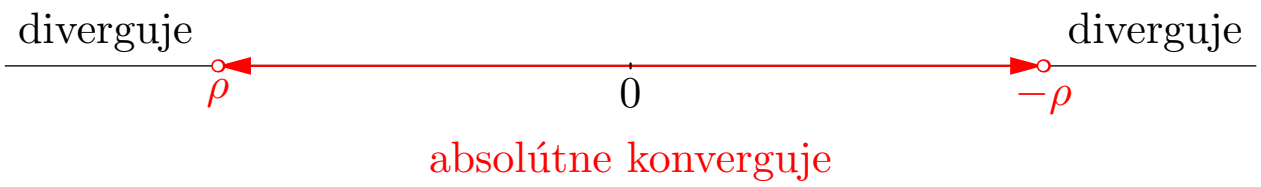
- pre $|x| < \rho$ mocninový rad konverguje,
- pre $|x| > \rho$ mocninový rad diverguje.

2. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) je $\mathbb{R}$, tak číslo $\rho = +\infty$ nazývame jeho polomer konvergencie.

Ponaučenie: Z uvedenej definície vyplýva, že:

(i) číslo ρ je jednoznačne určené;
(ii) ak ρ je polomer konvergencie radu (MR), potom pre $x \in (-\rho, \rho)$ rad konverguje a pre $x \in (-\infty, -\rho) \cup (\rho, +\infty)$ rad diverguje.

Upozornenie: Nič sa nehovorí o konvergencii radu v krajných bodoch $x = \rho$ a $x = -\rho$!



(A) Polomer konvergencie

Even if we consider the simplest case, there is not in all mathematics a single infinite series whose sum has been rigorously determined. In other words, the most important areas of mathematics prove to be without a foundation.

Abel: *Ouevres* (1826)

Definícia (polomeru konvergencie)

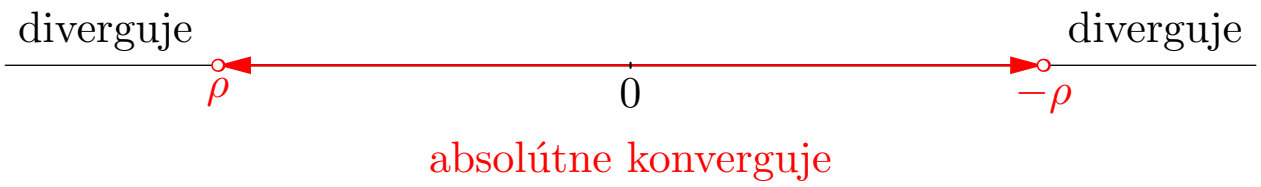
1. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) nie je $\mathbb{R}$, tak polomerom konvergencie mocninového radu nazývame číslo $\rho \geq 0$ také, že

- pre $|x| < \rho$ mocninový rad konverguje,
- pre $|x| > \rho$ mocninový rad diverguje.

2. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) je $\mathbb{R}$, tak číslo $\rho = +\infty$ nazývame jeho polomer konvergencie.

Zhrnutie:
(I) Obor konvergencie radu (MR) môže byť interval $(-\rho, \rho)$, $\langle -\rho, \rho)$, $(-\rho, \rho\rangle$, $\langle -\rho, \rho\rangle$, resp. $(-\infty, +\infty)$.

(II) V prípade mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ so stredom v bode a oborom konvergencie môže byť interval $(a-\rho, a+\rho)$, $\langle a-\rho, a+\rho)$, $(a-\rho, a+\rho\rangle$, $\langle a-\rho, a+\rho\rangle$, resp. $(-\infty, +\infty)$.



(A) Polomer konvergencie

Even if we consider the simplest case, there is not in all mathematics a single infinite series whose sum has been rigorously determined. In other words, the most important areas of mathematics prove to be without a foundation.

Abel: *Ouevres* (1826)

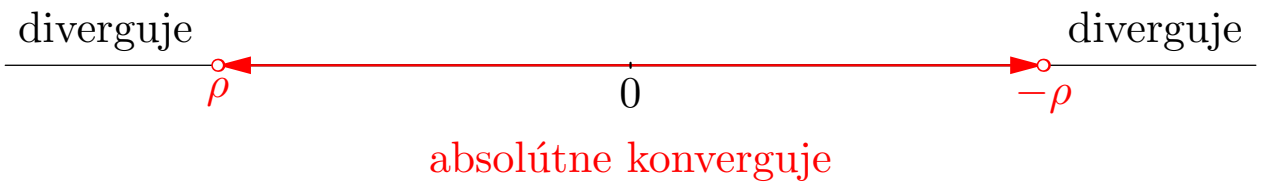
Definícia (polomeru konvergencie)

1. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) nie je $\mathbb{R}$, tak polomerom konvergencie mocninového radu nazývame číslo $\rho \geq 0$ také, že

- pre $|x| < \rho$ mocninový rad konverguje,
- pre $|x| > \rho$ mocninový rad diverguje.

2. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) je $\mathbb{R}$, tak číslo $\rho = +\infty$ nazývame jeho polomer konvergencie.

Zhrnutie:
(I) Obor konvergencie radu (MR) môže byť interval $(-\rho, \rho)$, $\langle -\rho, \rho)$, $(-\rho, \rho\rangle$, $\langle -\rho, \rho\rangle$, resp. $(-\infty, +\infty)$.
(II) V prípade mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ so stredom v bode a oborom konvergencie môže byť interval $(a-\rho, a+\rho)$, $\langle a-\rho, a+\rho)$, $(a-\rho, a+\rho\rangle$, $\langle a-\rho, a+\rho\rangle$, resp. $(-\infty, +\infty)$.



(A) Polomer konvergencie – príklady

Let

$$a_0, a_1 x, a_2 x^2, \ldots, a_n x^n, \ldots \tag{1}$$

be a series ordered according to the ascending integer powers of the variable x, where $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ denote constant coefficients, positive or negative. Furthermore, let A be the quantity that corresponds to the quantity k of the previous section... As a consequence, series (1) is convergent ... if the numerical value of the variable x is less than $\frac{1}{A}$. On the other hand, series (1) is divergent if the numerical value of x is greater than $\frac{1}{A}$.

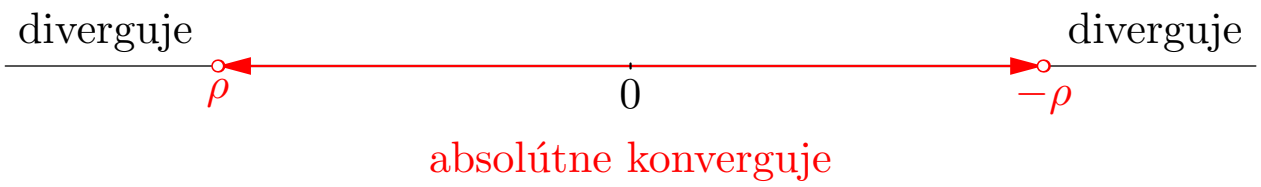
Cauchy: *Cours d'analyse* (1821)

Úloha: Nájdite polomer konvergencie mocninových radov:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$;

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;



(A) Polomer konvergencie – príklady

Let

$$a_0, a_1 x, a_2 x^2, \ldots, a_n x^n, \ldots \tag{1}$$

be a series ordered according to the ascending integer powers of the variable x, where $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ denote constant coefficients, positive or negative. Furthermore, let A be the quantity that corresponds to the quantity k of the previous section... As a consequence, series (1) is convergent ... if the numerical value of the variable x is less than $\frac{1}{A}$. On the other hand, series (1) is divergent if the numerical value of x is greater than $\frac{1}{A}$.

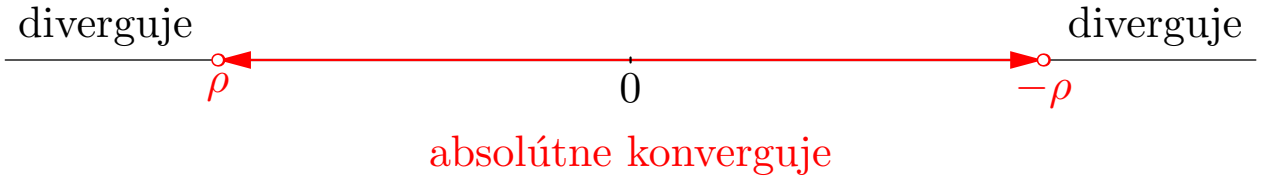
Cauchy: *Cours d'analyse* (1821)

Úloha: Nájdite polomer konvergencie mocninových radov:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$;

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;



(A) Polomer konvergencie – príklady

Let

$$a_0, a_1 x, a_2 x^2, \ldots, a_n x^n, \ldots \tag{1}$$

be a series ordered according to the ascending integer powers of the variable x, where $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ denote constant coefficients, positive or negative. Furthermore, let A be the quantity that corresponds to the quantity k of the previous section... As a consequence, series (1) is convergent ... if the numerical value of the variable x is less than $\frac{1}{A}$. On the other hand, series (1) is divergent if the numerical value of x is greater than $\frac{1}{A}$.

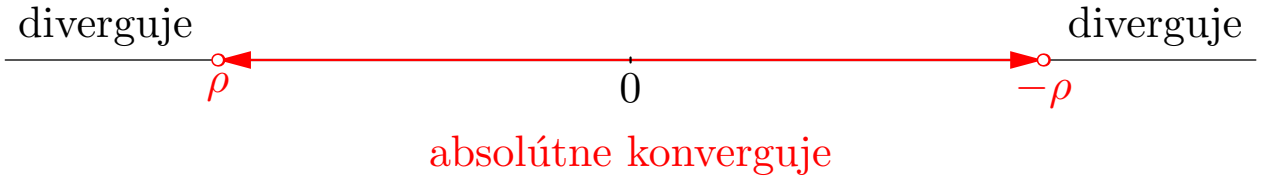
Cauchy: *Cours d'analyse* (1821)

Úloha: Nájdite polomer konvergencie mocninových radov:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$;

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;



(A) Polomer konvergencie – výpočet

Veta (Cauchyho-Hadamardova, 1821, 1888)

Nech je daný mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^*$. Potom

(i) ak $\ell = +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = 0$,

(ii) ak $\ell = 0$, tak polomer konvergencie je $\rho = +\infty$,

(iii) ak $0 < \ell < +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = \frac{1}{\ell}$.

AUGUSTIN CAUCHY (1789–1857)

JACQUES HADAMARD (1865–1963)

Poznámka: Analogická veta platí, ak namiesto predpokladu existencie $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ dáme predpoklad existencie $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ (Cauchy, 1821).

(A) Polomer konvergencie – výpočet

Veta (Cauchyho-Hadamardova, 1821, 1888)

Nech je daný mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^*$. Potom

(i) ak $\ell = +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = 0$,

(ii) ak $\ell = 0$, tak polomer konvergencie je $\rho = +\infty$,

(iii) ak $0 < \ell < +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = \frac{1}{\ell}$.

AUGUSTIN CAUCHY (1789–1857)

JACQUES HADAMARD (1865–1963)

Poznámka: Analogická veta platí, ak namiesto predpokladu existencie $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ dáme predpoklad existencie $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ (Cauchy, 1821).

Veta (Cauchyho-Hadamardova, 1821, 1888)

Nech je daný mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^*$. Potom

(i) ak $\ell = +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = 0$,

(ii) ak $\ell = 0$, tak polomer konvergencie je $\rho = +\infty$,

(iii) ak $0 < \ell < +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = \frac{1}{\ell}$.

Úloha: Určte polomer a obor konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n+\sqrt{n}}$.

Otázka: ako je to s rovnomernou konvergenciou radu (MR)?

Dôsledok (Lemy VIII.2)

Nech $\rho > 0$ je polomer konvergencie radu (MR) a $0 < \alpha < \rho$. Potom rad (MR) rovnomerne konverguje na intervale $\langle -\alpha, \alpha \rangle$.

Veta VIII.6

Ak rad (MR) má polomer konvergencie $\rho \in (0, +\infty)$ a konverguje v bode $x = \rho$ (resp. $x = -\rho$), tak rad (MR) rovnomerne konverguje na intervale $\langle 0, \rho \rangle$ (resp. $\langle -\rho, 0 \rangle$).

Veta (Cauchyho-Hadamardova, 1821, 1888)

Nech je daný mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^*$. Potom

(i) ak $\ell = +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = 0$,

(ii) ak $\ell = 0$, tak polomer konvergencie je $\rho = +\infty$,

(iii) ak $0 < \ell < +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = \frac{1}{\ell}$.

Úloha: Určte polomer a obor konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n+\sqrt{n}}$.

Otázka: ako je to s rovnomernou konvergenciou radu (MR)?

Dôsledok (Lemy VIII.2)

Nech $\rho > 0$ je polomer konvergencie radu (MR) a $0 < \alpha < \rho$. Potom rad (MR) rovnomerne konverguje na intervale $\langle -\alpha, \alpha \rangle$.

Veta VIII.6

Ak rad (MR) má polomer konvergencie $\rho \in (0, +\infty)$ a konverguje v bode $x = \rho$ (resp. $x = -\rho$), tak rad (MR) rovnomerne konverguje na intervale $\langle 0, \rho \rangle$ (resp. $\langle -\rho, 0 \rangle$).

Veta (Cauchyho-Hadamardova, 1821, 1888)

Nech je daný mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^*$. Potom

(i) ak $\ell = +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = 0$,

(ii) ak $\ell = 0$, tak polomer konvergencie je $\rho = +\infty$,

(iii) ak $0 < \ell < +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = \frac{1}{\ell}$.

Úloha: Určte polomer a obor konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n+\sqrt{n}}$.

Otázka: ako je to s rovnomernou konvergenciou radu (MR)?

Dôsledok (Lemy VIII.2)

Nech $\rho > 0$ je polomer konvergencie radu (MR) a $0 < \alpha < \rho$. Potom rad (MR) rovnomerne konverguje na intervale $\langle -\alpha, \alpha \rangle$.

Veta VIII.6

Ak rad (MR) má polomer konvergencie $\rho \in (0, +\infty)$ a konverguje v bode $x = \rho$ (resp. $x = -\rho$), tak rad (MR) rovnomerne konverguje na intervale $\langle 0, \rho \rangle$ (resp. $\langle -\rho, 0 \rangle$).

Veta (Cauchyho-Hadamardova, 1821, 1888)

Nech je daný mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^*$. Potom

(i) ak $\ell = +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = 0$,

(ii) ak $\ell = 0$, tak polomer konvergencie je $\rho = +\infty$,

(iii) ak $0 < \ell < +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = \frac{1}{\ell}$.

Úloha: Určte polomer a obor konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n+\sqrt{n}}$.

Otázka: ako je to s rovnomernou konvergenciou radu (MR)?

Dôsledok (Lemy VIII.2)

Nech $\rho > 0$ je polomer konvergencie radu (MR) a $0 < \alpha < \rho$. Potom rad (MR) rovnomerne konverguje na intervale $\langle -\alpha, \alpha \rangle$.

Veta VIII.6

Ak rad (MR) má polomer konvergencie $\rho \in (0, +\infty)$ a konverguje v bode $x = \rho$ (resp. $x = -\rho$), tak rad (MR) rovnomerne konverguje na intervale $\langle 0, \rho \rangle$ (resp. $\langle -\rho, 0 \rangle$).