Séria úloh č. 3

1. Dokážte, že $s(x^2, D_n) \leq \frac{1}{3} \leq S(x^2, D_n)$, kde D_n je postupnosť ekvidištančných delení intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

2. Vypočítajte $(\mathscr{R}) \int_a^b x^\alpha \,\mathrm{d}x$, $0 < a < b$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, ako limitu integrálnych súčtov, kde body delenia voľte tak, aby tvorili geometrickú postupnosť.

3. Dokážte nerovnosti

a) $1998 < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{10^6}} < 1999$;

b) $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2n \sqrt[2n]{\dfrac{n!}{(3n)!}} < \ln 3$;

hint: použite *AG-nerovnosť* $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ pre $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots n$;

c) $(\forall n \in \mathbb{N}, n > 1)\ n^n < n!\,\mathrm{e}^{n-1} < \dfrac{(n+1)^{n+1}}{4}$;

hint: uvažujte "zlogaritmovanú" verziu nerovnosti.

4. Nájdite celé číslo, ktoré je najbližšie k číslu

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{1000}}.$$

5. Určte $s(f, D)$, $S(f, D)$ a $\mathscr{S}(f, D, \Xi)$, ak

a) $f(x) = 3 - \dfrac{x}{2}$, $D = \{2, 5, 7, 8, 11, 12\}$ a $\Xi = \{2, 6, \frac{15}{2}, 9, 12\}$;

b) $f(x) = \ln x - 1$, D je ľubovoľné delenie intervalu $\langle 1, 4\rangle$ na 6 častí a Ξ sú ľavé koncové body čiastkových intervalov delenia D;

c) $f(x) = x^2$, D je ľubovoľné delenie intervalu $\langle a, b\rangle$ a Ξ pozostáva z bodov

$$\xi_i = \sqrt{\frac{x_i^2 + x_i x_{i-1} + x_{i-1}^2}{3}},$$

kde $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ je čiastkový interval delenia D;

d) $f(x) = \sin x$, D_n je postupnosť ekvidištančných delení intervalu $\langle 0, \frac{3}{2}\pi\rangle$ a Ξ_n sú pravé koncové body čiastkových intervalov delenia D_n;

e) $f(x) = \sin x$, D_n je postupnosť ekvidištančných delení intervalu $\langle 0, \frac{3}{2}\pi\rangle$ a Ξ_n sú stredy čiastkových intervalov delenia D_n.

6.** Dokážte, že

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha^2 < 1)\ \ (\mathscr{R}) \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)\,\mathrm{d}x = 0.$$

hint: na výpočet použite dolné Darbouxove súčty pre ekvidištančnú postupnosť delení.

7.* Dokážte, že

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n+1}}{2} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n+1}}{n} \right) > 0.$$

8. Nech $f \in \mathscr{R}\langle 0,1\rangle$ a pre každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Dokážte, že postupnosť $(a_n)_1^\infty$ konverguje k číslu $(\mathscr{R})\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

9.* Nech $f \in \mathscr{C}\langle a,b\rangle$ je nezáporná funkcia. Dokážte, že $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ práve vtedy, keď $f(x) = 0$ pre každé $x \in \langle a,b\rangle$.

* – úlohy, za správne vyriešenie ktorých získa prvý riešiteľ 1 bonusový bod k priebežnému hodnoteniu (za každú z nich)