Séria úloh č. 4

1. Vypočítajte limitu postupnosti $(a_n)_1^\infty$, ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ je

a) $a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{4n-1} + \dfrac{1}{4n}$;

b) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{25}{n^2}\sqrt{n^2-k^2}$;

c) $a_n = \dfrac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$, $k \geq 0$;

d) $a_n = \dfrac{\pi}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$;

e) $a_n = n\left(\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2}\right)$;

f) $a_n = \dfrac{1 + \sqrt[3]{2} + \cdots + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}$.

2. Vypočítajte limity

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \cdots + \frac{(4n-1)^3}{n^4}\right)$;

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(1 + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right)$;

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^2}{n^3+2^3} + \frac{4^2}{n^3+4^3} + \cdots + \frac{(2n)^2}{n^3+(2n)^3}\right)$;

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$;

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^k + 3^k + \cdots + (2n-1)^k}{n^{k+1}}$, $k \geq 0$;

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\ldots f\left(\frac{n}{n}\right)}$, kde f je kladná spojitá funkcia.

3. Aké je treba zobrať $\delta > 0$, aby pre delenie $D \in \mathscr{D}\langle 0,\pi\rangle$ s normou $\nu(D) < \delta$ a ľubovoľných reprezentantov Ξ platil odhad

$$\left|(\mathscr{R})\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n}\sin\xi_i\triangle x_i\right| < 0{,}001?$$

3. Bez výpočtu zistite, ktorý z uvedených integrálov je väčší:

a) $(\mathscr{R})\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x$ alebo $(\mathscr{R})\displaystyle\int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x$;

b) $(\mathscr{R})\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\,\mathrm{d}x$ alebo $(\mathscr{R})\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$;

c) $(\mathscr{R})\displaystyle\int_0^{1} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ alebo $(\mathscr{R})\displaystyle\int_0^{1} \mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x$;

d) $(\mathscr{R})\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{3}\right)^x\,\mathrm{d}x$ alebo $(\mathscr{R})\displaystyle\int_{-2}^{-1} 3^x\,\mathrm{d}x$;

e) $(\mathscr{R})\displaystyle\int_0^{1} \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$ alebo $(\mathscr{R})\displaystyle\int_0^{1} \mathrm{e}^{-x^2}\sin x\,\mathrm{d}x$.

5. Nech $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Vyplýva z nerovnosti $(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ nerovnosť $f(x) \geq 0$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle$?

6. Nech $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ je monotónna funkcia. Dokážte, že $(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ leží medzi hodnotami $(b-a)f(a)$ a $(b-a)f(b)$.

7.* Môže byť súčin (súčet) integrovateľnej a ohraničenej neintegrovateľnej funkcie integrovateľný?

8.* Nech $f : \langle a, b\rangle \to \langle m, M\rangle$ a $(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Dokážte, že

$$(\mathscr{R}) \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \leq -mM(b-a).$$

* – úlohy, za správne vyriešenie ktorých získa prvý riešiteľ po 1 bonusovom bode k priebežnému hodnoteniu