Matematická analýza III.

(prezentácia k prednáške MAN2c/10)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MAN2c.html
Prednáška 13

20. decembra 2023

Taylorov rad = špeciálny mocninový rad

Pripomenutie (Taylorova veta): Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je n-krát diferencovateľná funkcia na $\langle a, b\rangle$, pričom $f^{(n)} \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle \cap \mathscr{D}(a, b)$. Ak $x_0 \in \langle a, b\rangle$ je ľubovoľný bod, potom pre každé $x \in \langle a, b\rangle$, $x \neq x_0$ existuje bod c medzi x a x_0 taký, že

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Otázka: Čo dostaneme z uvedenej rovnosti (za akých podmienok?), ak pošleme $n \to \infty$?

Definícia (Taylorovho radu)

Nech funkcia f je definovaná na okolí bodu x_0 a má v bode x_0 derivácie ľubovoľného rádu. Potom rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazývame Taylorov rad funkcie f so stredom v bode x_0 a označujeme $T(f, x_0; x)$ alebo len $T(x)$.

Poznámka: Taylorov rad so stredom v bode $x_0 = 0$ sa zvykne nazývať Maclaurinov rad.

Ak uvedený rad má polomer konvergencie $\rho \in (0, +\infty)$, tak Taylorov rad konverguje na intervale $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ k funkcii $T(x)$.

Taylorov rad = špeciálny mocninový rad

Pripomenutie (Taylorova veta): Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je n-krát diferencovateľná funkcia na $\langle a, b\rangle$, pričom $f^{(n)} \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle \cap \mathscr{D}(a, b)$. Ak $x_0 \in \langle a, b\rangle$ je ľubovoľný bod, potom pre každé $x \in \langle a, b\rangle$, $x \neq x_0$ existuje bod c medzi x a x_0 taký, že

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Otázka: Čo dostaneme z uvedenej rovnosti (za akých podmienok?), ak pošleme $n \to \infty$?

Definícia (Taylorovho radu)

Nech funkcia f je definovaná na okolí bodu x_0 a má v bode x_0 derivácie ľubovoľného rádu. Potom rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazývame Taylorov rad funkcie f so stredom v bode x_0 a označujeme $T(f, x_0; x)$ alebo len $T(x)$.

Poznámka: Taylorov rad so stredom v bode $x_0 = 0$ sa zvykne nazývať Maclaurinov rad.

Ak uvedený rad má polomer konvergencie $\rho \in (0, +\infty)$, tak Taylorov rad konverguje na intervale $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ k funkcii $T(x)$.

Taylorov rad = špeciálny mocninový rad

Pripomenutie (Taylorova veta): Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je n-krát diferencovateľná funkcia na $\langle a, b\rangle$, pričom $f^{(n)} \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle \cap \mathscr{D}(a, b)$. Ak $x_0 \in \langle a, b\rangle$ je ľubovoľný bod, potom pre každé $x \in \langle a, b\rangle$, $x \neq x_0$ existuje bod c medzi x a x_0 taký, že

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Otázka: Čo dostaneme z uvedenej rovnosti (za akých podmienok?), ak pošleme $n \to \infty$?

Definícia (Taylorovho radu)

Nech funkcia f je definovaná na okolí bodu x_0 a má v bode x_0 derivácie ľubovoľného rádu. Potom rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazývame Taylorov rad funkcie f so stredom v bode x_0 a označujeme $T(f, x_0; x)$ alebo len $T(x)$.

Poznámka: Taylorov rad so stredom v bode $x_0 = 0$ sa zvykne nazývať Maclaurinov rad.

Ak uvedený rad má polomer konvergencie $\rho \in (0, +\infty)$, tak Taylorov rad konverguje na intervale $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ k funkcii $T(x)$.

Taylorov rad = špeciálny mocninový rad

Pripomenutie (Taylorova veta): Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je n-krát diferencovateľná funkcia na $\langle a, b\rangle$, pričom $f^{(n)} \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle \cap \mathscr{D}(a, b)$. Ak $x_0 \in \langle a, b\rangle$ je ľubovoľný bod, potom pre každé $x \in \langle a, b\rangle$, $x \neq x_0$ existuje bod c medzi x a x_0 taký, že

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Otázka: Čo dostaneme z uvedenej rovnosti (za akých podmienok?), ak pošleme $n \to \infty$?

Definícia (Taylorovho radu)

Nech funkcia f je definovaná na okolí bodu x_0 a má v bode x_0 derivácie ľubovoľného rádu. Potom rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazývame Taylorov rad funkcie f so stredom v bode x_0 a označujeme $T(f, x_0; x)$ alebo len $T(x)$.

Poznámka: Taylorov rad so stredom v bode $x_0 = 0$ sa zvykne nazývať Maclaurinov rad.

Ak uvedený rad má polomer konvergencie $\rho \in (0, +\infty)$, tak Taylorov rad konverguje na intervale $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ k funkcii $T(x)$.

Taylorov rad = špeciálny mocninový rad

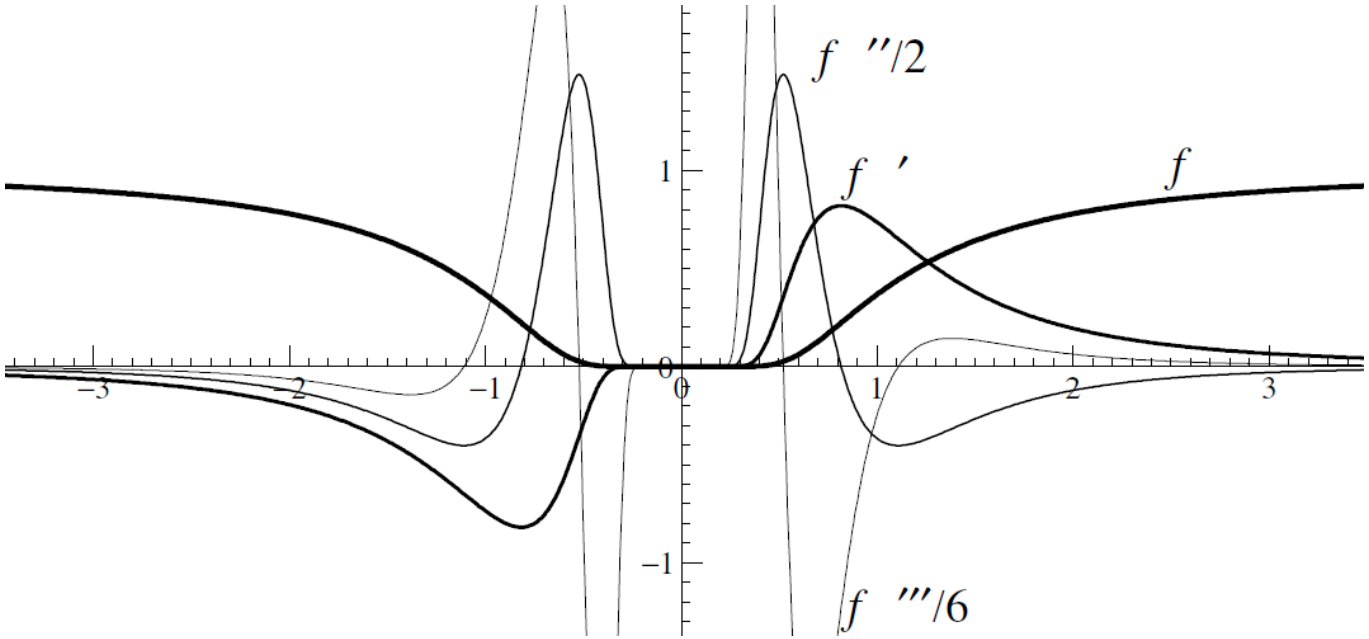
Pripomenutie: Rad $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ nazývame Taylorov rad funkcie f so stredom v bode x_0.

Otázka: Platí, že $f(x) = T(x)$ pre každé $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$?

... Taylor's formula, which can no longer be admitted in general...

Cauchy: *Résumé* (1823)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$



Taylorov rad = špeciálny mocninový rad

Otázka: Môže byť situácia snáď ešte horšia? Ale áno: nekonečne diferencovateľná funkcia, ktorej Taylorov rad nekonverguje...

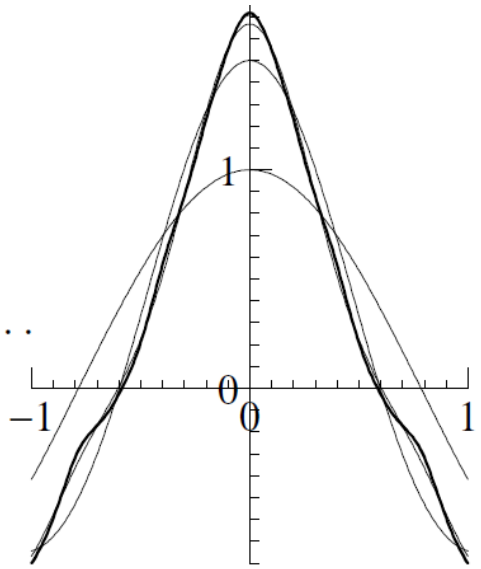
Funkcionálny rad

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2^n x}{n!} = \frac{\cos 2x}{1!} + \frac{\cos 4x}{2!} + \frac{\cos 8x}{3!} + \frac{\cos 16x}{4!} \dots$$

a všetky jeho derivácie konvergujú rovnomerne na $\mathbb{R}$, Taylorov rad funkcie f v bode $x_0 = 0$ má tvar

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \cdots = (\mathrm{e} - 1) - \frac{\mathrm{e}^4 - 1}{2!}x^2 + \frac{\mathrm{e}^{16} - 1}{4!}x^4 + \dots,$$

ale konverguje len v strede!



Taylorov rad = špeciálny mocninový rad

Otázka: Za akých podmienok bude platiť $T(x) = f(x)$ pre každé $x \in \mathscr{O}(x_0)$?

Pozorovanie: n-tý Taylorov polynóm funkcie f v bode x_0, t.j.

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

je vlastne n-tý čiastočný súčet Taylorovho radu $T(x)$ funkcie f v bode x_0 a vieme, že platí Taylorov vzorec

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \; n = 0, 1, \ldots, \; x \in \mathscr{O}(x_0),$$

kde R_n je zvyšok po n-tom Taylorovom polynóme.

Veta VII.13

Taylorov rad nekonečne veľakrát diferencovateľnej funkcie f v bode x_0 konverguje na nejakom okolí bodu x_0 k funkcii f práve vtedy, keď na tomto okolí postupnosť zvyškov R_n konverguje k nule.

Úloha: Nájdite Maclaurinov rad funkcie e^x.

Taylorov rad = špeciálny mocninový rad

Otázka: Za akých podmienok bude platiť $T(x) = f(x)$ pre každé $x \in \mathscr{O}(x_0)$?

Pozorovanie: n-tý Taylorov polynóm funkcie f v bode x_0, t.j.

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

je vlastne n-tý čiastočný súčet Taylorovho radu $T(x)$ funkcie f v bode x_0 a vieme, že platí Taylorov vzorec

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \; n = 0, 1, \ldots, \; x \in \mathscr{O}(x_0),$$

kde R_n je zvyšok po n-tom Taylorovom polynóme.

Veta VII.13

Taylorov rad nekonečne veľakrát diferencovateľnej funkcie f v bode x_0 konverguje na nejakom okolí bodu x_0 k funkcii f práve vtedy, keď na tomto okolí postupnosť zvyškov R_n konverguje k nule.

Úloha: Nájdite Maclaurinov rad funkcie e^x.

Taylorov rad = špeciálny mocninový rad

Otázka: Za akých podmienok bude platiť $T(x) = f(x)$ pre každé $x \in \mathscr{O}(x_0)$?

Pozorovanie: n-tý Taylorov polynóm funkcie f v bode x_0, t.j.

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

je vlastne n-tý čiastočný súčet Taylorovho radu $T(x)$ funkcie f v bode x_0 a vieme, že platí Taylorov vzorec

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \; n = 0, 1, \ldots, \; x \in \mathscr{O}(x_0),$$

kde R_n je zvyšok po n-tom Taylorovom polynóme.

Veta VII.13

Taylorov rad nekonečne veľakrát diferencovateľnej funkcie f v bode x_0 konverguje na nejakom okolí bodu x_0 k funkcii f práve vtedy, keď na tomto okolí postupnosť zvyškov R_n konverguje k nule.

Úloha: Nájdite Maclaurinov rad funkcie e^x.

Taylorov rad = špeciálny mocninový rad

Otázka: Za akých podmienok bude platiť $T(x) = f(x)$ pre každé $x \in \mathscr{O}(x_0)$?

Pozorovanie: n-tý Taylorov polynóm funkcie f v bode x_0, t.j.

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

je vlastne n-tý čiastočný súčet Taylorovho radu $T(x)$ funkcie f v bode x_0 a vieme, že platí Taylorov vzorec

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \; n = 0, 1, \ldots, \; x \in \mathscr{O}(x_0),$$

kde R_n je zvyšok po n-tom Taylorovom polynóme.

Veta VII.13

Taylorov rad nekonečne veľakrát diferencovateľnej funkcie f v bode x_0 konverguje na nejakom okolí bodu x_0 k funkcii f práve vtedy, keď na tomto okolí postupnosť zvyškov R_n konverguje k nule.

Úloha: Nájdite Maclaurinov rad funkcie e^x.

Taylorov rad = špeciálny mocninový rad

Pripomenutie (Taylorova veta): Nech $f \in \mathscr{D}^{(n)}(\mathscr{O}(x_0))$ a $f^{(n)} \in \mathscr{D}(\mathscr{O}^*(x_0))$. Ak $g \in \mathscr{D}(\mathscr{O}(x_0))$ a $(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0))$ $g'(x) \neq 0$, tak $(\exists \theta \in (0,1))$ $(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0))$

$$\mathrm{R}_n(x) = \frac{(x-x_0)^n(1-\theta)^n}{n!} \cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{g'(x_0+\theta(x-x_0))} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)).$$

Taylorov vzorec $f(x) = T_n(x) + R_n(x),\ n = 0, 1, \ldots,\ x \in \mathscr{O}(x_0)$

Najčastejšie používané tvary zvyšku R_n:

(i) pre $g(t) = (x-t)^{n+1}$ máme Lagrangeov tvar zvyšku

$$\mathrm{L}_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0));$$

(ii) pre $g(t) = t$ máme Cauchyho tvar zvyšku

$$\mathrm{C}_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0));$$

(iii) integrálny tvar zvyšku

$$\mathrm{I}_n(x) = (\mathscr{R}) \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \, \mathrm{d}t.$$

Taylorov rad = špeciálny mocninový rad

Pripomenutie (Taylorova veta): Nech $f \in \mathscr{D}^{(n)}(\mathscr{O}(x_0))$ a $f^{(n)} \in \mathscr{D}(\mathscr{O}^*(x_0))$. Ak $g \in \mathscr{D}(\mathscr{O}(x_0))$ a $(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0))$ $g'(x) \neq 0$, tak $(\exists \theta \in (0,1))$ $(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0))$

$$\mathrm{R}_n(x) = \frac{(x-x_0)^n(1-\theta)^n}{n!} \cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{g'(x_0+\theta(x-x_0))} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)).$$

Taylorov vzorec $f(x) = T_n(x) + R_n(x),\ n = 0, 1, \ldots,\ x \in \mathscr{O}(x_0)$

Najčastejšie používané tvary zvyšku R_n:

(i) pre $g(t) = (x-t)^{n+1}$ máme Lagrangeov tvar zvyšku

$$\mathrm{L}_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0));$$

(ii) pre $g(t) = t$ máme Cauchyho tvar zvyšku

$$\mathrm{C}_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0));$$

(iii) integrálny tvar zvyšku

$$\mathrm{I}_n(x) = (\mathscr{R}) \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \, \mathrm{d}t.$$

Taylorov rad = špeciálny mocninový rad

Pripomenutie (Taylorova veta): Nech $f \in \mathscr{D}^{(n)}(\mathscr{O}(x_0))$ a $f^{(n)} \in \mathscr{D}(\mathscr{O}^*(x_0))$. Ak $g \in \mathscr{D}(\mathscr{O}(x_0))$ a $(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0))$ $g'(x) \neq 0$, tak $(\exists \theta \in (0,1))$ $(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0))$

$$\mathrm{R}_n(x) = \frac{(x-x_0)^n(1-\theta)^n}{n!} \cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{g'(x_0+\theta(x-x_0))} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)).$$

Taylorov vzorec $f(x) = T_n(x) + R_n(x),\ n = 0, 1, \ldots,\ x \in \mathscr{O}(x_0)$

Najčastejšie používané tvary zvyšku R_n:

(i) pre $g(t) = (x-t)^{n+1}$ máme Lagrangeov tvar zvyšku

$$\mathrm{L}_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0));$$

(ii) pre $g(t) = t$ máme Cauchyho tvar zvyšku

$$\mathrm{C}_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0));$$

(iii) integrálny tvar zvyšku

$$\mathrm{I}_n(x) = (\mathscr{R}) \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \, \mathrm{d}t.$$

Ako je to s jednoznačnosťou rozkladu funkcie do Taylorovho radu?

Veta VII.14

Nech funkcia f je nekonečne krát diferencovateľná na intervale I a existuje $M > 0$ také, že $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in I)\ |f^{(n)}(x)| \leq M$. Potom Taylorov rad funkcie f konverguje k funkcii f na I.

Úloha: Nájdite Maclaurinove rady funkcií $\sin x$ a $\cos x$.

Veta VII.15

Nech funkcia f je súčtom mocninového radu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ pre } x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho), \text{resp. } x \in (-\infty, +\infty).$$

Potom je tento rad Taylorov rad funkcie f so stredom v bode x_0.

Dôsledok (o jednoznačnosti rozkladu)

Ak existuje rozklad funkcie f v okolí bodu x_0 do mocninového radu, potom je tento rozklad jediný.

Úloha: Nájdite Maclaurinov rad funkcie $\operatorname{arctg} x$.

Ako je to s jednoznačnosťou rozkladu funkcie do Taylorovho radu?

Veta VII.14

Nech funkcia f je nekonečne krát diferencovateľná na intervale I a existuje $M > 0$ také, že $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in I)\ |f^{(n)}(x)| \leq M$. Potom Taylorov rad funkcie f konverguje k funkcii f na I.

Úloha: Nájdite Maclaurinove rady funkcií $\sin x$ a $\cos x$.

Veta VII.15

Nech funkcia f je súčtom mocninového radu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ pre } x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho), \text{resp. } x \in (-\infty, +\infty).$$

Potom je tento rad Taylorov rad funkcie f so stredom v bode x_0.

Dôsledok (o jednoznačnosti rozkladu)

Ak existuje rozklad funkcie f v okolí bodu x_0 do mocninového radu, potom je tento rozklad jediný.

Úloha: Nájdite Maclaurinov rad funkcie $\operatorname{arctg} x$.

Ako je to s jednoznačnosťou rozkladu funkcie do Taylorovho radu?

Veta VII.14

Nech funkcia f je nekonečne krát diferencovateľná na intervale I a existuje $M > 0$ také, že $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in I)\ |f^{(n)}(x)| \leq M$. Potom Taylorov rad funkcie f konverguje k funkcii f na I.

Úloha: Nájdite Maclaurinove rady funkcií $\sin x$ a $\cos x$.

Veta VII.15

Nech funkcia f je súčtom mocninového radu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ pre } x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho), \text{resp. } x \in (-\infty, +\infty).$$

Potom je tento rad Taylorov rad funkcie f so stredom v bode x_0.

Dôsledok (o jednoznačnosti rozkladu)

Ak existuje rozklad funkcie f v okolí bodu x_0 do mocninového radu, potom je tento rozklad jediný.

Úloha: Nájdite Maclaurinov rad funkcie $\operatorname{arctg} x$.

Ako je to s jednoznačnosťou rozkladu funkcie do Taylorovho radu?

Veta VII.14

Nech funkcia f je nekonečne krát diferencovateľná na intervale I a existuje $M > 0$ také, že $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in I)\ |f^{(n)}(x)| \leq M$. Potom Taylorov rad funkcie f konverguje k funkcii f na I.

Úloha: Nájdite Maclaurinove rady funkcií $\sin x$ a $\cos x$.

Veta VII.15

Nech funkcia f je súčtom mocninového radu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ pre } x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho), \text{resp. } x \in (-\infty, +\infty).$$

Potom je tento rad Taylorov rad funkcie f so stredom v bode x_0.

Dôsledok (o jednoznačnosti rozkladu)

Ak existuje rozklad funkcie f v okolí bodu x_0 do mocninového radu, potom je tento rozklad jediný.

Úloha: Nájdite Maclaurinov rad funkcie $\operatorname{arctg} x$.

Ako je to s jednoznačnosťou rozkladu funkcie do Taylorovho radu?

Veta VII.14

Nech funkcia f je nekonečne krát diferencovateľná na intervale I a existuje $M > 0$ také, že $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in I)\ |f^{(n)}(x)| \leq M$. Potom Taylorov rad funkcie f konverguje k funkcii f na I.

Úloha: Nájdite Maclaurinove rady funkcií $\sin x$ a $\cos x$.

Veta VII.15

Nech funkcia f je súčtom mocninového radu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ pre } x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho), \text{resp. } x \in (-\infty, +\infty).$$

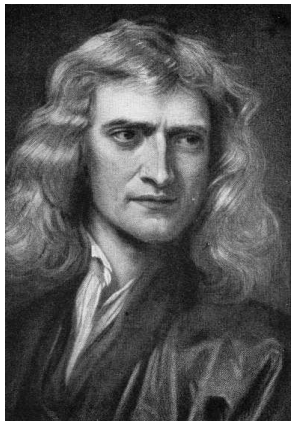
Potom je tento rad Taylorov rad funkcie f so stredom v bode x_0.

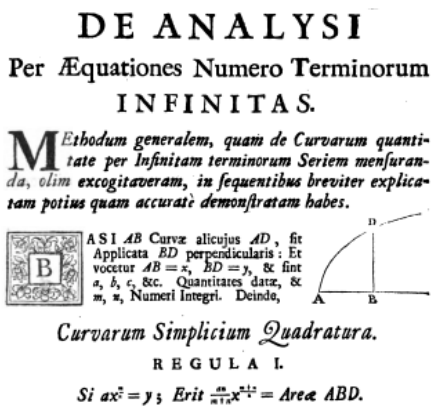
Dôsledok (o jednoznačnosti rozkladu)

Ak existuje rozklad funkcie f v okolí bodu x_0 do mocninového radu, potom je tento rozklad jediný.

Úloha: Nájdite Maclaurinov rad funkcie $\operatorname{arctg} x$.

Užitočné Taylorove rady niektorých elementárnych funkcií





DE ANALYSI

Per Æquationes Numero Terminorum

INFINITAS.

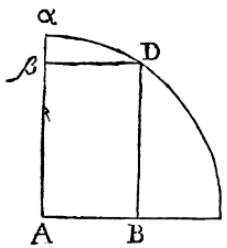
Methodum generalem, quam de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem menſuranda, olim excogitaveram, in ſequentibus breviter explicatam potius quam accuratè demonſtratam habes.

BASI *AB* Curvæ alicujus *AD*, ſit Applicata *BD* perpendicularis: Et vocetur $AB = x$, $BD = y$, & ſint a, b, c, &c. Quantitates datæ, & m, n, Numeri Integri. Deinde,

Curvarum Simplicium Quadratura.

REGULA I.

Si $ax^{\frac{m}{n}} = y$; *Erit* $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} =$ *Areæ ABD.*



To find the Base from the Length of the Curve given.

45. If from the Arch αD given the Sine AB was required; I extract the Root of the Equation found above, *viz.* $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$ (it being ſuppoſed that $AB = x$, $\alpha D = z$, and $A\alpha = 1$) by which I find $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$ &c.

46. And moreover if the Coſine $A\beta$ were required from that Arch given, make $A\beta$ $(= \sqrt{1 - xx}) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}z^{10}$, &c.

ISAAC NEWTON (1642–1727)

Ukážka je z diela *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (1669), v ktorom Newton určuje dĺžku kružnice s polomerom 1 so stredom v počiatku súradnicovej sústavy. Označením dlžky oblúka αD písmenom z nachádza vyjadrenie pre dĺžku úsečky AB pomocou z, presnejšie $x = \overline{AB} = \sin z$, ktorý dokázal vyjadriť v tvare

$$\sin z = x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 - \dots$$

Podobne získava vyjadrenie pre kosínus $\cos z = A\beta = \sqrt{1 - z^2}$ v tvare nekonečného radu, t.j.

$$\cos z = \sqrt{1 - z^2} = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}z^{10} + \dots$$

Užitočné Taylorove rady niektorých elementárnych funkcií

... but the one which gives me most pleasure is a paper ... on the simple series

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 \dots$$

I dare say that this is the first rigorous proof of the binomial formula ...

z Abelovho listu (svojmu učiteľovi) Holmböeovi (1826)

NIELS HENRIK ABEL (1802–1829)

Užitočné Taylorove rady niektorých elementárnych funkcií

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1,1)\,;$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} x^k, \quad x \in (-1,1)\,;$$

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1,1\rangle\,.$$

Použitie mocninových radov

(i) približné výpočty: určte hodnotu čísla π s presnosťou 10^{-4}

(ii) výpočet limít funkcií:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{e}^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}$$

(iii) výpočet integrálov:

$$\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{d}x$$

(iv) mnohé iné (riešenia diferenciálnych rovníc, približné riešenia funkcionálnych rovníc, atď.) potrebné napr. v oblastiach ako

- fyzika – kvantová mechanika, štandardný model (teória testovaná na LHC v CERN-e), fyzika materiálov, kozmológia
- finančníctvo a poisťovníctvo (pravdepodobnostné metódy),
- inžinierske vedy (spektrálna analýza = Fourierove rady)
- informatika – ako vlastne počíta počítač hodnoty (nielen špeciálnych) funkcií?

mathresearchkhemmy.files.wordpress.com/2012/05/example-of-application-of-power-series.pdf

Použitie mocninových radov

(i) približné výpočty: určte hodnotu čísla π s presnosťou 10^{-4}

(ii) výpočet limít funkcií:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{e}^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}$$

(iii) výpočet integrálov:

$$\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{d}x$$

(iv) mnohé iné (riešenia diferenciálnych rovníc, približné riešenia funkcionálnych rovníc, atď.) potrebné napr. v oblastiach ako

- fyzika – kvantová mechanika, štandardný model (teória testovaná na LHC v CERN-e), fyzika materiálov, kozmológia
- finančníctvo a poisťovníctvo (pravdepodobnostné metódy),
- inžinierske vedy (spektrálna analýza = Fourierove rady)
- informatika – ako vlastne počíta počítač hodnoty (nielen špeciálnych) funkcií?

mathresearchkhemmy.files.wordpress.com/2012/05/example-of-application-of-power-series.pdf

Použitie mocninových radov

(i) približné výpočty: určte hodnotu čísla π s presnosťou 10^{-4}

(ii) výpočet limít funkcií:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{e}^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}$$

(iii) výpočet integrálov:

$$\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{d}x$$

(iv) mnohé iné (riešenia diferenciálnych rovníc, približné riešenia funkcionálnych rovníc, atď.) potrebné napr. v oblastiach ako

- fyzika – kvantová mechanika, štandardný model (teória testovaná na LHC v CERN-e), fyzika materiálov, kozmológia
- finančníctvo a poisťovníctvo (pravdepodobnostné metódy),
- inžinierske vedy (spektrálna analýza = Fourierove rady)
- informatika – ako vlastne počíta počítač hodnoty (nielen špeciálnych) funkcií?

mathresearchkhemmy.files.wordpress.com/2012/05/example-of-application-of-power-series.pdf

Použitie mocninových radov

(i) približné výpočty: určte hodnotu čísla π s presnosťou 10^{-4}

(ii) výpočet limít funkcií:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{e}^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}$$

(iii) výpočet integrálov:

$$\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{d}x$$

(iv) mnohé iné (riešenia diferenciálnych rovníc, približné riešenia funkcionálnych rovníc, atď.) potrebné napr. v oblastiach ako

- fyzika – kvantová mechanika, štandardný model (teória testovaná na LHC v CERN-e), fyzika materiálov, kozmológia
- finančníctvo a poisťovníctvo (pravdepodobnostné metódy),
- inžinierske vedy (spektrálna analýza = Fourierove rady)
- informatika – ako vlastne počíta počítač hodnoty (nielen špeciálnych) funkcií?

`mathresearchkhemmy.files.wordpress.com/2012/05/example-of-application-of-power-series.pdf`