ÚMV/MAN2c/10 – Zápočtová písomka č. 1

1. *Vypočítajte limitu* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{2}{n}\right)^{3/2}(n+i)\right]^2$.

Príklad je za 4 body. Upravíme funkciu vnútri limity do želaného tvaru, aby sme z nej vedeli vyčítať všetky potrebné informácie pre prevod na Riemannov integrál:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{2}{n}\right)^{3/2}(n+i)\right]^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2\sqrt{2}}{n\sqrt{n}}(n+i)\right]^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[2\sqrt{2}\,\frac{n+i}{n}\right]^2 =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[2\sqrt{2}\left(1+\frac{i}{n}\right)\right]^2 = 8\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^2.$$

Z tejto úpravy potom vidieť, že $f(x)=(1+x)^2$, uvažujeme postupnosť ekvidištantných delení $D_n=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,1\}$, pričom $a=x_0=0$, $b=x_n=1$ a reprezentantmi sú pravé krajné body čiastkových intervalov, teda berieme hodnoty $f(x_i)$. Potom vieme dokončiť príklad zapísaním limity sumy ako limity integrálneho súčtu a previezť na Riemannov integrál:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{2}{n}\right)^{3/2}(n+i)\right]^2 = 8\lim_{n\to\infty}\mathscr{S}(f,D_n,\Xi_n) = 8(\mathscr{R})\int_0^1(1+x)^2\mathrm{d}x =$$
$$= 8\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8}{3}(2^3-1) = \frac{56}{3}.$$

2. *Vypočítajte integrál* $(\mathscr{R})\int_0^{\pi} x^3\sin x\,\mathrm{d}x$.

Príklad je za 4 body. Integrál zrejme existuje, pretože integrand je spojitá funkcia na uzavretom intervale, a teda má tam aj primitívnu funkciu, čiže môžem na jeho výpočet použiť metódu per partes (3x) pre Newtonov integrál (a oba integrály sa rovnajú):

$$(\mathscr{R})\int_0^{\pi} x^3\sin x\,\mathrm{d}x = [-x^3\cos x - 3x^2\sin x + 6x\cos x]_0^{\pi} - 6(\mathscr{R})\int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x$$
$$= [-x^3\cos x - 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x]_0^{\pi}$$
$$= \pi^3 - 6\pi.$$

3. *Vypočítajte (ak existuje) limitu* $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\mathscr{R})\int_0^{\sin x}\operatorname{tg} t\,\mathrm{d}t}{(\mathscr{R})\int_0^{\operatorname{tg} x}\sin t\,\mathrm{d}t}$.

Príklad je za 4 body. Keďže oba integrandy sú spojité funkcie na pravom okolí bodu 0 (napr. na intervale $(0,\pi/4)$), podľa Fundamentálnej vety integrálneho kalkulu sú funkcie $F(x)=(\mathscr{R})\int_0^{\sin x}\operatorname{tg} t\,\mathrm{d}t$ a $G(x)=(\mathscr{R})\int_0^{\operatorname{tg} x}\sin t\,\mathrm{d}t$ diferencovateľné na pravom okolí bodu 0, pričom platí $F'(x)=\operatorname{tg}(\sin x)\cdot\cos x$ a $G'(x)=\sin(\operatorname{tg} x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$. Naviac $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}G(x)=0$, a preto môžeme použiť L'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\sin x)\cdot\cos^3 x}{\sin(\operatorname{tg} x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\operatorname{tg} x}{\sin(\operatorname{tg} x)}\cdot\cos^4 x = 1.$$

4. *Dokážte nerovnosť* $1 \leq (\mathscr{R}) \int_0^2 \frac{5-x}{9-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \frac{6}{5}$.

Príklad je za 4 body. Vyšetríme priebeh integrandu $f(x) = \frac{5-x}{9-x^2}$, ktorý je spojitou funkciou na uzavretom intervale (a teda má podľa Weierstrassa maximum a minimum). Keďže

$$(\forall x \in \langle 0,2\rangle)\ f'(x) = \frac{-9+x^2-(5-x)(-2x)}{(9-x^2)^2} = \frac{-x^2+10x-9}{(9-x^2)^2},$$

tak stacionárnymi bodmi sú riešenia rovnice $0 = -x^2+10x-9 = (x-9)(x-1)$, teda len $x_0 = 1 \in \langle 0,2\rangle$. Ale $f'(x) < 0$ pre $x \in (0,1)$ a $f'(x) > 0$ pre $x \in (1,2)$, preto má f ostré lokálne minimum v bode x_0 s hodnotou $m = f(1) = 1/2$. Maximum zistíme z funkčných hodnôt $f(0) = 5/9$ a $f(2) = 3/5$, teda $M = f(2) = 3/5$. Potom pre triviálne delenie intervalu $\langle 0,2\rangle$ máme

$$m(2-0) = 1 \leq (\mathscr{R}) \int_0^2 \frac{5-x}{9-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \frac{6}{5} = M(2-0),$$

čo bolo treba dokázať.

5. *Vyšetrite konvergenciu integrálu* $(\mathscr{R}) \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3}$.

Príklad je za 4 body. Zrejme $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$, teda $g(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$ má dva kritické body $x_0 = 1$ a $x_1 = 3$, z ktorých len $x_0 \in \langle 0,2\rangle$. Keďže

$$g(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = \frac{1}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x-1)},$$

tak

$$\begin{aligned}(\mathscr{R}) \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3} &= \frac{1}{2}(\mathscr{R}) \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x-3} - \frac{1}{2}(\mathscr{R}) \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x-1} \\ &= \frac{1}{2}(\mathscr{R}) \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x-3} - \frac{1}{2}\left((\mathscr{R}) \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + (\mathscr{R}) \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x-1}\right).\end{aligned}$$

Ale

$$(\mathscr{R}) \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \lim_{\alpha\to 1^-} (\mathscr{R}) \int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \lim_{\alpha\to 1^-} \left[\ln|x-1|\right]_0^\alpha = \lim_{\alpha\to 1^-} \ln|\alpha-1| = -\infty,$$

preto nevlastný integrál $(\mathscr{R}) \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3}$ diverguje.