Matematická analýza III.

(prezentácia k prednáške MAN2c/10)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MAN2c.html
Prednáška 12

15. decembra 2023

Mocninové rady – historické okienko

- niektoré mocninové rady (ako napr. geometrický rad) boli intuitívne známe už v starovekom Grécku;
- indický matematik MADHAVA (14. stor.) je považovaný za predchodcu modernej koncepcie mocninových radov – zaslúžil sa o štúdium konvergenčných kritérií;
- v Európe JAMES GREGORY ako prvý vytvoril niekoľko mocninových radov v polovici 17. storočia – od neho pochádzajú pojmy konvergencia a divergencia radu (1668);
- prvé systematické použitie učinil ISAAC NEWTON, podľa ktorého to bol jeho najväčší matematický objav: ľubovoľná rovnica (algebrická, diferenciálna, atď.) sa dá riešiť pomocou substituovania mocninového radu s neurčitými koeficientmi, ktoré sa dajú presne určiť;
- v roku 1715 vytvoril BROOK TAYLOR všeobecnú metódu pre konštrukciu Taylorových radov;
- matematici 18. storočia (Euler, d'Alembert, MacLaurin, Lagrange, atď.) mocninové rady začali používať vo veľkom na riešenie všetkých druhov problémov – prevažne formálne manipulácie, častokrát s nesprávnym výsledkom!
- rigorózna teória konvergencie však bola učinená až Cauchym a Abelom v 20. rokoch 19. storočia;

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Definícia (mocninového radu)

Rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, kde $a, x \in \mathbb{R}$ a $a_n \in \mathbb{R}$ nazývame mocninový rad.

Pričom

- a_n nazývame n-tý koeficient radu,
- a nazývame stred radu,
- $a_n(x-a)^n$ nazývame n-tý člen radu.

Pozorovanie: Geometrický rad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ je mocninový rad so stredom $a = 0$ a koeficientmi $a_n \equiv 1$, ktorý je konvergentný len pre $x \in (-1, 1)$ a pre také x má súčet rovný $\frac{1}{1-x}$, t.j.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Provokačná otázka: Prečo uvažujeme indexy len nezáporné celé čísla? Nemôžeme uvažovať všetky celé čísla?

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Definícia (mocninového radu)

Rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, kde $a, x \in \mathbb{R}$ a $a_n \in \mathbb{R}$ nazývame mocninový rad.

Pričom

- a_n nazývame n-tý koeficient radu,
- a nazývame stred radu,
- $a_n(x-a)^n$ nazývame n-tý člen radu.

Pozorovanie: Geometrický rad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ je mocninový rad so stredom $a = 0$ a koeficientmi $a_n \equiv 1$, ktorý je konvergentný len pre $x \in (-1, 1)$ a pre také x má súčet rovný $\frac{1}{1-x}$, t.j.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Provokačná otázka: Prečo uvažujeme indexy len nezáporné celé čísla? Nemôžeme uvažovať všetky celé čísla?

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Definícia (mocninového radu)

Rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, kde $a, x \in \mathbb{R}$ a $a_n \in \mathbb{R}$ nazývame mocninový rad.

Pričom

- a_n nazývame n-tý koeficient radu,
- a nazývame stred radu,
- $a_n(x-a)^n$ nazývame n-tý člen radu.

Pozorovanie: Geometrický rad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ je mocninový rad so stredom $a = 0$ a koeficientmi $a_n \equiv 1$, ktorý je konvergentný len pre $x \in (-1, 1)$ a pre také x má súčet rovný $\frac{1}{1-x}$, t.j.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Provokačná otázka: Prečo uvažujeme indexy len nezáporné celé čísla? Nemôžeme uvažovať všetky celé čísla?

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Definícia (mocninového radu)

Rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, kde $a, x \in \mathbb{R}$ a $a_n \in \mathbb{R}$ nazývame mocninový rad.

Pričom

- a_n nazývame n-tý koeficient radu,
- a nazývame stred radu,
- $a_n(x-a)^n$ nazývame n-tý člen radu.

Pozorovanie: Geometrický rad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ je mocninový rad so stredom $a = 0$ a koeficientmi $a_n \equiv 1$, ktorý je konvergentný len pre $x \in (-1, 1)$ a pre také x má súčet rovný $\frac{1}{1-x}$, t.j.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Provokačná otázka: Prečo uvažujeme indexy len nezáporné celé čísla? Nemôžeme uvažovať všetky celé čísla?

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Definícia (oboru konvergencie)

Oborom konvergencie mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ nazývame množinu

$$\left\{x \in \mathbb{R};\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ konverguje}\right\}.$$

Pozorovania:

- Obor konvergencie mocninového radu je vždy neprázdna množina, t.j. obsahuje aspoň stred mocninového radu.
- Obor konvergencie geometrického radu je interval, ktorý je symetrický vzhľadom na stred tohto radu.

Platí to pre každý mocninový rad?

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Definícia (oboru konvergencie)

Oborom konvergencie mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ nazývame množinu

$$\left\{x \in \mathbb{R};\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ konverguje}\right\}.$$

Pozorovania:

- Obor konvergencie mocninového radu je vždy neprázdna množina, t.j. obsahuje aspoň stred mocninového radu.
- Obor konvergencie geometrického radu je interval, ktorý je symetrický vzhľadom na stred tohto radu.

Platí to pre každý mocninový rad?

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Definícia (oboru konvergencie)

Oborom konvergencie mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ nazývame množinu

$$\left\{x \in \mathbb{R};\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ konverguje}\right\}.$$

Pozorovania:

- Obor konvergencie mocninového radu je vždy neprázdna množina, t.j. obsahuje aspoň stred mocninového radu.
- Obor konvergencie geometrického radu je interval, ktorý je symetrický vzhľadom na stred tohto radu.

Platí to pre každý mocninový rad?

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Definícia (oboru konvergencie)

Oborom konvergencie mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ nazývame množinu

$$\left\{x \in \mathbb{R};\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ konverguje}\right\}.$$

Pozorovania:

- Obor konvergencie mocninového radu je vždy neprázdna množina, t.j. obsahuje aspoň stred mocninového radu.
- Obor konvergencie geometrického radu je interval, ktorý je symetrický vzhľadom na stred tohto radu.

Platí to pre každý mocninový rad?

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Dohoda (na strede nezáleží?): Substitúciou $x - a = y$ prevedieme rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ so stredom v bode a, na rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ so stredom v bode 0.

Teda vyšetrovanie vlastností týchto radov je ekvivalentné, pre jednoduchosť ďalej vyšetrujeme vlastnosti mocninového radu so stredom v bode $a = 0$, t.j. radov tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Označenie: Pre skrátenie ďalších textov budeme mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ označovať (MR).

Zaujímajú nás dva okruhy problémov:

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Dohoda (na strede nezáleží?): Substitúciou $x - a = y$ prevedieme rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ so stredom v bode a, na rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ so stredom v bode 0.

Teda vyšetrovanie vlastností týchto radov je ekvivalentné, pre jednoduchosť ďalej vyšetrujeme vlastnosti mocninového radu so stredom v bode $a = 0$, t.j. radov tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Označenie: Pre skrátenie ďalších textov budeme mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ označovať (MR).

Zaujímajú nás dva okruhy problémov:

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Dohoda (na strede nezáleží?): Substitúciou $x - a = y$ prevedieme rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ so stredom v bode a, na rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ so stredom v bode 0.

Teda vyšetrovanie vlastností týchto radov je ekvivalentné, pre jednoduchosť ďalej vyšetrujeme vlastnosti mocninového radu so stredom v bode $a = 0$, t.j. radov tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Označenie: Pre skrátenie ďalších textov budeme mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ označovať (MR).

Zaujímajú nás dva okruhy problémov:

(A) *Aký je obor konvergencie radu (MR), ako ho nájsť?*

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Dohoda (na strede nezáleží?): Substitúciou $x - a = y$ prevedieme rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ so stredom v bode a, na rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ so stredom v bode 0.

Teda vyšetrovanie vlastností týchto radov je ekvivalentné, pre jednoduchosť ďalej vyšetrujeme vlastnosti mocninového radu so stredom v bode $a = 0$, t.j. radov tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Označenie: Pre skrátenie ďalších textov budeme mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ označovať (MR).

Zaujímajú nás dva okruhy problémov:

(A) *Aký je obor konvergencie radu (MR), ako ho nájsť?*

(B) *Aké vlastnosti má funkcia, ktorá je súčtom radu (MR)?*

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Dohoda (na strede nezáleží?): Substitúciou $x - a = y$ prevedieme rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ so stredom v bode a, na rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ so stredom v bode 0.

Teda vyšetrovanie vlastností týchto radov je ekvivalentné, pre jednoduchosť ďalej vyšetrujeme vlastnosti mocninového radu so stredom v bode $a = 0$, t.j. radov tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Označenie: Pre skrátenie ďalších textov budeme mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ označovať (MR).

Zaujímajú nás dva okruhy problémov:

(A) *Aký je obor konvergencie radu* (MR)*, ako ho nájsť?*

(B) *Aké vlastnosti má funkcia, ktorá je súčtom radu* (MR)*?*

Mocninové rady

After a scientific meeting at which Cauchy presented his theory on the convergence of series Laplace hastened home and remained there in reclusion until he had examined the series in his *Mécanique céleste*. Luckily every one was found to be convergent.

Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (1972)

Dohoda (na strede nezáleží?): Substitúciou $x - a = y$ prevedieme rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ so stredom v bode a, na rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ so stredom v bode 0.

Teda vyšetrovanie vlastností týchto radov je ekvivalentné, pre jednoduchosť ďalej vyšetrujeme vlastnosti mocninového radu so stredom v bode $a = 0$, t.j. radov tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Označenie: Pre skrátenie ďalších textov budeme mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ označovať (MR).

Zaujímajú nás dva okruhy problémov:

(A) *Aký je obor konvergencie radu* (MR)*, ako ho nájsť?*

(B) *Aké vlastnosti má funkcia, ktorá je súčtom radu* (MR)*?*

(A) Niekoľko pomocných tvrdení

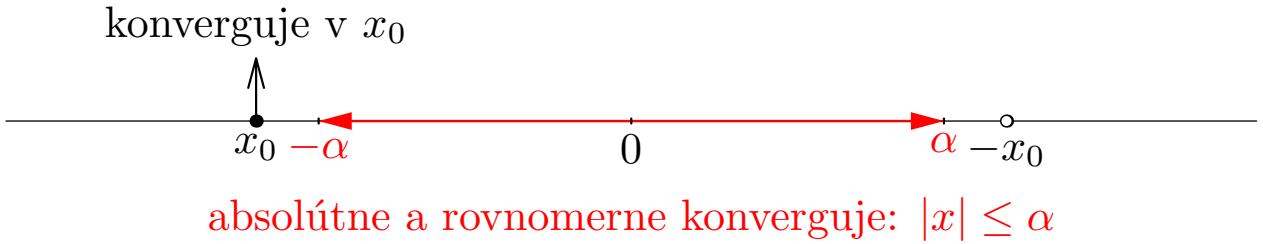
Lema VIII.2

Nech rad (MR) konverguje v bode $x_0 \neq 0$ a nech $0 < \alpha < |x_0|$. Potom tento rad absolútne konverguje v každom $x \in \langle -\alpha, \alpha \rangle$ a konverguje rovnomerne na intervale $\langle -\alpha, \alpha \rangle$.

(A) Niekoľko pomocných tvrdení

Lema VIII.2

Nech rad (MR) konverguje v bode $x_0 \neq 0$ a nech $0 < \alpha < |x_0|$. Potom tento rad absolútne konverguje v každom $x \in \langle -\alpha, \alpha \rangle$ a konverguje rovnomerne na intervale $\langle -\alpha, \alpha \rangle$.



obr.11

(A) Niekoľko pomocných tvrdení

Lema VIII.2

Nech rad (MR) konverguje v bode $x_0 \neq 0$ a nech $0 < \alpha < |x_0|$. Potom tento rad absolútne konverguje v každom $x \in \langle -\alpha, \alpha \rangle$ a konverguje rovnomerne na intervale $\langle -\alpha, \alpha \rangle$.

Lema VIII.3

Nech rad (MR) konverguje v bode $x_0 \neq 0$ a nech $|y| < |x_0|$. Potom rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ absolútne konverguje.

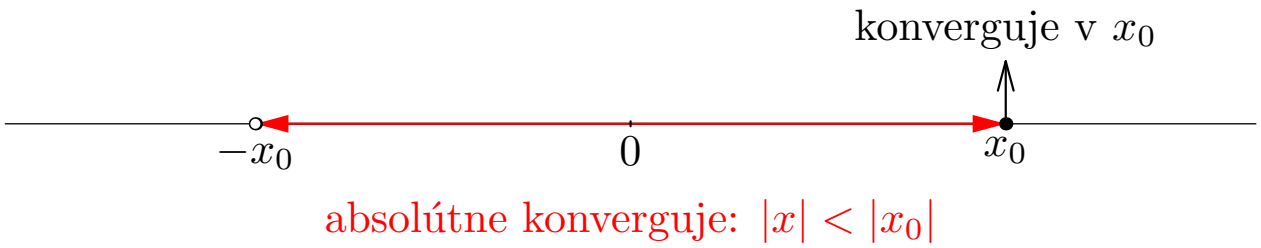
(A) Niekoľko pomocných tvrdení

Lema VIII.2

Nech rad (MR) konverguje v bode $x_0 \neq 0$ a nech $0 < \alpha < |x_0|$. Potom tento rad absolútne konverguje v každom $x \in \langle -\alpha, \alpha \rangle$ a konverguje rovnomerne na intervale $\langle -\alpha, \alpha \rangle$.

Lema VIII.3

Nech rad (MR) konverguje v bode $x_0 \neq 0$ a nech $|y| < |x_0|$. Potom rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ absolútne konverguje.



obr.12

(A) Niekoľko pomocných tvrdení

Lema VIII.2

Nech rad (MR) konverguje v bode $x_0 \neq 0$ a nech $0 < \alpha < |x_0|$. Potom tento rad absolútne konverguje v každom $x \in \langle -\alpha, \alpha \rangle$ a konverguje rovnomerne na intervale $\langle -\alpha, \alpha \rangle$.

Lema VIII.3

Nech rad (MR) konverguje v bode $x_0 \neq 0$ a nech $|y| < |x_0|$. Potom rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ absolútne konverguje.

Lema VIII.4

Nech rad (MR) diverguje alebo relatívne konverguje v bode $x_1 \neq 0$. Potom diverguje v každom $x \in \mathbb{R}$ takom, že $|x| > |x_1|$.

(A) Niekoľko pomocných tvrdení

Lema VIII.2

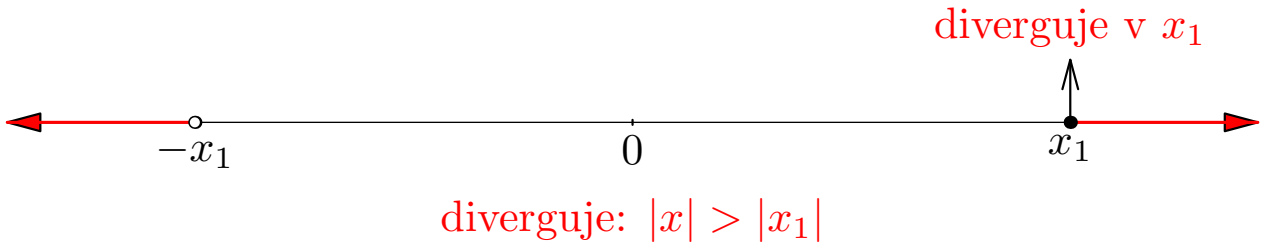
Nech rad (MR) konverguje v bode $x_0 \neq 0$ a nech $0 < \alpha < |x_0|$. Potom tento rad absolútne konverguje v každom $x \in \langle -\alpha, \alpha \rangle$ a konverguje rovnomerne na intervale $\langle -\alpha, \alpha \rangle$.

Lema VIII.3

Nech rad (MR) konverguje v bode $x_0 \neq 0$ a nech $|y| < |x_0|$. Potom rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ absolútne konverguje.

Lema VIII.4

Nech rad (MR) diverguje alebo relatívne konverguje v bode $x_1 \neq 0$. Potom diverguje v každom $x \in \mathbb{R}$ takom, že $|x| > |x_1|$.



(A) Polomer konvergencie

Even if we consider the simplest case, there is not in all mathematics a single infinite series whose sum has been rigorously determined. In other words, the most important areas of mathematics prove to be without a foundation.

Abel: *Ouevres* (1826)

Definícia (polomeru konvergencie)

1. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) nie je $\mathbb{R}$, tak polomerom konvergencie mocninového radu nazývame číslo $\rho \geq 0$ také, že

- pre $|x| < \rho$ mocninový rad konverguje,
- pre $|x| > \rho$ mocninový rad diverguje.

2. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) je $\mathbb{R}$, tak číslo $\rho = +\infty$ nazývame jeho polomer konvergencie.

Pozorovanie: Z definície polomeru konvergencie je zrejmé, že číslo $\rho \geq 0$ súvisí s existenciou suprema množiny

$$A = \left\{ x \geq 0, \text{ takých, že rad} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konverguje} \right\}.$$

Tvrdenie VIII.5

Mocninový rad (MR) má vždy polomer konvergencie.

(A) Polomer konvergencie

Even if we consider the simplest case, there is not in all mathematics a single infinite series whose sum has been rigorously determined. In other words, the most important areas of mathematics prove to be without a foundation.

Abel: *Ouevres* (1826)

Definícia (polomeru konvergencie)

1. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) nie je $\mathbb{R}$, tak polomerom konvergencie mocninového radu nazývame číslo $\rho \geq 0$ také, že

   - pre $|x| < \rho$ mocninový rad konverguje,
   - pre $|x| > \rho$ mocninový rad diverguje.

2. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) je $\mathbb{R}$, tak číslo $\rho = +\infty$ nazývame jeho polomer konvergencie.

Pozorovanie: Z definície polomeru konvergencie je zrejmé, že číslo $\rho \geq 0$ súvisí s existenciou suprema množiny

$$A = \left\{ x \geq 0, \text{ takých, že rad} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konverguje} \right\}.$$

Tvrdenie VIII.5

Mocninový rad (MR) má vždy polomer konvergencie.

(A) Polomer konvergencie

Even if we consider the simplest case, there is not in all mathematics a single infinite series whose sum has been rigorously determined. In other words, the most important areas of mathematics prove to be without a foundation.

Abel: *Ouevres* (1826)

Definícia (polomeru konvergencie)

1. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) nie je $\mathbb{R}$, tak polomerom konvergencie mocninového radu nazývame číslo $\rho \geq 0$ také, že

- pre $|x| < \rho$ mocninový rad konverguje,
- pre $|x| > \rho$ mocninový rad diverguje.

2. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) je $\mathbb{R}$, tak číslo $\rho = +\infty$ nazývame jeho polomer konvergencie.

Pozorovanie: Z definície polomeru konvergencie je zrejmé, že číslo $\rho \geq 0$ súvisí s existenciou suprema množiny

$$A = \left\{ x \geq 0, \text{ takých, že rad} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konverguje} \right\}.$$

Tvrdenie VIII.5

Mocninový rad (MR) má vždy polomer konvergencie.

(A) Polomer konvergencie

Even if we consider the simplest case, there is not in all mathematics a single infinite series whose sum has been rigorously determined. In other words, the most important areas of mathematics prove to be without a foundation.

Abel: *Ouevres* (1826)

Definícia (polomeru konvergencie)

1. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) nie je $\mathbb{R}$, tak polomerom konvergencie mocninového radu nazývame číslo $\rho \geq 0$ také, že

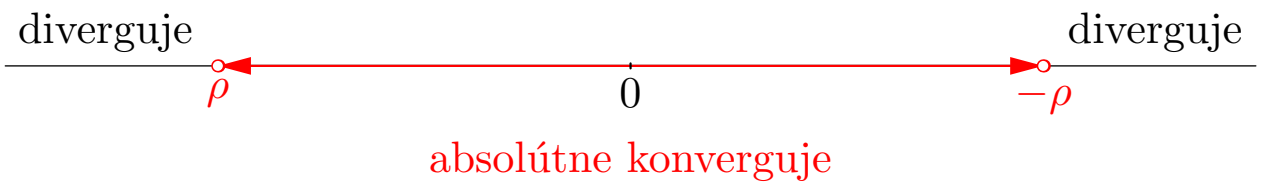
- pre $|x| < \rho$ mocninový rad konverguje,
- pre $|x| > \rho$ mocninový rad diverguje.

2. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) je $\mathbb{R}$, tak číslo $\rho = +\infty$ nazývame jeho polomer konvergencie.

Ponaučenie: Z uvedenej definície vyplýva, že:

(i) číslo ρ je jednoznačne určené;
(ii) ak ρ je polomer konvergencie radu (MR), potom pre $x \in (-\rho, \rho)$ rad konverguje a pre $x \in (-\infty, -\rho) \cup (\rho, +\infty)$ rad diverguje.

Upozornenie: Nič sa nehovorí o konvergencii radu v krajných bodoch $x = \rho$ a $x = -\rho$!



(A) Polomer konvergencie

Even if we consider the simplest case, there is not in all mathematics a single infinite series whose sum has been rigorously determined. In other words, the most important areas of mathematics prove to be without a foundation.

Abel: *Ouevres* (1826)

Definícia (polomeru konvergencie)

1. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) nie je $\mathbb{R}$, tak polomerom konvergencie mocninového radu nazývame číslo $\rho \geq 0$ také, že

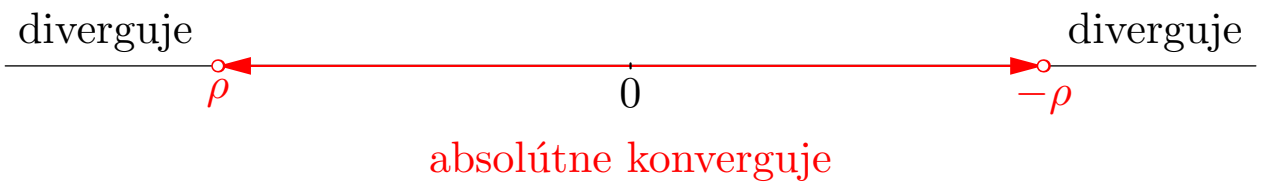
- pre $|x| < \rho$ mocninový rad konverguje,
- pre $|x| > \rho$ mocninový rad diverguje.

2. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) je $\mathbb{R}$, tak číslo $\rho = +\infty$ nazývame jeho polomer konvergencie.

Ponaučenie: Z uvedenej definície vyplýva, že:

(i) číslo ρ je jednoznačne určené;
(ii) ak ρ je polomer konvergencie radu (MR), potom pre $x \in (-\rho, \rho)$ rad konverguje a pre $x \in (-\infty, -\rho) \cup (\rho, +\infty)$ rad diverguje.

Upozornenie: Nič sa nehovorí o konvergencii radu v krajných bodoch $x = \rho$ a $x = -\rho$!



(A) Polomer konvergencie

Even if we consider the simplest case, there is not in all mathematics a single infinite series whose sum has been rigorously determined. In other words, the most important areas of mathematics prove to be without a foundation.

Abel: *Ouevres* (1826)

Definícia (polomeru konvergencie)

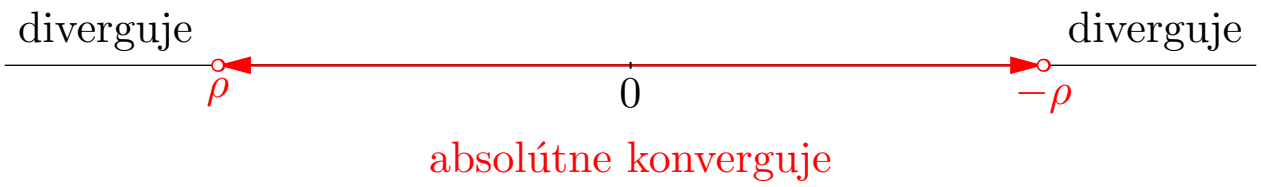
1. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) nie je $\mathbb{R}$, tak polomerom konvergencie mocninového radu nazývame číslo $\rho \geq 0$ také, že

- pre $|x| < \rho$ mocninový rad konverguje,
- pre $|x| > \rho$ mocninový rad diverguje.

2. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) je $\mathbb{R}$, tak číslo $\rho = +\infty$ nazývame jeho polomer konvergencie.

Zhrnutie:
(I) Obor konvergencie radu (MR) môže byť interval $(-\rho, \rho)$, $\langle -\rho, \rho)$, $(-\rho, \rho\rangle$, $\langle -\rho, \rho\rangle$, resp. $(-\infty, +\infty)$.

(II) V prípade mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ so stredom v bode a oborom konvergencie môže byť interval $(a-\rho, a+\rho)$, $\langle a-\rho, a+\rho)$, $(a-\rho, a+\rho\rangle$, $\langle a-\rho, a+\rho\rangle$, resp. $(-\infty, +\infty)$.



(A) Polomer konvergencie

Even if we consider the simplest case, there is not in all mathematics a single infinite series whose sum has been rigorously determined. In other words, the most important areas of mathematics prove to be without a foundation.

Abel: *Ouevres* (1826)

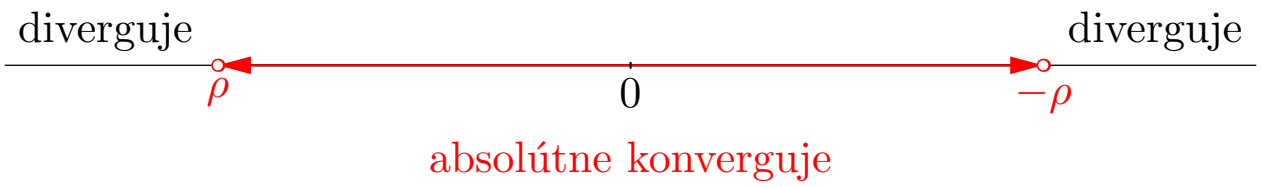
Definícia (polomeru konvergencie)

1. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) nie je $\mathbb{R}$, tak polomerom konvergencie mocninového radu nazývame číslo $\rho \geq 0$ také, že

- pre $|x| < \rho$ mocninový rad konverguje,
- pre $|x| > \rho$ mocninový rad diverguje.

2. Ak obor konvergencie mocninového radu (MR) je $\mathbb{R}$, tak číslo $\rho = +\infty$ nazývame jeho polomer konvergencie.

Zhrnutie:
(I) Obor konvergencie radu (MR) môže byť interval $(-\rho, \rho)$, $\langle -\rho, \rho)$, $(-\rho, \rho\rangle$, $\langle -\rho, \rho\rangle$, resp. $(-\infty, +\infty)$.
(II) V prípade mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ so stredom v bode a oborom konvergencie môže byť interval $(a-\rho, a+\rho)$, $\langle a-\rho, a+\rho)$, $(a-\rho, a+\rho\rangle$, $\langle a-\rho, a+\rho\rangle$, resp. $(-\infty, +\infty)$.



(A) Polomer konvergencie – príklady

Let

$$a_0, a_1 x, a_2 x^2, \ldots, a_n x^n, \ldots \tag{1}$$

be a series ordered according to the ascending integer powers of the variable x, where $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ denote constant coefficients, positive or negative. Furthermore, let A be the quantity that corresponds to the quantity k of the previous section... As a consequence, series (1) is convergent ... if the numerical value of the variable x is less than $\frac{1}{A}$. On the other hand, series (1) is divergent if the numerical value of x is greater than $\frac{1}{A}$.

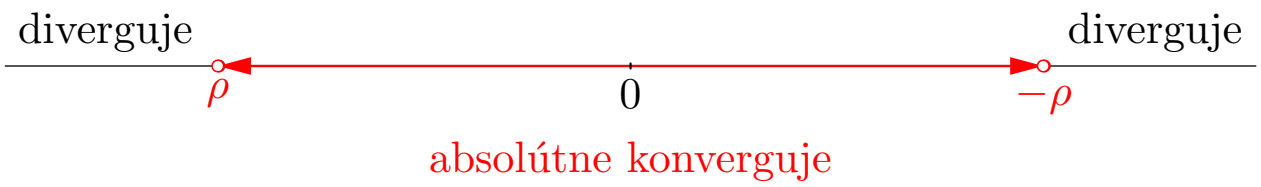
Cauchy: *Cours d'analyse* (1821)

Úloha: Nájdite polomer konvergencie mocninových radov:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$;

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;



(A) Polomer konvergencie – príklady

Let

$$a_0, a_1 x, a_2 x^2, \ldots, a_n x^n, \ldots \tag{1}$$

be a series ordered according to the ascending integer powers of the variable x, where $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ denote constant coefficients, positive or negative. Furthermore, let A be the quantity that corresponds to the quantity k of the previous section... As a consequence, series (1) is convergent ... if the numerical value of the variable x is less than $\frac{1}{A}$. On the other hand, series (1) is divergent if the numerical value of x is greater than $\frac{1}{A}$.

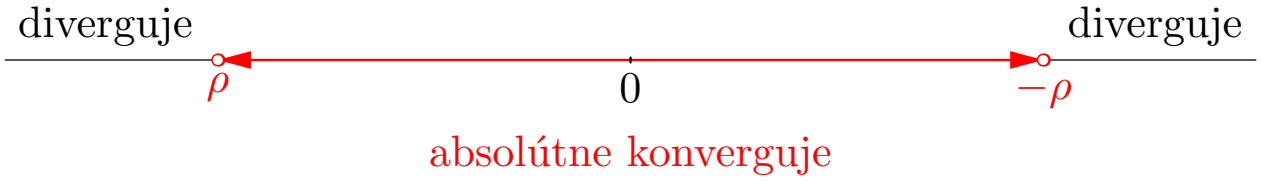
Cauchy: *Cours d'analyse* (1821)

Úloha: Nájdite polomer konvergencie mocninových radov:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$;

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;



(A) Polomer konvergencie – príklady

Let

$$a_0, a_1 x, a_2 x^2, \ldots, a_n x^n, \ldots \tag{1}$$

be a series ordered according to the ascending integer powers of the variable x, where $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ denote constant coefficients, positive or negative. Furthermore, let A be the quantity that corresponds to the quantity k of the previous section... As a consequence, series (1) is convergent ... if the numerical value of the variable x is less than $\frac{1}{A}$. On the other hand, series (1) is divergent if the numerical value of x is greater than $\frac{1}{A}$.

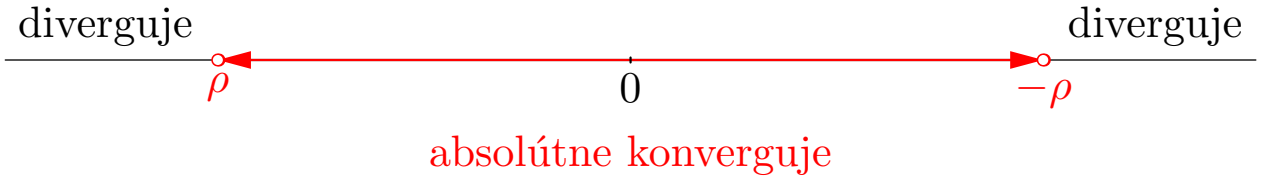
Cauchy: *Cours d'analyse* (1821)

Úloha: Nájdite polomer konvergencie mocninových radov:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$;

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;



(A) Polomer konvergencie – výpočet

Veta (Cauchyho-Hadamardova, 1821, 1888)

Nech je daný mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^*$. Potom

(i) ak $\ell = +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = 0$,

(ii) ak $\ell = 0$, tak polomer konvergencie je $\rho = +\infty$,

(iii) ak $0 < \ell < +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = \frac{1}{\ell}$.

AUGUSTIN CAUCHY (1789–1857)

JACQUES HADAMARD (1865–1963)

Poznámka: Analogická veta platí, ak namiesto predpokladu existencie $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ dáme predpoklad existencie $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ (Cauchy, 1821).

(A) Polomer konvergencie – výpočet

Veta (Cauchyho-Hadamardova, 1821, 1888)

Nech je daný mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^*$. Potom

(i) ak $\ell = +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = 0$,

(ii) ak $\ell = 0$, tak polomer konvergencie je $\rho = +\infty$,

(iii) ak $0 < \ell < +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = \frac{1}{\ell}$.

AUGUSTIN CAUCHY (1789–1857)

JACQUES HADAMARD (1865–1963)

Poznámka: Analogická veta platí, ak namiesto predpokladu existencie $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ dáme predpoklad existencie $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ (Cauchy, 1821).

Veta (Cauchyho-Hadamardova, 1821, 1888)

Nech je daný mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^*$. Potom

(i) ak $\ell = +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = 0$,

(ii) ak $\ell = 0$, tak polomer konvergencie je $\rho = +\infty$,

(iii) ak $0 < \ell < +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = \frac{1}{\ell}$.

Úloha: Určte polomer a obor konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n+\sqrt{n}}$.

Otázka: ako je to s rovnomernou konvergenciou radu (MR)?

Dôsledok (Lemy VIII.2)

Nech $\rho > 0$ je polomer konvergencie radu (MR) a $0 < \alpha < \rho$. Potom rad (MR) rovnomerne konverguje na intervale $\langle -\alpha, \alpha \rangle$.

Veta VIII.6

Ak rad (MR) má polomer konvergencie $\rho \in (0, +\infty)$ a konverguje v bode $x = \rho$ (resp. $x = -\rho$), tak rad (MR) rovnomerne konverguje na intervale $\langle 0, \rho \rangle$ (resp. $\langle -\rho, 0 \rangle$).

Veta (Cauchyho-Hadamardova, 1821, 1888)

Nech je daný mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^*$. Potom

(i) ak $\ell = +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = 0$,

(ii) ak $\ell = 0$, tak polomer konvergencie je $\rho = +\infty$,

(iii) ak $0 < \ell < +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = \frac{1}{\ell}$.

Úloha: Určte polomer a obor konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n+\sqrt{n}}$.

Otázka: ako je to s rovnomernou konvergenciou radu (MR)?

Dôsledok (Lemy VIII.2)

Nech $\rho > 0$ je polomer konvergencie radu (MR) a $0 < \alpha < \rho$. Potom rad (MR) rovnomerne konverguje na intervale $\langle -\alpha, \alpha \rangle$.

Veta VIII.6

Ak rad (MR) má polomer konvergencie $\rho \in (0, +\infty)$ a konverguje v bode $x = \rho$ (resp. $x = -\rho$), tak rad (MR) rovnomerne konverguje na intervale $\langle 0, \rho \rangle$ (resp. $\langle -\rho, 0 \rangle$).

Veta (Cauchyho-Hadamardova, 1821, 1888)

Nech je daný mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^*$. Potom

(i) ak $\ell = +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = 0$,

(ii) ak $\ell = 0$, tak polomer konvergencie je $\rho = +\infty$,

(iii) ak $0 < \ell < +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = \frac{1}{\ell}$.

Úloha: Určte polomer a obor konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n+\sqrt{n}}$.

Otázka: ako je to s rovnomernou konvergenciou radu (MR)?

Dôsledok (Lemy VIII.2)

Nech $\rho > 0$ je polomer konvergencie radu (MR) a $0 < \alpha < \rho$. Potom rad (MR) rovnomerne konverguje na intervale $\langle -\alpha, \alpha \rangle$.

Veta VIII.6

Ak rad (MR) má polomer konvergencie $\rho \in (0, +\infty)$ a konverguje v bode $x = \rho$ (resp. $x = -\rho$), tak rad (MR) rovnomerne konverguje na intervale $\langle 0, \rho \rangle$ (resp. $\langle -\rho, 0 \rangle$).

Veta (Cauchyho-Hadamardova, 1821, 1888)

Nech je daný mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^*$. Potom

(i) ak $\ell = +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = 0$,

(ii) ak $\ell = 0$, tak polomer konvergencie je $\rho = +\infty$,

(iii) ak $0 < \ell < +\infty$, tak polomer konvergencie je $\rho = \frac{1}{\ell}$.

Úloha: Určte polomer a obor konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n+\sqrt{n}}$.

Otázka: ako je to s rovnomernou konvergenciou radu (MR)?

Dôsledok (Lemy VIII.2)

Nech $\rho > 0$ je polomer konvergencie radu (MR) a $0 < \alpha < \rho$. Potom rad (MR) rovnomerne konverguje na intervale $\langle -\alpha, \alpha \rangle$.

Veta VIII.6

Ak rad (MR) má polomer konvergencie $\rho \in (0, +\infty)$ a konverguje v bode $x = \rho$ (resp. $x = -\rho$), tak rad (MR) rovnomerne konverguje na intervale $\langle 0, \rho \rangle$ (resp. $\langle -\rho, 0 \rangle$).

(B) Vlastnosti mocninových radov

Pozorovanie: ak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^*$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \ell$

Lema VIII.7

Rady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ majú rovnaký polomer konvergencie.

Pripomenutie: (MR) je špeciálny funkcionálny rad taký, že (MR) $\rightrightarrows_{\langle -\alpha, \alpha \rangle}$ pre ľubovoľné $\alpha > 0$ z oboru konvergencie!

Veta VIII.8

Nech rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ má polomer konvergencie $\rho > 0$. Potom platí:

(i) $f \in \mathscr{C}(-\rho, \rho)$;

(ii) $f \in \mathscr{D}(-\rho, \rho)$ a $(\forall x \in (-\rho, \rho))\ f'(x) = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$;

(iii) $f \in \mathscr{R}\langle 0, x \rangle$ pre $x \in (-\rho, \rho)$ a platí $(\mathscr{R}) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

(B) Vlastnosti mocninových radov

Pozorovanie: ak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^*$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \ell$

Lema VIII.7

Rady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ majú rovnaký polomer konvergencie.

Pripomenutie: (MR) je špeciálny funkcionálny rad taký, že (MR) $\rightrightarrows_{\langle -\alpha, \alpha \rangle}$ pre ľubovoľné $\alpha > 0$ z oboru konvergencie!

Veta VIII.8

Nech rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ má polomer konvergencie $\rho > 0$. Potom platí:

(i) $f \in \mathscr{C}(-\rho, \rho)$;

(ii) $f \in \mathscr{D}(-\rho, \rho)$ a $(\forall x \in (-\rho, \rho))\ f'(x) = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$;

(iii) $f \in \mathscr{R}\langle 0, x \rangle$ pre $x \in (-\rho, \rho)$ a platí $(\mathscr{R}) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

(B) Vlastnosti mocninových radov

Pozorovanie: ak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^*$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \ell$

Lema VIII.7

Rady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ majú rovnaký polomer konvergencie.

Pripomenutie: (MR) je špeciálny funkcionálny rad taký, že (MR) $\rightrightarrows_{\langle -\alpha, \alpha \rangle}$ pre ľubovoľné $\alpha > 0$ z oboru konvergencie!

Veta VIII.8

Nech rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ má polomer konvergencie $\rho > 0$. Potom platí:

(i) $f \in \mathscr{C}(-\rho, \rho)$;

(ii) $f \in \mathscr{D}(-\rho, \rho)$ a $(\forall x \in (-\rho, \rho))\ f'(x) = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$;

(iii) $f \in \mathscr{R}\langle 0, x \rangle$ pre $x \in (-\rho, \rho)$ a platí $(\mathscr{R}) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

(B) Vlastnosti mocninových radov

Pozorovanie: ak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^*$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \ell$

Lema VIII.7

Rady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ majú rovnaký polomer konvergencie.

Pripomenutie: (MR) je špeciálny funkcionálny rad taký, že (MR) $\rightrightarrows_{\langle -\alpha, \alpha \rangle}$ pre ľubovoľné $\alpha > 0$ z oboru konvergencie!

Veta VIII.8

Nech rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ má polomer konvergencie $\rho > 0$. Potom platí:

(i) $f \in \mathscr{C}(-\rho, \rho)$;

(ii) $f \in \mathscr{D}(-\rho, \rho)$ a $(\forall x \in (-\rho, \rho))\ f'(x) = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$;

(iii) $f \in \mathscr{R}\langle 0, x \rangle$ pre $x \in (-\rho, \rho)$ a platí $(\mathscr{R}) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

(B) Vlastnosti mocninových radov

Pozorovanie: ak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^*$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \ell$

Lema VIII.7

Rady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ majú rovnaký polomer konvergencie.

Pripomenutie: (MR) je špeciálny funkcionálny rad taký, že (MR) $\rightrightarrows_{\langle -\alpha, \alpha\rangle}$ pre ľubovoľné $\alpha > 0$ z oboru konvergencie!

Veta VIII.8

Nech rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ má polomer konvergencie $\rho > 0$. Potom platí:

(i) $f \in \mathscr{C}(-\rho, \rho)$;

(ii) $f \in \mathscr{D}(-\rho, \rho)$ a $(\forall x \in (-\rho, \rho))$ $f'(x) = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$;

(iii) $f \in \mathscr{R}\langle 0, x\rangle$ pre $x \in (-\rho, \rho)$ a platí $(\mathscr{R}) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

(B) Vlastnosti mocninových radov

Pozorovanie: ak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^*$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \ell$

Lema VIII.7

Rady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ majú rovnaký polomer konvergencie.

Pripomenutie: (MR) je špeciálny funkcionálny rad taký, že (MR) $\rightrightarrows_{\langle -\alpha, \alpha\rangle}$ pre ľubovoľné $\alpha > 0$ z oboru konvergencie!

Veta VIII.8

Nech rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ má polomer konvergencie $\rho > 0$. Potom platí:

(i) $f \in \mathscr{C}(-\rho, \rho)$;

(ii) $f \in \mathscr{D}(-\rho, \rho)$ a $(\forall x \in (-\rho, \rho))$ $f'(x) = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$;

(iii) $f \in \mathscr{R}\langle 0, x\rangle$ pre $x \in (-\rho, \rho)$ a platí $(\mathscr{R}) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

(B) Vlastnosti mocninových radov – poznámky

Veta VIII.8

Nech rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ má polomer konvergencie $\rho > 0$. Potom platí:

(i) $f \in \mathscr{C}(-\rho, \rho)$;

(ii) $f \in \mathscr{D}(-\rho, \rho)$ a $(\forall x \in (-\rho, \rho))\ f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$;

(iii) $f \in \mathscr{R}\langle 0, x\rangle$ pre $x \in (-\rho, \rho)$ a platí $(\mathscr{R}) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Otázka: Ako a kedy sa prenášajú uvedené vlastnosti aj do krajných bodov intervalu konvergencie?

(i) **Dôsledok** (Vety VIII.6 a VIII.8) – Abel (1826): Ak rad (MR) má polomer konvergencie $\rho \in (0, +\infty)$ a konverguje v $x = \rho$ (resp. v $x = -\rho$), potom f je spojitá funkcia v $x = \rho$ (resp. v $x = -\rho$).

(ii) Ak rad (MR) konverguje v $x = \rho$, rad derivácií tam nemusí konvergovať! Napr. rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ má obor konvergencie $\langle -1, 1\rangle$, ale "derivovaný rad" $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ má obor konvergencie $\langle -1, 1)$;

(iii) Dá sa opäť ukázať, že konvergencia radu (MR) v $x = \rho$ (resp. v $x = -\rho$) implikuje konvergenciu radu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ v bode $x = \rho$ (resp. v $x = -\rho$).

(B) Vlastnosti mocninových radov – poznámky

Veta VIII.8

Nech rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ má polomer konvergencie $\rho > 0$. Potom platí:

(i) $f \in \mathscr{C}(-\rho, \rho)$;

(ii) $f \in \mathscr{D}(-\rho, \rho)$ a $(\forall x \in (-\rho, \rho))\ f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$;

(iii) $f \in \mathscr{R}\langle 0, x\rangle$ pre $x \in (-\rho, \rho)$ a platí $(\mathscr{R}) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Otázka: Ako a kedy sa prenášajú uvedené vlastnosti aj do krajných bodov intervalu konvergencie?

(i) **Dôsledok** (Vety VIII.6 a VIII.8) – Abel (1826): Ak rad (MR) má polomer konvergencie $\rho \in (0, +\infty)$ a konverguje v $x = \rho$ (resp. v $x = -\rho$), potom f je spojitá funkcia v $x = \rho$ (resp. v $x = -\rho$).

(ii) Ak rad (MR) konverguje v $x = \rho$, rad derivácií tam nemusí konvergovať! Napr. rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ má obor konvergencie $\langle -1, 1\rangle$, ale "derivovaný rad" $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ má obor konvergencie $\langle -1, 1)$;

(iii) Dá sa opäť ukázať, že konvergencia radu (MR) v $x = \rho$ (resp. v $x = -\rho$) implikuje konvergenciu radu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ v bode $x = \rho$ (resp. v $x = -\rho$).

(B) Vlastnosti mocninových radov – poznámky

Veta VIII.8

Nech rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ má polomer konvergencie $\rho > 0$. Potom platí:

(i) $f \in \mathscr{C}(-\rho, \rho)$;

(ii) $f \in \mathscr{D}(-\rho, \rho)$ a $(\forall x \in (-\rho, \rho))\ f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$;

(iii) $f \in \mathscr{R}\langle 0, x\rangle$ pre $x \in (-\rho, \rho)$ a platí $(\mathscr{R}) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Otázka: Ako a kedy sa prenášajú uvedené vlastnosti aj do krajných bodov intervalu konvergencie?

(i) **Dôsledok** (Vety VIII.6 a VIII.8) – Abel (1826): Ak rad (MR) má polomer konvergencie $\rho \in (0, +\infty)$ a konverguje v $x = \rho$ (resp. v $x = -\rho$), potom f je spojitá funkcia v $x = \rho$ (resp. v $x = -\rho$).

(ii) Ak rad (MR) konverguje v $x = \rho$, rad derivácií tam nemusí konvergovať! Napr. rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ má obor konvergencie $\langle -1, 1\rangle$, ale "derivovaný rad" $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ má obor konvergencie $\langle -1, 1)$;

(iii) Dá sa opäť ukázať, že konvergencia radu (MR) v $x = \rho$ (resp. v $x = -\rho$) implikuje konvergenciu radu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ v bode $x = \rho$ (resp. v $x = -\rho$).

(B) Vlastnosti mocninových radov – poznámky

Veta VIII.8

Nech rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ má polomer konvergencie $\rho > 0$. Potom platí:

(i) $f \in \mathscr{C}(-\rho, \rho)$;

(ii) $f \in \mathscr{D}(-\rho, \rho)$ a $(\forall x \in (-\rho, \rho))$ $f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$;

(iii) $f \in \mathscr{R}\langle 0, x\rangle$ pre $x \in (-\rho, \rho)$ a platí $(\mathscr{R}) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Otázka: Ako a kedy sa prenášajú uvedené vlastnosti aj do krajných bodov intervalu konvergencie?

(i) **Dôsledok** (Vety VIII.6 a VIII.8) – Abel (1826): Ak rad (MR) má polomer konvergencie $\rho \in (0, +\infty)$ a konverguje v $x = \rho$ (resp. v $x = -\rho$), potom f je spojitá funkcia v $x = \rho$ (resp. v $x = -\rho$).

(ii) Ak rad (MR) konverguje v $x = \rho$, rad derivácií tam nemusí konvergovať! Napr. rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ má obor konvergencie $\langle -1, 1\rangle$, ale "derivovaný rad" $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ má obor konvergencie $\langle -1, 1)$;

(iii) Dá sa opäť ukázať, že konvergencia radu (MR) v $x = \rho$ (resp. v $x = -\rho$) implikuje konvergenciu radu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ v bode $x = \rho$ (resp. v $x = -\rho$).

(B) Vlastnosti mocninových radov – praktické využitie

Veta VIII.8

Nech rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ má polomer konvergencie $\rho > 0$. Potom platí:

(i) $f \in \mathscr{C}(-\rho, \rho)$;

(ii) $f \in \mathscr{D}(-\rho, \rho)$ a $(\forall x \in (-\rho, \rho))\ f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$;

(iii) $f \in \mathscr{R}\langle 0, x\rangle$ pre $x \in (-\rho, \rho)$ a platí $(\mathscr{R}) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Úloha: Nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Obor konvergencie sme už našli, t.j. $\langle -1, 1)$. Keďže $\frac{x^n}{n} = (\mathscr{R}) \int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t$, podľa Vety VIII.8 máme

$$(\forall x \in (-1, 1))\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathscr{R}) \int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t = (\mathscr{R}) \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\right) \mathrm{d}t = (\mathscr{R}) \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-x).$$

Ponaučenie: Keďže rad konverguje v bode $x = -1$, podľa poznámok z predchádzajúceho slajdu máme, že Leibnizov rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, ktorý je relatívne konvergentný, má súčet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -f(-1) = \ln 2$.

(B) Vlastnosti mocninových radov – praktické využitie

Veta VIII.8

Nech rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ má polomer konvergencie $\rho > 0$. Potom platí:

(i) $f \in \mathscr{C}(-\rho, \rho)$;

(ii) $f \in \mathscr{D}(-\rho, \rho)$ a $(\forall x \in (-\rho, \rho))\ f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$;

(iii) $f \in \mathscr{R}\langle 0, x\rangle$ pre $x \in (-\rho, \rho)$ a platí $(\mathscr{R}) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Úloha: Nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Obor konvergencie sme už našli, t.j. $\langle -1, 1)$. Keďže $\frac{x^n}{n} = (\mathscr{R}) \int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t$, podľa Vety VIII.8 máme

$$(\forall x \in (-1, 1))\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathscr{R}) \int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t = (\mathscr{R}) \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\right) \mathrm{d}t = (\mathscr{R}) \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-x).$$

Ponaučenie: Keďže rad konverguje v bode $x = -1$, podľa poznámok z predchádzajúceho slajdu máme, že Leibnizov rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, ktorý je relatívne konvergentný, má súčet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -f(-1) = \ln 2$.

(B) Vlastnosti mocninových radov – praktické využitie

Veta VIII.8

Nech rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ má polomer konvergencie $\rho > 0$. Potom platí:

(i) $f \in \mathscr{C}(-\rho, \rho)$;

(ii) $f \in \mathscr{D}(-\rho, \rho)$ a $(\forall x \in (-\rho, \rho))\ f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$;

(iii) $f \in \mathscr{R}\langle 0, x\rangle$ pre $x \in (-\rho, \rho)$ a platí $(\mathscr{R}) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Úloha: Nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Obor konvergencie sme už našli, t.j. $\langle -1, 1)$. Keďže $\frac{x^n}{n} = (\mathscr{R}) \int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t$, podľa Vety VIII.8 máme

$$(\forall x \in (-1, 1))\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathscr{R}) \int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t = (\mathscr{R}) \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\right) \mathrm{d}t = (\mathscr{R}) \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-x).$$

Ponaučenie: Keďže rad konverguje v bode $x = -1$, podľa poznámok z predchádzajúceho slajdu máme, že Leibnizov rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, ktorý je relatívne konvergentný, má súčet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -f(-1) = \ln 2$.

(B) Vlastnosti mocninových radov – praktické využitie

Veta VIII.8

Nech rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ má polomer konvergencie $\rho > 0$. Potom platí:

(i) $f \in \mathscr{C}(-\rho, \rho)$;

(ii) $f \in \mathscr{D}(-\rho, \rho)$ a $(\forall x \in (-\rho, \rho))\ f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$;

(iii) $f \in \mathscr{R}\langle 0, x\rangle$ pre $x \in (-\rho, \rho)$ a platí $(\mathscr{R}) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Úloha: Nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Obor konvergencie sme už našli, t.j. $\langle -1, 1)$. Keďže $\frac{x^n}{n} = (\mathscr{R}) \int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t$, podľa Vety VIII.8 máme

$$(\forall x \in (-1, 1))\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathscr{R}) \int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t = (\mathscr{R}) \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\right) \mathrm{d}t = (\mathscr{R}) \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-x).$$

Ponaučenie: Keďže rad konverguje v bode $x = -1$, podľa poznámok z predchádzajúceho slajdu máme, že Leibnizov rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, ktorý je relatívne konvergentný, má súčet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -f(-1) = \ln 2$.

Mágia mocninových radov

Motivácia: Vieme, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1,1)$ platí

$$1+x+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x},$$

t.j. mocninový rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ konverguje k $f(x) = \frac{1}{1-x}$ na množine $M = (-1,1)$.

Keďže stred radu nie je žiaden magický bod, môžeme potom jednoducho písať

$$g(x) = \frac{1}{x} = \frac{-1}{1-(x+1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n, \quad \text{pre } |x+1| < 1,$$

$$g(x) = \frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\left(-\frac{(x-5)}{5}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} (x-5)^n, \quad \text{pre } \left|\frac{x-5}{5}\right| < 1.$$

Teda jednu a tú istú funkciu vieme rozvinúť do mocninového radu s rôznym stredom a rôznymi koeficientmi – samozrejme konvergujúcom na inom obore konvergencie!!!

Mágia mocninových radov

Motivácia: Vieme, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1,1)$ platí

$$1+x+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x},$$

t.j. mocninový rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ konverguje k $f(x) = \frac{1}{1-x}$ na množine $M = (-1,1)$.

Keďže stred radu nie je žiaden magický bod, môžeme potom jednoducho písať

$$g(x) = \frac{1}{x} = \frac{-1}{1-(x+1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n, \quad \text{pre } |x+1| < 1,$$

$$g(x) = \frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\left(-\frac{(x-5)}{5}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} (x-5)^n, \quad \text{pre } \left|\frac{x-5}{5}\right| < 1.$$

Teda jednu a tú istú funkciu vieme rozvinúť do mocninového radu s rôznym stredom a rôznymi koeficientmi – samozrejme konvergujúcom na inom obore konvergencie!!!

Mágia mocninových radov

Motivácia: Vieme, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1,1)$ platí

$$1+x+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x},$$

t.j. mocninový rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ konverguje k $f(x) = \frac{1}{1-x}$ na množine $M = (-1,1)$.

Keďže stred radu nie je žiaden magický bod, môžeme potom jednoducho písať

$$g(x) = \frac{1}{x} = \frac{-1}{1-(x+1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n, \quad \text{pre } |x+1| < 1,$$

$$g(x) = \frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\left(-\frac{(x-5)}{5}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} (x-5)^n, \quad \text{pre } \left|\frac{x-5}{5}\right| < 1.$$

Teda jednu a tú istú funkciu vieme rozvinúť do mocninového radu s rôznym stredom a rôznymi koeficientmi – samozrejme konvergujúcom na inom obore konvergencie!!!