



Matematická analýza I
pre informatikov a fyzikov

Jaroslav Šupina

Úvod

20.9.2018

Ústav matematických vied

Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach

- Prezentácie k prednáškam sú hlavne osnova! Úplne dôkazy a komentár počas prednášok alebo v literatúre, ako napríklad:



B. Mihalíková, J. Ohriska, Matematická analýza 1, vysokoškolský učebný text, UPJŠ v Košiciach, Košice, 2012.

<http://www.upjs.sk/public/media/5596/Matematicka-analyza-I.pdf>



L. Kluvánek, I. Mišík, M. Švec, Matematika I, SVTL, Bratislava, 1959.

- Poznámky sa dajú robiť podľa čísla - kódu strany.
- Prednášky sú nepovinné.
- Domáce úlohy a testy. Bodovanie nerovnomerné!
- Možnosť získať 10 bodov.
- <http://umv.science.upjs.sk/analyza/texty/vyucba.html>

T1S2 Matematický softvér

`http://www.wolframalpha.com`

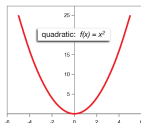
T1S3 Čo je to matematika?

Wikipédia:

Matematika (z gr.mathematikós= „milujúci poznanie“, máthema = „veda, poznanie“) je väčšinou definovaná ako štúdium zákonitostí štruktúry, zmeny a priestoru. Neformálne ju môžeme tiež nazvať štúdiom „diagramov a čísel“. Z formálneho hľadiska je matematika skúmanie axiomaticky definovaných formálnych štruktúr použitím logiky a matematického označenia. Matematiku možno chápať jednoducho ako rozšírenie hovoreného a písaného jazyka s veľmi presne definovanou slovnou zásobou a gramatikou, s cieľom opisovať a skúmať fyzikálne a konceptuálne vzťahy.

T1S4 Kvadratický trojčlen

$$ax^2 + bx + c \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$



$$2x^2 + 3x + 6, x^2 + 6, x - 6, x^2 - 6, x^2 - 6x, x^2 - 4x + 4, x^2 - x - 2$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$\textcircled{1} D > 0 \quad ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

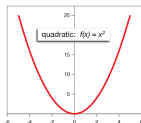
$$\textcircled{2} D = 0 \quad ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\textcircled{3} D < 0$$

$$(x - p)(x - q) = x^2 - (p + q)x + pq$$

T1S5 Kvadratická rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

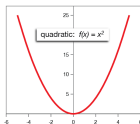


- ① $D > 0$ $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$
- ② $D = 0$ $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$
- ③ $D < 0$ $ax^2 + bx + c \neq 0$

T1S6 Kvadratická nerovnica

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$(< 0), (\leq 0), (\geq 0)$



① $D > 0$ $p = \min A, q = \max A, A = \left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$

① $a > 0$ $ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, p) \cup (q, \infty)$

② $a < 0$ $ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow x \in (p, q)$

② $D = 0$

① $a > 0$ $ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$

② $a < 0$ $ax^2 + bx + c \not> 0$

③ $D < 0$

① $a > 0$ $ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

② $a < 0$ $ax^2 + bx + c \not> 0$

T1S7 Zdroje o kvadratických rovniciach a nerovniciach na webe

- http://files.gymklcovenmv-klierova.webnode.sk/200000042-e328de422d/kvadraticke_fcie_rce_nce_text.pdf
- <http://www.matematika.cz/kvadraticke-rovnice>
- <http://www.matematika.cz/diskriminant>
- <http://www.matematika.cz/kvadraticke-nerovnice>

Príklad 1

Z trojmetrovej výšky nad zemou je vyhodená lopta priamo hore rýchlosťou 14 m/s. Kedy sa dotkne zeme?

dráha voľného pádu: $-\frac{1}{2}at^2$

t je čas, $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ (tiažové zrýchlenie)

zaokrúhlená dráha voľného pádu: $-5t^2$



T1S9 Problém 2

Príklad 2

Navrhli sme nový typ športového bicykla, ktorý chceme vyrábať a predávať. Príprava výroby, reklama a zvyšné počiatkové náklady sú 700 000 eur. Následne výroba jedného kusu stojí 110 eur. Akú cenu zvoliť, aby sme získali čo najväčší zisk?

odhad počtu predaných kusov je $70000 - 200C$

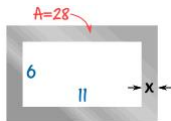
C je cena jedného kusu



T1S10 Problém 3

Príklad 3

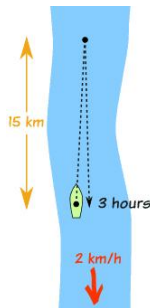
Naša spoločnosť plánuje začať výrobu nových oceľových rámov. Tie bude vystrihávať z oceľových platní. Ich plocha má byť 28 cm^2 a rozmery vnútornej plochy 11 cm a 6 cm . Aká bude hrúbka oceľového rámu?



T1S11 Problém 4

Príklad 4

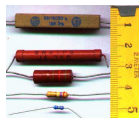
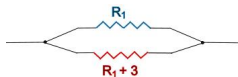
Lod sa plaví po rieke 3 hodiny. Ide 15 km proti prúdu a potom sa vráti. Rieka tečie rýchlosťou 2 km/h. Aká je rýchlosť lode a koľko trvajú jednotlivé úseky plavby?



Príklad 5

Dva rezistory sú zapojené paralelne. Celkový odpor je 2 ohmy a jeden z nich má odpor o 3 ohmy viac ako druhý. Aké sú odpory jednotlivých rezistorov.

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



T1S13 Matematický model

① $-5x^2 + 14x + 3 = 0$

② $-200x^2 + 92000x - 8400000$

③ $4x^2 + 34x - 28 = 0$

④ $3x^2 - 30x - 12 = 0$

⑤ $x^2 - x - 6 = 0$

T1S14 Riešenie

① $-5x^2 + 14x + 3 = 0$

riešenie rovnice: $x = -\frac{1}{5} \vee x = 3$

② $-200x^2 + 92000x - 8400000$

priesečníky paraboly s osou x :

$$x = -10(\sqrt{109} - 23) \vee x = 10(23 + \sqrt{109})$$

x -ová súradnica vrcholu paraboly: $x = 230$

③ $4x^2 + 34x - 28 = 0$

riešenie rovnice: $x = -\frac{17}{4} - \frac{\sqrt{401}}{4} \vee x = -\frac{17}{4} + \frac{\sqrt{401}}{4}$

④ $3x^2 - 30x - 12 = 0$

riešenie rovnice: $x = 5 - \sqrt{29} \vee x = -\frac{17}{4} + \frac{\sqrt{401}}{4}$

⑤ $x^2 - x - 6 = 0$

riešenie rovnice: $x = -2 \vee x = 3$

T1S15 Interpretácia výsledkov

① $-5x^2 + 14x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x = -\frac{1}{5} \vee x = 3)$

Lopta sa dotkne zeme po troch sekundách. Po 1,4 sekundy dosiahne najvyššiu výšku 12 metrov a 80 centimetrov.

② $-200x^2 + 92000x - 8400000$ vrchol paraboly: $x = 230$

Bicykle je výhodné predávať za cenu 230 eur. Zisk by bol 2 180 000 eur.

③ $4x^2 + 34x - 28 = 0 \Leftrightarrow (x \approx -9,26 \vee x \approx 0,76)$

Rám by mal mať hrúbku približne 8 milimetrov.

④ $3x^2 - 30x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x \approx -0,39 \vee x \approx 10,39)$

Rýchlosť lode je približne 10,39 km/h. Cesta proti prúdu trvá približne 1 hodinu a 47 minút, späť 1 hodinu a 13 minút.

⑤ $x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x = -2 \vee x = 3)$

Rezistory majú odpor 3 ohmy a 6 ohmov.

- ① Reálna situácia
- ② Matematický model
- ③ Riešenie
- ④ Interpretácia výsledku pre reálnu situáciu

! Matematika !

+ rozvoj prostriedkov, znalostí, metód riešenia

Príklad 6

Pekár zašpinil údaj o množstve múky potrebnej na upečenie jednej dávky moravských koláčov. Pamätá si však, že pri poslednom pečení urobili tri dávky koláčov, ale pridali tam navyše 2 kg múky. Spolu vtedy minuli 11 kg. Aké číslo zmazal pekár?

Príklad 7

Taxík, ktorý som si privolal, účtuje 2 eurá za štartovný poplatok a za každý načatý kilometer 3 eurá. Mám iba 11 eur. Koľko kilometrov sa môžem odvieť?

Príklad 8

Zrno je vysoké 2 cm a každý týždeň vyrastie o 3 cm. Ak dosiahne výšku aspoň 11 cm, je ho potrebné postrikať. Kedy to bude?

Príklad 9

Mám v peňaženke 11 eur. Potrebujem kúpiť čokoládu v cene 2 eur a za zvyšné peniaze balíky minerálnej vody. Jeden balík stojí 3 eurá. Koľko balíkov si dokážem kúpiť?

Príklad 10

Začal som však púšťať vodu do bazéna hĺbky 1 m a 10 cm. Už dosiahla výšku 20 cm. Každú hodinu sa pripustí 30 cm. Kedy bude plný?

Príklad 11

Na chate mám nádrž s 11 m^3 odkvapovej vody. Každý deň snežilo, ale sneh sa skoro hneď rozpustil. Pred snežením v nej boli 2 m^3 vody. Skúsenosti hovoria, že z 1 dm snehu mám 3 m^3 vody. Aká by bola hrúbka snehu, keby sa nerozpustil?

Príklad 6

Príklad 7

Príklad 8

Príklad 9

Príklad 10

Príklad 11

$$3x + 2 = 11$$

T1S19 Čo je to matematická analýza?

Wikipédia:

Matematická analýza je časť matematiky, v ktorej základnými pojmami sú: pojem limity, pojem funkcie, pojem derivácie a pojem integrálu. Základnými časťami matematickej analýzy sú diferenciálny počet a integrálny počet, teória funkcií reálnej a komplexnej premennej, teória diferenciálnych rovníc a i. Poskytuje prostriedky na kvantitatívne skúmanie zmien, závislostí veličín od iných veličín a podobne; zaoberá sa funkciami a rovnicami, ktorých riešením sú funkcie.

Zdroje

<https://www.mathsisfun.com/algebra/quadratic-equation-real-world.html>