ÚMV/MAN2c/10 – Zápočtová písomka č. 2

1. *Vypočítajte dĺžku krivky danej rovnicou* $y = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$ pre $x \in \langle \frac{5}{4}, \frac{5}{3} \rangle$.

Príklad je za 5b. K dosadeniu do príslušného vzorca potrebujeme y', a teda

$$\left(\forall x \in \left\langle \frac{5}{4}, \frac{5}{3} \right\rangle\right) \quad y'(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}} \left(1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Potom dĺžka krivky danej rovnicou $y = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$ na intervale $\langle \frac{5}{4}, \frac{5}{3} \rangle$ je rovná

$$(\mathscr{R}) \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, \mathrm{d}x = (\mathscr{R}) \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2-1}}\, \mathrm{d}x = (\mathscr{R}) \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, \mathrm{d}x.$$

Keďže ide o spojité funkcie, máme vlastne Newtonove integrály, a teda použijeme substitúciu $x^2 - 1 = t$, z čoho máme $2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ (pozor na zmenu hraníc!). Potom

$$(\mathscr{R}) \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} (\mathscr{R}) \int_{\frac{9}{16}}^{\frac{16}{9}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = [\sqrt{t}]_{\frac{9}{16}}^{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12}.$$

2. *Vyšetrite absolútnu/relatívnu konvergenciu číselného radu* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(\sqrt{n^2 + n\sqrt{n}} - n\right)}$.

Príklad je za 5b. Najprv určíme asymptotické správanie sa člena radu úpravou

$$a_n = \frac{1}{n\left(\sqrt{n^2+n\sqrt{n}} - n\right)} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n\sqrt{n}} + n}{\left(\sqrt{n^2+n\sqrt{n}} + n\right)} = \frac{\sqrt{n^2+n\sqrt{n}} + n}{n^2\sqrt{n}} \approx \frac{n}{n^{5/2}} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Odtiaľ vidno, že ide o rad s nezápornými členmi, ktorý sa asymptoticky správa ako Riemannov konvergentný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ s $b_n = \frac{1}{n^{3/2}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}$, a preto použijeme limitné porovnávacie kritérium:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n\sqrt{n}} + n}{n^2\sqrt{n}} \cdot n\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n\sqrt{n}} + n}{n} = 2.$$

Keďže $L < +\infty$ a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, konverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ s prívlastkom absolútne.

3. *Vyšetrite absolútnu/relatívnu konvergenciu číselného radu* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Príklad je za 5b. Najprv vyšetríme absolútnu konvergenciu, teda rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, na ktorý použijeme integrálne kritérium. Funkcia $f(x) = \ln(1 + 1/x)$ je nezáporná a klesajúca na intervale $\langle 1, +\infty)$, a preto o konvergencii/divergencii radu rozhoduje nevlastný Riemannov integrál

$$I = \int_1^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to\infty} \int_1^{\alpha} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x.$$

Použitím prevodu na Newtonov integrál a metódu per partes s $u = \ln(1 + 1/x)$ a $v' = 1$ dostávame

$$I = \lim_{\alpha\to\infty} \left(\left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]_1^{\alpha} + \int_1^{\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{x+1} \right) = \lim_{\alpha\to\infty} \left(\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + \ln(\alpha+1) - 2\ln 2 \right).$$

Kým limita druhého sčítanca je zrejme nevlastná, pri prvom sčítanci hneď výsledok nevidíme, a preto použiteme L'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha \ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\alpha}} = 1.$$

Sumárne teda máme, že nevlastný Riemannov integrál I diverguje, a preto diverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Na vyšetrenie relatívnej konvergencie použijeme Leibnizovo kritérium. Už vieme, že postupnosť $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, je klesajúca a jej limita je rovná 0, lebo

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln 1 = 0.$$

Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ strieda znamienka, a preto podľa Leibnizovho kritéria tento rad konverguje relatívne.

4. *Pre ktoré $x \in \mathbb{R}$ je daný rad absolútne konvergentný, relatívne konvergentný a divergentný, kde* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3\cdot 2^n} x^n$?

Príklad je za 5b. K úlohe sa dá pristúpiť dvoma spôsobmi: buď si všimneme, že ide o mocninový rad so stredom v bode 0 a použijeme výpočet polomeru konvergencie, alebo sa pustíme do riešenia cez nekonečný číselný rad s parametrom x. Ukážeme iba prvý spôsob.

Polomer konvergencie určíme z Cauchyho-Hadamardovej vety, teda

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3\cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{n^3\cdot 2^n}{n^2+1} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} \cdot \frac{n^3}{(n+1)^3} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Potom $\rho = 1/\ell = 2$ je polomer konvergencie, a preto nám stačí vyšetriť konvergenciu dvoch radov:

I: Rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3\cdot 2^n}\cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$, ktorý je divergentný, pretože sa asymptoticky správa ako harmonický rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

II. Rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3\cdot 2^n}(-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3}$, ktorý je relatívne konvergentný, lebo rad absolútnych hodnôt sme vyšetrili v I., ale keďže strieda znamienka a $z_n = \frac{n^2+1}{n^3}$, $n \in \mathbb{N}$, ide klesajúco k nule, podľa Leibnizovho kritéria tento rad konverguje.

Záver: rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3\cdot 2^n} x^n$ konverguje absolútne pre $x \in (-2, 2)$, konverguje relatívne pre $x = -2$ a diverguje pre $x \in (-\infty, -2) \cup \langle 2, +\infty)$.