Séria úloh č. 5

1. Odhadnite hodnotu Riemannovho integrálu:

a) $(\mathscr{R})\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2-x^3}}$;

b) $(\mathscr{R})\displaystyle\int_{-3}^8 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$;

c) $(\mathscr{R})\displaystyle\int_{-3}^5 \frac{1-x}{1+x}\,\mathrm{d}x$;

d) $\left|(\mathscr{R})\displaystyle\int_1^4 \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+\cos\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x\right|$;

e) $\left|(\mathscr{R})\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{3-\sin x^2}\,\mathrm{d}x\right|$;

f) $(\mathscr{R})\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$;

g) $(\mathscr{R})\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+x-x^2}}$;

h) $(\mathscr{R})\displaystyle\int_0^2 \frac{5-x}{9-x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. Dokážte, že platí:

a) $\left|(\mathscr{R})\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} x^2\sin^2(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{16\pi^3}{3}$;

b) $(\mathscr{R})\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{2-\sin^4 x}\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{4}\ln 2$;

c) $\dfrac{2\pi}{13} < (\mathscr{R})\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{10+3\cos x} < \frac{2\pi}{7}$.

3. Načrtnite graf funkcie

$$I(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+x}+\frac{1}{n+2x}+\cdots+\frac{1}{n(1+x)}\right), \quad x > -1.$$

4.* Nájdite polynóm P najmenšieho stupňa, ktorý má tri inflexné body: bod $[-1,-1]$, bod $[1,1]$ a bod $[0,?]$, v ktorom dotyčnica ku grafu funkcie P zviera s osou o_x uhol $\frac{\pi}{3}$.

5. Nájdite $f'(x)$ na zadanej množine M, ak

a) $f(x) = (\mathscr{R})\displaystyle\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, $M=\mathbb{R}$;

b) $f(x) = (\mathscr{R})\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$, $M=\mathbb{R}$;

c) $f(x) = (\mathscr{R})\displaystyle\int_1^7 \sqrt[3]{3+x^2}\,\mathrm{d}x$, $M=\langle 0,1\rangle$;

d) $f(x) = (\mathscr{R})\displaystyle\int_t^1 \frac{x}{1+s^2}\,\mathrm{d}s$, $M=(-5,+\infty)$;

e) $f(x) = (\mathscr{R})\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos t^2\,\mathrm{d}t$, $M=(0,+\infty)$;

f) $f(x) = (\mathscr{R})\displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t$, $M=\mathbb{R}$.

6. Určte lokálne extrémy funkcií:

a) $F(x) = (\mathscr{R})\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}(1-t^2)\,\mathrm{d}t$;

b) $F(y) = (\mathscr{R})\displaystyle\int_0^{y^2} \frac{x^2+5x+4}{2+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$;

c) $F(t) = (\mathscr{R})\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}^t} \frac{x^4-16}{1+x}\,\mathrm{d}x$;

d) $F(s) = (\mathscr{R})\displaystyle\int_0^s \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} + (\mathscr{R})\int_s^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$, $s\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

7. Uveďte príklad funkcie $f\in\mathscr{R}\langle a,b\rangle$, ktorá nemá primitívnu funkciu na $\langle a,b\rangle$. Ak funkcia f má primitívnu funkciu na $\langle a,b\rangle$, je potom Riemanovsky integrovateľná na $\langle a,b\rangle$?

8. Zostrojte funkciu $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, pre ktorú je funkcia $F(x) = (\mathscr{R}) \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ diferencovateľná na $\langle a, b\rangle$, ale pre nekonečne veľa bodov $x \in \langle a, b\rangle$ platí $F'(x) \neq f(x)$.

9. Vypočítajte limity:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\mathscr{R}) \int_0^x \operatorname{arctg}^2 t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^2}}$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(\mathscr{R}) \int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\,\mathrm{d}t}{(\mathscr{R}) \int_0^{\operatorname{tg} x} \sin t\,\mathrm{d}t}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\mathscr{R}) \int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} (\mathscr{R}) \int_1^x \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \mathrm{d}t$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\,(\mathscr{R}) \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$;

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} (\mathscr{R}) \int_0^x \frac{1}{\sqrt[5]{1+t^5}}\,\mathrm{d}t$;

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(\mathscr{R}) \int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{x^3}$;

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left((\mathscr{R}) \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

10.* Nech $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ je rastúca funkcia. Dokážte, že pre každé $x \in (a, b)$ je

$$\frac{1}{x-a} (\mathscr{R}) \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{b-a} (\mathscr{R}) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{b-x} (\mathscr{R}) \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

* – úlohy, za správne vyriešenie ktorých získa prvý riešiteľ po 1 bonusovom bode k priebežnému hodnoteniu