

## Séria úloh č. 6

1. Ak  $f \in \mathcal{C}^2(a, b)$ , tak

$$(\mathcal{R}) \int_a^b x f''(x) dx = (bf'(b) - f(b)) - (af'(a) - f(a)).$$

Dokážte!

2. Počítajme integrál  $(\mathcal{R}) \int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx$ . Integrand je zrejme spojitá funkcia na  $\langle 0, \pi \rangle$ , a teda Riemannovsky integrovateľná na  $\langle 0, \pi \rangle$ . Taktiež je Newtonovsky integrovateľná, a teda

$$(\mathcal{R}) \int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx = (\mathcal{N}) \int_0^\pi \sqrt{\cos^2 x} dx = (\mathcal{N}) \int_0^\pi \cos x dx = [\sin x]_0^\pi = 0.$$

Avšak integrand je kladná funkcia všade na  $\langle 0, \pi \rangle$  okrem bodu  $\frac{\pi}{2}$ , a teda podľa monotónnosti  $\mathcal{R}$ -integrálu by mal byť výsledok kladný. Kde je chyba?

3. Ľahko sa overí, že ak  $F(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ , tak  $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ . Zrejme, funkcia  $F'$  je záporná na celej reálnej osi, a teda  $(\mathcal{R}) \int_{-1}^1 -\frac{1}{1+x^2} dx < 0$ . Na druhej strane však máme

$$(\mathcal{R}) \int_{-1}^1 -\frac{1}{1+x^2} dx = (\mathcal{N}) \int_{-1}^1 -\frac{1}{1+x^2} dx = [F(x)]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Nájdite chybu!

4. Nájdite chybu vo výpočte:

$$(\mathcal{R}) \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = (\mathcal{N}) \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = - \left[ \frac{1}{x-1} \right]_0^2 = -2.$$

5. Vypočítajte (ak existujú) nevlastné  $\mathcal{R}$ -integrály:

a)\*  $(\mathcal{R}) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx;$

b)  $(\mathcal{R}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec x dx;$

c)  $(\mathcal{R}) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}};$

d)  $(\mathcal{R}) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}};$

e)  $(\mathcal{R}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5};$

f)  $(\mathcal{R}) \int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2-3)^3}} dx;$

g)  $(\mathcal{R}) \int_0^1 \frac{x^3 + \sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[5]{x^3}} dx;$

h)  $(\mathcal{R}) \int_0^1 \frac{dx}{1-x^3};$

i)  $(\mathcal{R}) \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx;$

j)  $(\mathcal{R}) \int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx.$

\* – úlohy, za správne vyriešenie ktorých získa prvý riešiteľ po 1 bonusovom bode k priebežnému hodnoteniu