Séria úloh č. 12

1. Nájdite obory konvergencie nasledujúcich mocninových radov:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} 10^n x^n$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n$; c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(x+1)x^{n+1}}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\ln^n(n+1)}$; e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$; f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+(-1)^n}{n(n-1)} x^n$;

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x-2)^n$; h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$; i) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$;

j) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$; k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n(n+1)(n+2)}$; l) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$;

m) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n \sin^2\frac{1}{n}$; n) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{a^{\sqrt{n}}}$, $a>0$; o) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin\frac{\pi}{2^n}\right)(x-2)^n$;

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{E}(\sqrt{n})}}{n} x^n$; q) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n$, $a>1$; r) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$.

2. Nech ρ_1 a ρ_2 sú polomery konvergencie mocninových radov $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Dokážte, že

(i) polomer konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)x^n$ je rovný $\min\{\rho_1,\rho_2\}$, ak $\rho_1 \neq \rho_2$;

(ii) polomer konvergencie ρ radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$ spĺňa $\rho \geq \rho_1 \cdot \rho_2$.

Čo sa dá povedať o polomere konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)x^n$, ak $\rho_1 = \rho_2$?

3. Dokážte, že pre súčty daných radov platí

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, x^{2n} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{2n} = -\frac{1}{2}\ln|1-(x-3)^2|$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$; d) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\, x^n = \frac{2}{(1-x)^3}$;

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{x^n} = \frac{x}{(x-1)^2}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n} = \ln\frac{2}{3-x}$;

g) $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+3n)\, x^n = \frac{4x-2x^2}{(1-x)^3}$; h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{4n}}{n}$.

4. *Besselova funkcia rádu nula* je definovaná predpisom

$$J_0(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Nájdite jej definičný obor.

5. Dokážte nasledujúce rovnosti:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2;$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n} = \ln \frac{3}{2};$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12n}{4^{3n}} = \frac{4^4}{3^3 \cdot 7^2};$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{5^n} = \frac{115}{128};$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 3;$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}(2n-1)} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}.$

6*. Nech $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Dokážte, že funkcia

$$F(x) = f(x) + f(1-x) + \ln x \cdot \ln(1-x)$$

je konštantná. Nájdite jej hodnotu.

7. Nájdite súčty číselných radov:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1};$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(3n+1)};$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!};$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n+1}.$

* – úloha, za správne vyriešenie ktorej získa prvý riešiteľ 1 bonusový bod k priebežnému hodnoteniu