Jaroslav Šupina

Rovnice a nerovnice

20.9.2018

Ústav matematických vied

Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach

základná časť

T2S1 Zobrazenie - funkcia

Nech sú dané dve neprázdne množiny X, Y.

Ak ku každému prvku $x \in X$ je určitým spôsobom priradený práve jeden prvok $y \in Y$ hovoríme, že na množine X je definované **zobrazenie** f z množiny X do množiny Y, čo zapisujeme $f : y = f(x)$, $x \in X$.

$f : X \to Y$ (f označuje zobrazenie z množiny X do množiny Y)

Ak $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, tak zobrazenie f nazývame **reálnou funkciou reálnej premennej**. Stručne budeme hovoriť len funkcia.

Množinu X nazývame **definičným oborom zobrazenia (funkcie)** f a označujeme ho $\mathcal{D}(f)$. Prvky množiny X nazývame argumentami, vzormi alebo nezávislými premennými.

T2S2 Monotónne funkcie

Funkciu f nazývame **neklesajúcou (nerastúcou)** na množine $A \subseteq \mathcal{D}(f)$, ak pre ľubovoľné dva body $x_1, x_2 \in A$ také, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$.

Funkciu f nazývame **rastúcou (klesajúcou)** na množine $A \subseteq \mathcal{D}(f)$, ak pre ľubovoľné dva body $x_1, x_2 \in A$ také, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Funkciu f nazývame **rýdzomonotónnou** na množine $A \subseteq \mathcal{D}(f)$, ak je rastúcou alebo klesajúcou na A.

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2))$$

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2))$$

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2))$$

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2))$$

T2S3 Monotónne a prosté funkcie

Funkciu f nazývame **prostou** na množine $A \subseteq \mathcal{D}(f)$, ak pre ľubovoľné dva body $x_1, x_2 \in A$ také, že $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

Veta 1

Nech funkcia f je rýdzomonotónna na množine $A \subseteq \mathcal{D}(f)$. Potom je f prostá na množine A.

T2S4 Elementárne funkcie

a) Konštantná funkcia $f : y = c$

b), g), h), l) Mocninná (mocninová) funkcia $f : y = x^{\alpha}$

c), f) Goniometrické funkcie $f : y = \sin x$, $f : y = \cos x$, $f : y = \mathrm{tg}\ x$, $f : y = \mathrm{cotg}\ x$

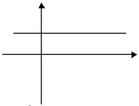
d) Polynomická funkcia (polynóm) $f : y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

e) Racionálna funkcia $f : y = \frac{P(x)}{S(x)}$

i), j) Exponenciálna funkcia $f : y = a^x$

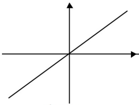
k) Logaritmická funkcia $f : y = \log_a x$

T2S5 Grafy



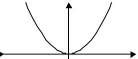
$f: y = \mathrm{a}$

$D(f) = R, H(f) = \{a\}$



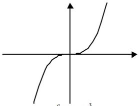
$f: y = x$

$D(f) = R, H(f) = R$



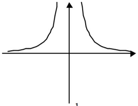
$f: y = x^2$

$D(f) = R, H(f) = \langle 0; \infty)$



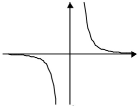
$f: y = x^3$

$D(f) = H(f) = R$



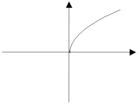
$f: y = \frac{1}{x^2}$

$D(f) = R - \{0\}, H(f) = (0; \infty)$



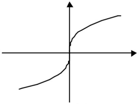
$f: y = \frac{1}{x}$

$D(f) = H(f) = R - \{0\},$



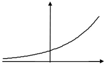
$f: y = \sqrt{x}$

$D(f) = H(f) = \langle 0; \infty)$



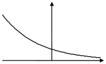
$f: y = \sqrt[3]{x}$

$D(f) = H(f) = R$



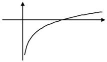
$f: y = a^x, a > 1$

$D(f) = R,\ H(f) = (0; \infty)$



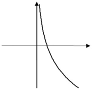
$f: y = a^x, 0 < a < 1$

$D(f) = R,\ H(f) = (0; \infty)$



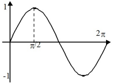
$f: y = \log_a x, a > 1$

$D(f) = (0; \infty), H(f) = R$



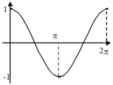
$f: y = \log_a x, 0 < a < 1$

$D(f) = (0; \infty), H(f) = R$



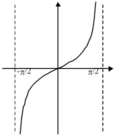
$f: y = \sin x$

$D(f) = R, H(f) = \langle -1; 1 \rangle$



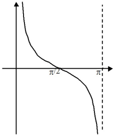
$f: y = \cos x$

$D(f) = R, H(f) = \langle -1; 1 \rangle$



$f: y = \mathrm{tg} x, H(f) = R$

$D(f) = \left\{x \in R, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$



$f: y = \mathrm{cotg} x$

$D(f) = \{x \in R, x \neq k\pi, k \in Z\}$

T2S6 Elementárne funkcie - vlastnosti

funkcia	$\mathcal{D}(f)$	$\mathcal{H}(f)$
$f : y = c$	$\mathbb{R}$	$\{c\}$
$f : y = x^n,\ n \in \mathbb{N},\ 2/n$	$\mathbb{R}$	$\langle 0, \infty)$
$f : y = x^n,\ n \in \mathbb{N},\ \neg 2/n$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f : y = x^n,\ -n \in \mathbb{N},\ 2/n$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(0, \infty)$
$f : y = x^n,\ -n \in \mathbb{N},\ \neg 2/n$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f : y = \sin x$	$\mathbb{R}$	$\langle -1, 1 \rangle$
$f : y = \cos x$	$\mathbb{R}$	$\langle -1, 1 \rangle$
$f : y = \operatorname{tg}\ x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R}$
$f : y = \operatorname{cotg}\ x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$f : y = a^x$	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
$f : y = \log_a x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$f : y = \arcsin x$	$\langle -1, 1 \rangle$	$\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$
$f : y = \arccos x$	$\langle -1, 1 \rangle$	$\langle 0, \pi \rangle$
$f : y = \operatorname{arctg}\ x$	$\mathbb{R}$	$\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$
$f : y = \operatorname{arccotg}\ x$	$\mathbb{R}$	$\langle 0, \pi \rangle$

T2S7 Elementárne funkcie - vlastnosti

funkcia	rastúca	klesajúca
$f : y = c$	-	-
$f : y = x^n,\ n \in \mathbb{N},\ 2/n$	$\langle 0, \infty)$	$(-\infty, 0\rangle$
$f : y = x^n,\ n \in \mathbb{N},\ \neg 2/n$	$\mathbb{R}$	-
$f : y = x^n,\ -n \in \mathbb{N},\ 2/n$	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f : y = x^n,\ -n \in \mathbb{N},\ \neg 2/n$	-	$(-\infty, 0),\ (0, \infty)$
$f : y = \sin x$	$\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle,\ k \in \mathbb{Z}$	$\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\rangle,\ k \in \mathbb{Z}$
$f : y = \cos x$	$\langle -\pi + 2k\pi, 2k\pi\rangle,\ k \in \mathbb{Z}$	$\langle 2k\pi, (2k+1)\pi\rangle,\ k \in \mathbb{Z}$
$f : y = \mathrm{tg}\ x$	$(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$	-
$f : y = \mathrm{cotg}\ x$	-	$(k\pi, (k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}$
$f : y = a^x$	$\mathbb{R},\ a > 1$	$\mathbb{R},\ 0 < a < 1$
$f : y = \log_a x$	$(0, \infty),\ a > 1$	$(0, \infty),\ 0 < a < 1$
$f : y = \arcsin x$	$\langle -1, 1\rangle$	-
$f : y = \arccos x$	-	$\langle -1, 1\rangle$
$f : y = \mathrm{arctg}\ x$	$\mathbb{R}$	-
$f : y = \mathrm{arccotg}\ x$	-	$\mathbb{R}$

T2S8 Absolútna hodnota

Definícia 1

Absolútnou hodnotou čísla $x \in \mathbb{R}$ *nazývame maximum z čísel* $x, -x$.

Označenie

$|x|$, t.j. $|x| = \max\{x, -x\}$

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Geometrická interpretácia

- $|x|$ sa rozumie ako vzdialenosť obrazu čísla x od obrazu čísla 0 na reálnej osi
- pod $|x - y|$ pre $x, y \in \mathbb{R}$ sa rozumie vzdialenosť obrazov čísel x a y na reálnej osi

$$x \underset{\delta}{\approx} x_0 \Leftrightarrow |x - x_0| < \delta$$

T2S9 Vlastnosti absolútnej hodnoty, $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

a) $|a| = |-a|$

b) $|a| \geq 0$

c) $-|a| \leq a \leq |a|$

d) $|ab| = |a||b|$

e) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

f) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

g) $|a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a < \varepsilon$

h) $|a+b| \leq |a| + |b|$
(trojuholníková nerovnosť)

Veta 2

Nech $x, x_0 \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom

1. $|x - x_0| < \varepsilon$ *práve vtedy, keď* $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, *práve vtedy, keď* $x \underset{\varepsilon}{\approx} x_0$,
2. $|x - x_0| \leq \varepsilon$ *práve vtedy, keď* $x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$,
3. $|x - x_0| > \varepsilon$ *práve vtedy, keď* $x < x_0 - \varepsilon$ *alebo* $x_0 + \varepsilon < x$,
4. $|x - x_0| \geq \varepsilon$ *práve vtedy, keď* $x \leq x_0 - \varepsilon$ *alebo* $x_0 + \varepsilon \leq x$.

T2S10 Znamienko čísla

Definícia 2

Signum čísla $x \in \mathbb{R}$ *nazývame číslo* $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}.$

Vlastnosti $a, b \in \mathbb{R}$

a) $a = |a| \cdot \operatorname{sgn} a$

b) $|a| = a \cdot \operatorname{sgn} a$

c) $\operatorname{sgn}(ab) = \operatorname{sgn} a \cdot \operatorname{sgn} b$

d) $\operatorname{sgn}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\operatorname{sgn} a}{\operatorname{sgn} b},\ b \neq 0$

T2S11 Čo je to mocnina?

$\boxed{\text{Čo si mám predstaviť pod označením } \pi^{\sqrt{2}}\text{?}}$

pomocná časť

Mocnina s prirodzeným exponentom

Nech $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Číslo x^n dané predpisom

1. $x^1 = x$,
2. $x^n = x \cdot x^{n-1}$ pre $n > 1$,

nazývame n-tou mocninou čísla x.

Mocnina s celočíselným exponentom

Nech $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom

1. $x^0 = 1$,
2. $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

$?0^0 = 1?$

Odmocnina

Nech $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ ($x \geq 0$ pre n párne). Číslo y ($y \geq 0$ pre n párne) také, že $y^n = x$ nazývame n-tou odmocninou čísla x. Toto y potom označujeme $\sqrt[n]{x}$ alebo $x^{\frac{1}{n}}$.

existencia a jednoznačnosť

Mocnina s racionálnym exponentom

Nech $x \in \mathbb{R}, x > 0$ a $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$. Potom mocninu $x^{\frac{p}{q}}$ definujeme ako číslo $\sqrt[q]{x^p}$.

Mocnina s reálnym exponentom

Nech $x, \alpha \in \mathbb{R}$. Mocninou x^α rozumieme číslo

1. $\sup\{x^r;\ r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \alpha\}$, ak $x > 1$, $\alpha > 0$,
2. $\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}$, ak $0 < x < 1$, $\alpha > 0$,
3. 1, ak $x = 1$,
4. $\frac{1}{x^{-\alpha}}$, ak $x > 0$, $\alpha < 0$,
5. 0, ak $x = 0$, $\alpha > 0$.

T2S15 Vlastnosti mocnín, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

a) $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$

b) $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$

c) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\cdot\beta}$

d) $(ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$

e) $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$

T2S16 Vlastnosti mocnín, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Veta 3

Nech $\alpha < \beta$.

1. *Ak $a > 1$, tak $a^\alpha < a^\beta$.*
2. *Ak $0 < a < 1$, tak $a^\alpha > a^\beta$.*

Veta 4

Nech $0 < a < b$.

1. *Ak $\alpha > 0$, tak $a^\alpha < b^\alpha$.*
2. *Ak $\alpha < 0$, tak $a^\alpha > b^\alpha$.*

Veta 5

1. $\big((a > 1 \wedge \alpha > 0) \vee (0 < a < 1 \wedge \alpha < 0)\big) \Rightarrow a^\alpha > 1$
2. $\big((a > 1 \wedge \alpha < 0) \vee (0 < a < 1 \wedge \alpha > 0)\big) \Rightarrow a^\alpha < 1$

T2S17 Riešenie rovníc

1. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x = y \equiv x + z = y + z)$
2. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x = y \equiv x - z = y - z)$
3. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x = y \rightarrow x \cdot z = y \cdot z)$
4. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}, z \neq 0)(x = y \equiv x \cdot z = y \cdot z)$
5. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}, z \neq 0)(x = y \equiv \frac{x}{z} = \frac{y}{z})$
6. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x = y \rightarrow x^2 = y^2)$
7. $(\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0)(x = y \equiv x^2 = y^2)$
8. $(\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \leq 0)(x = y \equiv x^2 = y^2)$
9. $(\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0)(x = y \equiv \sqrt{x} = \sqrt{y})$

T2S18 Riešenie nerovníc

1. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x < y \equiv x + z < y + z)$
2. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x < y \equiv x - z < y - z)$
3. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}, z > 0)(x < y \equiv x \cdot z < y \cdot z)$
4. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}, z < 0)(x < y \equiv x \cdot z > y \cdot z)$
5. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}, z > 0)(x < y \equiv \frac{x}{z} < \frac{y}{z})$
6. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}, z < 0)(x < y \equiv \frac{x}{z} > \frac{y}{z})$
7. $(\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0)(x < y \equiv x^2 < y^2)$
8. $(\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \leq 0)(x < y \equiv x^2 > y^2)$
9. $(\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0)(x < y \equiv \sqrt{x} < \sqrt{y})$

Podobne pre $\leq$, $>$, $\geq$.

T2S19 Logaritmus

Definícia 3

Nech $a, x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, x > 0$. *Reálne číslo* y *také, že* $a^y = x$ *nazývame logaritmus čísla* x *pri základe* a. *Značíme* $y = \log_a x$.

existencia a jednoznačnosť

$\log_a 1 = 0$

$\log_a a = 1$

T2S20 Vlastnosti logaritmu, $\alpha \in \mathbb{R}$, $a, b, x, y > 0$, $a \neq 1, b \neq 1$

a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

b) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

c) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$

d) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

e) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Veta 6

Nech $x < y$.

1. *Ak* $a > 1$, *tak* $\log_a x < \log_a y$.
2. *Ak* $0 < a < 1$, *tak* $\log_a x > \log_a y$.

doplňujúca časť

T2S21 Vlastnosti absolútnej hodnoty, $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

Veta 7

Nech $x, y \in \mathbb{R}$. *Potom* $|x| - |y| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$.

Veta 8

Nech $x, y \in \mathbb{R}$. *Potom* $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y|$.

Veta 9

Nech $n \in \mathbb{N}$ *a* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. *Potom* $|a_1 \cdot a_2 \cdot \ \ldots \ \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \ \ldots \ \cdot |a_n|$ *a* $|a_1 + a_2 + \ \ldots \ + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ \ldots \ + |a_n|$.

$$\left|\prod_{i=1}^{n} a_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |a_i| \qquad\qquad \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

T2S22 Vzťahy

- $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}) \quad \mathrm{e}^{x_1} \cdot \mathrm{e}^{x_2} = \mathrm{e}^{x_1 + x_2}$
- $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \mathrm{e}^{x} \cdot \mathrm{e}^{-x} = 1$
- $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \mathrm{e}^{x} > 0$
- $(\forall x \in \langle 0, \infty)) \quad \mathrm{e}^{x} \geq 1 + x$
- $(\forall x \in \langle 0, 1)) \quad \mathrm{e}^{x} \leq \frac{1}{1-x}$
- $(\forall x \in (-1, 1)) \quad 1 + x \leq \mathrm{e}^{x} \leq \frac{1}{1-x}$

- $(\forall x \in (0, \infty)) \; \mathrm{e}^{\ln x} = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R}) \; \ln \mathrm{e}^{x} = x$
- $(\forall x_1, x_2 \in (0, \infty)) \; \ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$
- $(\forall x_1, x_2 \in (0, \infty)) \; \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2$
- $(\forall x_1 \in (0, \infty)) \; (\forall r \in \mathbb{R}) \; \ln x_1^r = r \ln x_1$

T2S23 Vzťahy

- $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\ (\forall a \in (0, \infty))\quad a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$
- $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\ (\forall a \in (0, \infty))\ \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$
- $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\ (\forall a \in (0, \infty))\ (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall a, b \in (0, \infty))\ a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x.$

- $(\forall x \in (0, \infty))\ a^{\log_a x} = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\ \log_a a^x = x$
- $(\forall x_1, x_2 \in (0, \infty))\ \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
- $(\forall x_1, x_2 \in (0, \infty))\ \log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$
- $(\forall x \in (0, \infty)), (\forall y \in \mathbb{R})\ \log_a x^y = y \log_a x$
- $(\forall x \in (0, \infty))\ \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

T2S24 Vzťahy

- $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\ \sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

- $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$
- $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$
- $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

- $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$
- $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$
- $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$
- $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

Použitá literatúra

- L. Kluvánek, I. Mišík, M. Švec, Matematika I, SVTL, Bratislava, 1959.
- B. Mihalíková, J. Ohriska, Matematická analýza 1, vysokoškolský učebný text, UPJŠ v Košiciach, Košice, 2012.
- I. Mojsej, Reálne čísla, prezentácia k prednáške, UPJŠ v Košiciach, Košice, 2014.