Séria úloh č. 2

1. Určte horné a dolné Darbouxove súčty prislúchajúce funkcii f a deleniam D, ak

   a) $f(x) = 2x + 1$ a $D = \{1, \frac{3}{2}, 2, 3\}$;

   b) $f(x) = \sin x$ a $D = \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi\}$;

   c) $f(x) = x$ a $D_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$, kde $n \in \mathbb{N}$;

   d) $f(x) = \frac{1}{x}$ a $D_n = \{1, \sqrt[n]{3}, \sqrt[n]{9}, \sqrt[n]{27}, \dots, 3\}$, kde $n \in \mathbb{N}$.

2. Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia. Dokážte, že

$$(\forall D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle)\ \ S(-f, D) - s(f, D) = 0.$$

3. Nech $f(x) = 2^{-x}$. Nájdite delenie D intervalu $\langle 2, 5\rangle$, aby $S(f, D) - s(f, D) < 1$.

4. Nech $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 1, 2), \\ 2, & x = 2. \end{cases}$

   a) Dokážte, že $s(g, D) = 1$ pre každé delenie D intervalu $\langle 1, 2\rangle$.

   b) Skonštruujte delenie D', pre ktoré $S(g, D') < 1 + \frac{1}{10}$.

   c) K ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ nájdite delenie D'', aby $S(g, D'') < 1 + \varepsilon$.

5. Nech $h(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{inde}. \end{cases}$

   a) Určte $s(h, D)$ a $S(h, D)$ pre každé delenie D intervalu $\langle 0, b\rangle$.

   b) Je funkcia h Riemannovsky integrovateľná na intervale $\langle 0, b\rangle$?

6. Nech postupnosť delení D_n vznikne delením čiastočných intervalov intervalu $\langle 0, 2\rangle$ n-krát na polovicu. Pomocou tejto postupnosti zistite, či funkcia $h(x) = 3 - \sqrt{x}$ je $\mathscr{R}$-integrovateľná na intervale $\langle 0, 2\rangle$.

7. Nech $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ a $(d_n)_1^\infty$ je postupnosť zodpovedajúceho počtu deliacich bodov taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = +\infty$. Je postupnosť $(D_n)_1^\infty$ normálna?

8. S chybou menšou ako 0,1 odhadnite hodnotu integrálu $(\mathscr{R}) \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

9. Ohraničte hodnotu integrálov:

   a) $(\mathscr{R}) \displaystyle\int_0^2 \frac{5 - x}{9 - x^2}\,\mathrm{d}x$;

   b) $(\mathscr{R}) \displaystyle\int_1^3 \sqrt{3 + x^3}\,\mathrm{d}x$;

   c) $(\mathscr{R}) \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{2}}\,\mathrm{d}x$;

   d) $(\mathscr{R}) \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2 + x - x^2}}\,\mathrm{d}x$.

10*. Nech $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a g je funkcia definovaná na $\langle a, b\rangle$ taká, že $g(x) = f(x)$ všade okrem konečného počtu bodov v $\langle a, b\rangle$. Dokážte, že $g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

* – úloha, za správne vyriešenie ktorej získa prvý riešiteľ 1 bonusový bod k priebežnému hodnoteniu

11. Dokážte nerovnosti:

a) $1 < (\mathscr{R}) \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x < \mathrm{e}$;

b) $\dfrac{2}{5} < (\mathscr{R}) \displaystyle\int_1^2 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} < \frac{1}{2}$;

c) $9 < (\mathscr{R}) \displaystyle\int_8^{18} \frac{x+1}{x+2}\,\mathrm{d}x < 9{,}5$;

d) $2^{-q} < (\mathscr{R}) \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^p)^q} < 1$, kde $p > 0$ a $q > 0$.