Séria úloh č. 1

1. Vypočítajte (ak existujú) Newtonove integrály

a) $(\mathcal{N})\displaystyle\int_{-3}^{1} |x|\,\mathrm{d}x$;

b) $(\mathcal{N})\displaystyle\int_{0}^{1} \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$;

c) $(\mathcal{N})\displaystyle\int_{3}^{7} \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$;

d) $(\mathcal{N})\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

e) $(\mathcal{N})\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \cos x \sin^2 x\,\mathrm{d}x$;

f) $(\mathcal{N})\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{3+2\sin x}$;

g) $(\mathcal{N})\displaystyle\int_{0}^{1} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$;

h) $(\mathcal{N})\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg} x\,\mathrm{d}x$;

i) $(\mathcal{N})\displaystyle\int_{0}^{\pi} x^3 \sin x\,\mathrm{d}x$;

j) $(\mathcal{N})\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$;

k) $(\mathcal{N})\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$;

l) $(\mathcal{N})\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{2^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

m) $(\mathcal{N})\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{x-x^2}$;

n) $(\mathcal{N})\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x$;

o) $(\mathcal{N})\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^5}{x+2}\,\mathrm{d}x$;

p) $(\mathcal{N})\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} x\cosh x\,\mathrm{d}x$;

q) $(\mathcal{N})\displaystyle\int_{-1}^{0} (x+|x|)\,\mathrm{d}x$;

r)* $(\mathcal{N})\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$;

s) $(\mathcal{N})\displaystyle\int_{0}^{3} \mathrm{sgn}(x-x^3)\,\mathrm{d}x$;

t) $(\mathcal{N})\displaystyle\int_{1}^{n+1} \ln\lfloor x\rfloor\,\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}$;

u) $(\mathcal{N})\displaystyle\int_{0}^{2} \lfloor \mathrm{e}^x\rfloor\,\mathrm{d}x$.

2. Nech $f\in\mathcal{N}\langle a,b\rangle$. Potom

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}(\mathcal{N})\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $a\le a_n\le b_n\le b$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dokážte!

3. Nájdite príklady funkcií, že

(i) existuje iba jeden z integrálov $(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $(\mathcal{N})\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$;

(ii) f je neohraničená na $\langle 0,1\rangle$ a $f\in\mathcal{N}\langle 0,1\rangle$;

(iii) f je ohraničená na $\langle 0,1\rangle$ a $f\notin\mathcal{N}\langle 0,1\rangle$;

4. Výsledok práce snaživého počtára je nasledujúci

$$(\mathcal{N})\int_{-1}^{1} \frac{\ln|x|}{x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c}\text{substitúcia}\\ t=\ln|x|\\ x=-1\Rightarrow t=0\\ x=1\Rightarrow t=0\end{array}\right| = (\mathcal{N})\int_0^0 t\,\mathrm{d}t = 0.$$

Je tento postup korektný? Prečo?

5. Vysvetlite, prečo formálne použitie substitúcie $x = \varphi(t)$ vedie k nesprávnym výsledkom pri výpočte nasledujúcich Newtonových integrálov:

a) $(\mathscr{N}) \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}x$, kde $t = x^{2/3}$;

b) $(\mathscr{N}) \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, kde $x = \frac{1}{t}$;

c) $(\mathscr{N}) \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$, kde $t = \operatorname{tg} t$.

6.* S využitím vety o substitúcii (pozor na predpoklady!) spočítajte

$$(\mathscr{N}) \int_{-1}^{3} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x, \quad \text{kde } f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}.$$

7. Nech f je párna funkcia a $f \in \mathscr{N}\langle -a, a\rangle$.

(i) Dokážte, že $(\mathscr{N}) \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(ii) Platí predchádzajúce tvrdenie aj bez predpokladu existencie Newtonovho integrálu (napr. len za predpokladu existencie primitívnej funkcie)?

8. Dokážte nasledujúce rovnosti (za predpokladu, že uvedené integrály existujú):

(i) $(\mathscr{N}) \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{N}) \int_{a}^{b} f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$;

(ii) $(\mathscr{N}) \int_{0}^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = 2(\mathscr{N}) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$;

(iii) $(\mathscr{N}) \int_{a}^{b} x f''(x)\,\mathrm{d}x = [bf'(b) - f(b)] - [af'(a) - f(a)]$, pričom $f'' \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$;

(iv)* $(\mathscr{N}) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,\mathrm{d}x = (\mathscr{N}) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,\mathrm{d}x$, kde $m \in \mathbb{N}$.

Pomocou vzťahu (iv) určte hodnotu integrálov $(\mathscr{N}) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ a $(\mathscr{N}) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.