Matematická analýza I
pre informatikov a fyzikov

Jaroslav Šupina

Argumentácia a pravdivosť

26.9.2018

Ústav matematických vied

Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach

základná časť

T3S1 Výrok

výrok - gramatická veta, ktorá je pravdivá alebo nepravdivá

pravdivý/nepravdivý, P/N, 1/0

Hlavné mesto Slovenska je Bratislava.

Slovensko je najväčší štát v Európe.

Číslo 5 je menšie ako číslo 3.

$$5 \cdot 25 = 125$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 > 0$$

matematická veta, lema, axióma

T3S2 Logické operácie

logické operácie, logické spojky: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv$

negácia	$\neg\mathcal{V}$	Neplatí $\mathcal{V}$.
konjunkcia	$\mathcal{V} \wedge \mathcal{W}$	$\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$.
disjunkcia	$\mathcal{V} \vee \mathcal{W}$	$\mathcal{V}$ alebo $\mathcal{W}$.
implikácia	$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$	Ak $\mathcal{V}$ tak $\mathcal{W}$.
ekvivalencia	$\mathcal{V} \equiv \mathcal{W}$	$\mathcal{V}$ vtedy a len vtedy, keď $\mathcal{W}$.

T3S3 Logické operácie

Základný postulát výrokového počtu

Pravdivostná hodnota výroku utvoreného z iných výrokov pomocou logických operácií nezávisí od obsahu týchto výrokov, ale je jednoznačne určená pravdivostnými hodnotami týchto výrokov.

$\mathcal{V}$	$\mathcal{W}$	$\neg\mathcal{V}$	$\mathcal{V}\wedge\mathcal{W}$	$\mathcal{V}\vee\mathcal{W}$	$\mathcal{V}\to\mathcal{W}$	$\mathcal{V}\equiv\mathcal{W}$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Rozdiel v porovnaní s bežným životom!!!

T3S4 Negácia

Neplatí $\mathcal{V}$.

Nie $\mathcal{V}$.

Nie je pravda, že $\mathcal{V}$.

$\mathcal{V}$	$\neg\mathcal{V}$
1	0
0	1

$\mathcal{V} :=$ 2 je kladné celé číslo, $\quad \neg\mathcal{V} :=$ 2 nie je kladné celé číslo.

$\mathcal{W} := 2 < 3, \quad \neg\mathcal{W} :=$ Neplatí, že $2 < 3$.

symbolicky: $\neg(2 < 3)$, $2 \not< 3$

T3S5 Konjunkcia

$\mathcal{V}, \mathcal{W}$

$\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$

$\mathcal{V}$ a súčasne $\mathcal{W}$

$\mathcal{V}$ aj $\mathcal{W}$

Platia obidve $\mathcal{V}$ aj $\mathcal{W}$.

$\mathcal{V}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{V} \wedge \mathcal{W}$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$\mathcal{V} := 2$ je kladné celé číslo, $\qquad \mathcal{W} := 2 < 3$

$\mathcal{V} \wedge \mathcal{W} := 2$ je kladné celé číslo a $2 < 3$

T3S6 Konjunkcia

$$1 > 2 \quad \wedge \quad 2 < 3$$

$$1 > 2 \quad \wedge \quad 2 > 3$$

$$1 < 2 \quad \wedge \quad 2 < 3$$

$$1 < 2 \quad \wedge \quad 2 > 3$$

$\mathcal{V}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{V} \wedge \mathcal{W}$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

T3S7 Disjunkcia

$\mathcal{V}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{V} \vee \mathcal{W}$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$\mathcal{V}, \mathcal{W}$

$\mathcal{V}$ alebo $\mathcal{W}$

Platí aspoň jeden z $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$.

$\mathcal{V} :=$ 2 je kladné celé číslo, $\qquad \mathcal{W} := 2 < 3$

$\mathcal{V} \vee \mathcal{W} :=$ 2 je kladné celé číslo alebo $2 < 3$

vylučovací zmysel v hovorovej reči: Pôjdem si to kúpiť do obchodu alebo si to objednám.

nevylučovací zmysel v hovorovej reči: Zákazníci, ktorí majú do 26 rokov alebo sú študenti, majú právo na zľavu.

nesúvisiace výroky (matematické použitie): New York je veľké mesto alebo $2 \cdot 2 = 5$.

T3S8 Disjunkcia

$\mathcal{V}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{V} \vee \mathcal{W}$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$$1 > 2 \quad \vee \quad 2 < 3$$

$$1 > 2 \quad \vee \quad 2 > 3$$

$$1 < 2 \quad \vee \quad 2 < 3$$

$$1 < 2 \quad \vee \quad 2 > 3$$

T3S9 Implikácia

$\mathcal{V}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{V} \to \mathcal{W}$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$\mathcal{V}, \mathcal{W}$ Ak $\mathcal{V}$, tak $\mathcal{W}$. $\mathcal{V}$ predpoklad

Za predpokladu $\mathcal{V}$ platí $\mathcal{W}$. $\mathcal{W}$ záver

$\mathcal{W}$ ak $\mathcal{V}$.

$\mathcal{V} :=$ 2 je kladné celé číslo, $\mathcal{W} := 2 < 3$

$\mathcal{V} \to \mathcal{W} :=$ Ak 2 je kladné celé číslo, tak $2 < 3$.

Spojitosť medzi $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ v hovorovej reči. Často časový sled.

kauzálny zmysel v hovorovej reči: Ak pôjdem do obchodu, tak kúpim čokoládu.

nesúvisiace výroky: Ak $2 \cdot 2 = 4$, tak New York je veľké mesto.
Ak $2 \cdot 2 = 5$, tak New York je veľké mesto.
Ak $2 \cdot 2 = 4$, tak New York je malé mesto.
Ak $2 \cdot 2 = 5$, tak New York je malé mesto.

Ak dnes poletíme na Mars, tak zjem kefu.

T3S10 Implikácia

$\mathcal{V}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{V} \to \mathcal{W}$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$$1 > 2 \quad \to \quad 2 < 3$$

$$1 > 2 \quad \to \quad 2 > 3$$

$$1 < 2 \quad \to \quad 2 < 3$$

$$1 < 2 \quad \to \quad 2 > 3$$

T3S11 Ekvivalencia

$\mathcal{V}, \mathcal{W}$

$\mathcal{V}$ vtedy a len vtedy, keď $\mathcal{W}$.

$\mathcal{V}$ práve vtedy, keď $\mathcal{W}$.

$\mathcal{V}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{V} \equiv \mathcal{W}$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$\mathcal{V} :=$ 2 je kladné celé číslo, $\qquad \mathcal{W} := 2 < 3$

$\mathcal{V} \equiv \mathcal{W} :=$ 2 je kladné celé číslo práve vtedy, keď $2 < 3$.

T3S12 Ekvivalencia

$\mathcal{V}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{V} \equiv \mathcal{W}$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$$1 > 2 \quad \equiv \quad 2 < 3$$

$$1 > 2 \quad \equiv \quad 2 > 3$$

$$1 < 2 \quad \equiv \quad 2 < 3$$

$$1 < 2 \quad \equiv \quad 2 > 3$$

T3S13 Tabuľka

Nech $q_1, \ldots, q_k$ sú výroky (pre nás neznáme) a A je výrok poskladaný z $q_1, \ldots, q_k$ pomocou logických spojok. Tabuľka pre tento výrok je tabuľka, ktorá má 2^k riadkov obsahujúcich všetky možné kombinácie pravdivostných hodnôt elementárnych výrokov $q_1, \ldots, q_k$ a v príslušnom stĺpci odpovedajúce pravdivostné hodnoty výroku A.

Príklad 1

Nech p, q sú výroky. Nájdite tabuľku pre výrok $\neg(p \wedge \neg q)$. Určte pravdivostnú hodnotu výroku $\neg(2 \cdot 5 = 6 \wedge \neg(8 > 2))$.

Asi nebudeme robiť tabuľku pre výrok $\neg(2 \cdot 5 = 6 \wedge \neg(8 > 2))$.

T3S14 Tautológie

Výrok, ktorého tabuľka obsahuje pod týmto výrokom iba 1.

$\neg\neg\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}$

$\neg(\mathcal{V} \vee \mathcal{W}) \equiv (\neg\mathcal{V} \wedge \neg\mathcal{W})$

$\neg(\mathcal{V} \wedge \mathcal{W}) \equiv (\neg\mathcal{V} \vee \neg\mathcal{W})$

$(\mathcal{V} \wedge \mathcal{W}) \equiv (\mathcal{W} \wedge \mathcal{V})$

$(\mathcal{V} \vee \mathcal{W}) \equiv (\mathcal{W} \vee \mathcal{V})$

$(\mathcal{V} \wedge (\mathcal{W} \wedge \mathcal{U})) \equiv ((\mathcal{V} \wedge \mathcal{W}) \wedge \mathcal{U})$

$(\mathcal{V} \vee (\mathcal{W} \vee \mathcal{U})) \equiv ((\mathcal{V} \vee \mathcal{W}) \vee \mathcal{U})$

$(\mathcal{V} \wedge (\mathcal{W} \vee \mathcal{U})) \equiv ((\mathcal{V} \wedge \mathcal{W}) \vee (\mathcal{V} \wedge \mathcal{U}))$

$(\mathcal{V} \vee (\mathcal{W} \wedge \mathcal{U})) \equiv ((\mathcal{V} \vee \mathcal{W}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{U}))$

$\mathcal{V} \vee \neg\mathcal{V}$

$\neg(\mathcal{U} \wedge \neg\mathcal{U})$

$(\mathcal{V} \wedge \mathcal{V}) \equiv \mathcal{V}$

$(\mathcal{V} \vee \mathcal{V}) \equiv \mathcal{V}$

$(\mathcal{V} \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{W})) \equiv \mathcal{V}$

$(\mathcal{V} \vee (\mathcal{V} \wedge \mathcal{W})) \equiv \mathcal{V}$

$(\mathcal{V} \wedge \mathcal{T}_0) \equiv \mathcal{V}$

$(\mathcal{V} \vee \mathcal{T}_0) \equiv T_0$

$(\mathcal{V} \wedge \mathcal{F}_0) \equiv \mathcal{F}_0$

$(\mathcal{V} \vee \mathcal{F}_0) \equiv \mathcal{V}$

$(\mathcal{V} \to \mathcal{W}) \equiv (\neg\mathcal{V} \vee \mathcal{W})$

$(\mathcal{V} \equiv \mathcal{W}) \equiv (\mathcal{V} \to \mathcal{W}) \wedge (\mathcal{W} \to \mathcal{V})$

$(\mathcal{V} \to \mathcal{W}) \equiv (\neg\mathcal{W} \to \neg\mathcal{V})$

T3S15 Označenie

$\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{W}$ výrok $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ je pravdivý

$\mathcal{V} \Leftrightarrow \mathcal{W}$ výrok $\mathcal{V} \equiv \mathcal{W}$ je pravdivý

$\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{W}$ $\mathcal{V}$ je nutná podmienka pre $\mathcal{W}$

$\mathcal{W}$ je postačujúca podmienka pre $\mathcal{V}$

T3S16 Tranzitívnosť implikácie (ekvivalencie)

Výroky

$$(\mathcal{V} \to \mathcal{W}) \to ((\mathcal{W} \to \mathcal{U}) \to (\mathcal{V} \to \mathcal{U})) \text{ i } ((\mathcal{V} \to \mathcal{W}) \wedge (\mathcal{W} \to \mathcal{U})) \to (\mathcal{V} \to \mathcal{U})$$

sú tautológie.

Ak platia výroky $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$, $\mathcal{W} \to \mathcal{U}$, tak platí i $\mathcal{V} \to \mathcal{U}$.

Ak $\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{W}$ a $\mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{U}$, tak $\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{U}$.

Ak $\mathcal{V}_1 \Rightarrow \mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_2 \Rightarrow \mathcal{V}_3$, $\ldots$, $\mathcal{V}_{n-1} \Rightarrow \mathcal{V}_n$, tak $\mathcal{V}_1 \Rightarrow \mathcal{V}_n$.

Príklad 2

Ukážte, že ak číslo t zväčšené o 3 je menšie ako jeho trojnásobok, tak číslo $\frac{t-3t^2+2}{3t^2+1}$ je záporné.

T3S17 Výroková funkcia

$$\boxed{\text{Je „}x < 2\text{“ výrok?}}$$

$2 < 2$, $y < 2$, $0 < 2$, $1 < 2$, $z < 2$, $5 < 2$, $10 < 2$, $-2 < 2$, $x + z < 2$, $t < 2$

T3S18 Výroková funkcia

výroková funkcia - veta, v ktorej sa vyskytujú premenné, keď za tieto premenné dosadíme mená dovolených konkrétnych objektov, dostaneme výrok

$$x < 2,\ x^2 + 2x + 1 \geq 0,\ A \cup B = \mathbb{R},\ u \in e,\ x^2 + y^2 = 1$$

Výrok pokladáme za výrokovú funkciu.

$\mathcal{V}(x_1, \ldots, x_n)$ - výroková funkcia $\mathcal{V}$ závisí od premenných $x_1, \ldots, x_n$

fiktívna premenná - $\mathcal{V}(x) := x < 2$, $\mathcal{V}(x, y) := x < 2$, $\mathcal{V}(x, y, z) := x < 2$, $\mathcal{V}(x, y, z, u) := x < 2$

$$f(x) = x,\ f(x, y) = x,\ f(x, y, z) = x,\ f(x, y, z, t) = x,\ f(x, y, z, t, s) = x$$

T3S19 Nové výrokové funkcie

$$\mathcal{V}(x_1,\ldots,x_n) \qquad \neg\mathcal{V}(x_1,\ldots,x_n)$$

$$\mathcal{W}(x_1,\ldots,x_n) \qquad \neg\mathcal{W}(x_1,\ldots,x_n)$$

$$\mathcal{V}(x_1,\ldots,x_n) \wedge \mathcal{W}(x_1,\ldots,x_n)$$

$$\mathcal{V}(x_1,\ldots,x_n) \vee \mathcal{W}(x_1,\ldots,x_n)$$

$$\mathcal{V}(x_1,\ldots,x_n) \rightarrow \mathcal{W}(x_1,\ldots,x_n)$$

$$\mathcal{V}(x_1,\ldots,x_n) \equiv \mathcal{W}(x_1,\ldots,x_n)$$

$\mathcal{V}(x,x_1,\ldots,x_n)$ $\quad$ $(\forall x)\ \mathcal{V}(x,x_1,\ldots,x_n)$ (veľký, všeobecný kvantifikátor)

$(\exists x)\ \mathcal{V}(x,x_1,\ldots,x_n)$ (malý, existenčný kvantifikátor)

T3S20 Nové výrokové funkcie

$$\mathcal{V}(x,y) := x+y<2 \qquad \neg\mathcal{V}(x,y) := \neg(x+y<2)$$
$$x+y \not< 2 := \neg(x+y<2)$$

$$\mathcal{W}(x,y) := x+y=0 \qquad \neg\mathcal{W}(x,y) := \neg(x+y=0)$$
$$x+y \neq 0 := \neg(x+y=0)$$

$$\mathcal{V}(x,y) \wedge \mathcal{W}(x,y) := (x+y<2 \wedge x+y=0)$$

$$\mathcal{V}(x,y) \vee \mathcal{W}(x,y) := (x+y<2 \vee x+y=0)$$

$$\mathcal{V}(x,y) \rightarrow \mathcal{W}(x,y) := (x+y<2 \rightarrow x+y=0)$$

$$\mathcal{V}(x,y) \equiv \mathcal{W}(x,y) := (x+y<2 \equiv x+y=0)$$

$$(\forall x)\ \mathcal{V}(x,y) := (\forall x)\ x+y<2 \qquad (\forall y)\ \mathcal{W}(x,y) := (\forall y)\ x+y=0$$

$$(\exists x)\ \mathcal{V}(x,y) := (\exists x)\ x+y<2 \qquad (\exists y)\ \mathcal{W}(x,y) := (\exists y)\ x+y=0$$

T3S21 Nové výrokové funkcie

$$\mathcal{V}(y_1, \ldots, y_m) \qquad \mathcal{V}(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)$$

$$\mathcal{V}(y_1, \ldots, y_m) \wedge \mathcal{W}(x_1, \ldots, x_n) := \mathcal{U}(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)$$

$$\mathcal{W}(x_1, \ldots, x_n) \qquad \mathcal{W}(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)$$

$$\mathcal{V}(x, y) := x + y < 2 \qquad \mathcal{W}(s, t) := s \cdot t = 2$$

$$\mathcal{V}(x, y) \wedge \mathcal{W}(s, t) := (x + y < 2 \wedge s \cdot t = 2)$$

$$(\forall x)\ \mathcal{V}(x, x_1, \ldots, x_n) \qquad \forall x\ \mathcal{V}(x, x_1, \ldots, x_n) \qquad \forall x :\ \mathcal{V}(x, x_1, \ldots, x_n)$$

T3S22 Kvantifikátory s podmienkou

$(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0$

$(\forall x, \mathcal{V}(x))\ \mathcal{W}(x, x_1, \ldots, x_n)$ $\qquad$ $(\forall x, x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0$

$(\forall x)(\mathcal{V}(x) \rightarrow \mathcal{W}(x, x_1, \ldots, x_n))$ $\qquad$ $(\forall x)(x \in \mathbb{R} \rightarrow x^2 \geq 0)$

$(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 < 0$

$(\exists x, \mathcal{V}(x))\ \mathcal{W}(x, x_1, \ldots, x_n)$ $\qquad$ $(\exists x, x \in \mathbb{R})\ x^2 < 0$

$(\exists x)(\mathcal{V}(x) \wedge \mathcal{W}(x, x_1, \ldots, x_n))$ $\qquad$ $(\exists x)(x \in \mathbb{R} \wedge x^2 < 0)$

T3S23 Interpretácia všeobecnosti

$$x = y \to x + z = y + z$$

$$x = y \to x - z = y - z$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Platí $\mathcal{V}(x_1, \ldots, x_n)$. $\qquad (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\ \mathcal{V}(x_1, \ldots, x_n)$

T3S24 Negácia a kvantifikátory

$$\neg(\forall x)\ \mathcal{V}(x, y_1, \ldots, y_k) \Leftrightarrow (\exists x)\ \neg\mathcal{V}(x, y_1, \ldots, y_k)$$

$$\neg(\exists x)\ \mathcal{V}(x, y_1, \ldots, y_k) \Leftrightarrow (\forall x)\ \neg\mathcal{V}(x, y_1, \ldots, y_k)$$

$$\neg(\forall x, \mathcal{V}(x))\ \mathcal{W}(x, y_1, \ldots, y_k) \Leftrightarrow (\exists x, \mathcal{V}(x))\ \neg\mathcal{W}(x, y_1, \ldots, y_k)$$

$$\neg(\exists x, \mathcal{V}(x))\ \mathcal{W}(x, y_1, \ldots, y_k) \Leftrightarrow (\forall x, \mathcal{V}(x))\ \neg\mathcal{W}(x, y_1, \ldots, y_k)$$

T3S25 Logicky pravdivé výrokové funkcie

$$(\forall x)\ \mathcal{V}(x) \rightarrow (\exists x)\ \mathcal{V}(x)$$

$$(\exists x)(\exists y)\ \mathcal{V}(x, y) \equiv (\exists y)(\exists x)\ \mathcal{V}(x, y)$$

$$(\forall x)(\forall y)\ \mathcal{V}(x, y) \equiv (\forall y)(\forall x)\ \mathcal{V}(x, y)$$

$$(\exists x)(\forall y)\ \mathcal{V}(x, y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)\ \mathcal{V}(x, y)$$

T3S26 Skrátený matematický zápis - formula

Číslo dva je menšie ako číslo tri.

Number two is less than number three.

Die Zahl zwei ist kleiner als die Zahl drei.

Le nombre deux est inférieur au nombre trois.

El número dos es menos de número tres.

Число два меньше числа три.

$$2 < 3$$

T3S27 Množiny

Pod množinou si môžeme predstaviť súbor objektov (prvkov).

– množina je určená iba svojimi prvkami
– $a \in M$ ... a je prvkom množiny M; a je z M
– $a \notin M$ ... a nie je prvkom množiny M; a nie je z M
– $\emptyset$ ... prázdna množina, neobsahuje žiaden prvok

$\boxed{\subseteq}$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\emptyset$, $\{2\}$, $\{0, 2, \pi\}$, $(2, 3)$, $\langle -4, 4\rangle$, $(5, \infty)$, $(-\infty, 6)$, $\langle -200, \infty)$, $(-\infty, 100\rangle$

$\boxed{\{x;\ \mathcal{V}(x)\}}$ $\boxed{\{x \in A;\ \mathcal{V}(x)\}}$

$\{x;\ \cos x = 0\}$, $\{x;\ x^2 - 5x + 1 < 0\}$, $\{x;\ \log_5(x-1) + 2\ln(x^2-1) \geq x + 6\}$

T3S28 Množiny

$\boxed{\setminus}$ $$A \setminus B = \{a : a \in A \wedge a \notin B\}$$

$\{4, 5, 6, -2, -8, 100\} \setminus \{5, 6, -2, -8\}$, $\mathbb{N} \setminus \{n;\ (\exists k \in \mathbb{N})\ n = 2k\}$

$\boxed{\cup}$ $$A \cup B = \{a : a \in A \vee a \in B\}$$

$(-\infty, 5) \cup \langle 10, 15)$, $\{n;\ (\exists k \in \mathbb{N})\ n = 3k\} \cup \{m;\ (\exists l \in \mathbb{N})\ m = 3l + 1\}$

$\boxed{\cap}$ $$A \cap B = \{a : a \in A \wedge a \in B\}$$

$\langle \pi, 100) \cap (3, 4\rangle$, $\{n;\ (\exists k \in \mathbb{N})\ n = 3k\} \cap \{m;\ (\exists l \in \mathbb{N})\ m = 2l\}$

T3S29 Množiny

$\boxed{\times}$ $A \times B = \{[a,b]; a \in A \wedge b \in B\}$

$\{5,-2,-8,100\} \times \{-2,-8\} =$
$\{[5,-2],[-2,-2],[-8,-2],[100,-2],[5,-8],[-2,-8],[-8,-8],[100,-8]\}$
$A \times A = A^2$, $A \times \cdots \times A = A^n$
$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 = \{[x,y,z];\ x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{\mathcal{P}(A)}$ systém všetkých podmnožín množiny A

$\mathcal{P}(\{2,3\}) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$

$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \equiv x \in B)$

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

T3S30 Ohraničenosť množiny

Neprázdnu množinu $M \subseteq \mathbb{R}$ nazývame **ohraničenou zhora (zdola)**, ak existuje $K \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{R}$) také, že pre každé $x \in M$ platí $x \leq K$ ($x \geq k$).

Každé číslo $K(k)$ s touto vlastnosťou nazývame **horným (dolným) ohraničením** množiny M.

Definíciu pomocou kvantifikátorov zapíšeme nasledovne:

ohraničená zhora $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in M)\ x \leq K$

ohraničená zdola $(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x \in M)\ x \geq k$

Neprázdnu množinu $M \subseteq \mathbb{R}$ nazývame **ohraničenou**, ak je ohraničená zhora aj zdola.

Ohraničenosť množiny

Veta 1

Neprázdna množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je ohraničená práve vtedy, keď existuje číslo $K > 0$ také, že pre všetky $x \in M$ je $|x| \leq K$.

Hovoríme, že $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ je **neohraničená zdola (zhora)**, ak nie je ohraničená zdola (zhora).

Hovoríme, že $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ je **neohraničená**, ak je neohraničená zdola alebo zhora.

T3S32 Maximum a minimum množiny

Nech množina $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $d \in M$ $(c \in M)$ nazývame **maximum (minimum)** množiny M, ak pre každé $x \in M$ platí $x \leq d$ $(x \geq c)$.

Označujeme $d = \max M$ $(c = \min M)$.

najväčší a najmenší prvok množiny M

T3S33 Prirodzené čísla

Množina **prirodzených čísel**, označujeme $\mathbb{N}$, je najmenšia podmnožina množiny $\mathbb{R}$ s vlastnosťami

$$1 \in \mathbb{N},$$

$$\text{pre ľubovoľné } x \in \mathbb{R}, \text{ ak } x \in \mathbb{N}, \text{ tak } x+1 \in \mathbb{N}.$$

$$x \in \mathbb{N} \equiv \big(x \in \mathbb{R} \wedge (\forall X \subseteq \mathbb{R})((1 \in X \wedge (\forall y)(y \in X \to y+1 \in X)) \to x \in X)\big)$$

 Matematická indukcia

Veta 2 (O matematickej indukcii I)

Nech $\mathcal{V}(n)$ je výroková funkcia definovaná pre každé $n \in \mathbb{N}$. Ak platí

$$\mathcal{V}(1) \wedge (\forall k \in \mathbb{N})(\mathcal{V}(k) \to \mathcal{V}(k+1)),$$

tak $\mathcal{V}(n)$ platí pre každé prirodzené číslo n.

Ak platí

1. výrok $\mathcal{V}(1)$,
2. pre každé prirodzené číslo k z výroku $\mathcal{V}(k)$ vyplýva výrok $\mathcal{V}(k+1)$,

tak samotný výrok $\mathcal{V}(n)$ platí pre každé prirodzené číslo n.

T3S35 Hanojské veže

Príklad 3

K dispozícii máme tri tyče a n diskov navlečených na jednej z nich. Disky majú rozličný priemer a na tyči sú usporiadané podľa priemeru, s najväčším diskom naspodu (pozri obrázok). Úlohou je premiestniť všetky disky na druhú tyč s využitím tretej tyče, pričom platia nasledujúce pravidlá:

- *v jednom ťahu (na jedenkrát) je možné premiestniť iba jeden disk*
- *disk môžeme preniesť len na inú tyč (nie mimo)*
- *väčší disk nesmie byť nikdy položený na menší.*

Dokážte, že existuje riešenie s $2^n - 1$ presunmi.

Príklad 4

Ukážte, že platí nasledujúci výrok: $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2^n \leq (n+1)!$.

Príklad 5

Ukážte, že platí výrok $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\mathcal{V}(n) \to \mathcal{V}(n+1))$, *kde*

$$\mathcal{V}(n) := \big(1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = (n-1)(n+1)\big).$$

Príklad 6

Ukážte, že platí výrok $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\mathcal{V}(n) \to \mathcal{V}(n+1))$, *kde*

$$\mathcal{V}(n) := \big(n > 100\big).$$

Veta 3 (O dobrom usporiadaní)

Každá neprázdna množina prirodzených čísel má najmenší prvok.

Veta 4 (O matematickej indukcii II)

Nech $\mathcal{V}(n)$ *je výroková funkcia definovaná pre každé* $n \in \mathbb{N}$. *Ak platí*

$$(\forall i \in \mathbb{N})((\forall j < i)\ \mathcal{V}(j) \rightarrow \mathcal{V}(i)),$$

tak $\mathcal{V}(n)$ *platí pre každé prirodzené číslo* n.

Príklad 7

Ukážte, že každé prirodzené číslo väčšie ako 1 je deliteľné prvočíslom.

T3S38 Čo je to číslo?

$\boxed{\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}}$

$\sqrt{5}$

$\sqrt{2}$

0

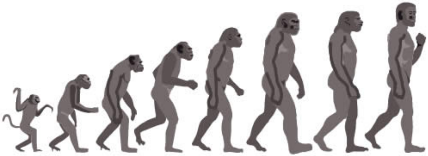
$\ldots,\ \frac{1}{2},\ \frac{181}{20},\ \frac{5}{3},\ \frac{56}{7},\ \ldots$

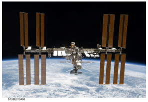
$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$

$\ldots,\ \text{-4},\ \text{-3},\ \text{-2},\ \text{-1}$

e

π





2000 p.n.l. 0 2000

T3S39

$$\boxed{\text{Ukážte, že } (a-b)(a+b) = a^2 - b^2.}$$

T3S40 Axiómy reálnych čísel

Predpokladáme, že existuje štruktúra $\langle \mathbb{R}, =, <, 0, 1, +, -, \cdot \rangle$ nazývaná **množina reálnych čísel** a označovaná $\mathbb{R}$, ktorá spĺňa nasledujúce axiómy:

(1) Štruktúra $\langle \mathbb{R}, =, 0, 1, +, -, \cdot \rangle$ je pole.

(2) Štruktúra $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ je čiastočné usporiadanie.

(3) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ (x \neq y \rightarrow (x < y \vee y < x))$.

(4) $0 < 1$.

(5) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x < y \rightarrow x + z < y + z)$.

(6) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ ((x > 0 \wedge y > 0) \rightarrow x \cdot y > 0)$.

(7) $(\forall A \subseteq \mathbb{R})((\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in A)\ x \leq K \rightarrow (\exists a \in \mathbb{R})\ a = \sup A)$.

(Bolzanov princíp)

Dá sa ukázať, že ak nejaká štruktúra $\langle M, =, <, 0, 1, \Box, \triangle, \nabla \rangle$ spĺňa axiómy (1) - (7), tak je s množinou reálnych čísel izomorfná.

T3S41 Významné množiny reálnych čísel

Množina **celých čísel**, označujeme $\mathbb{Z}$, je podmnožina množiny $\mathbb{R}$ taká, že

$$(\forall x)(x \in \mathbb{Z} \equiv (x \in \mathbb{R} \wedge (x \in \mathbb{N} \vee -x \in \mathbb{N} \vee x = 0))).$$

Množina celých čísel nie je pole, ale spĺňa axiómy (2) - (6).

Množina **racionálnych čísel**, označujeme $\mathbb{Q}$, je podmnožina množiny $\mathbb{R}$ taká, že

$$(\forall x)(x \in \mathbb{Q} \equiv (x \in \mathbb{R} \wedge (\exists y \in \mathbb{Z})(\exists n \in \mathbb{N})\ x = \frac{y}{n})).$$

Množina racionálnych čísel spĺňa axiómy (1) - (6).

Množina **iracionálnych čísel** je množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Niekedy je vhodné prihodiť k $\mathbb{R}$ i symboly $+\infty$, $-\infty$. Potom

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

T3S42 Intervaly, $a, b, x \in \mathbb{R}$, $a < b$

$$x \in (a, b) \equiv a < x < b \qquad x \in \langle a, b\rangle \equiv a \leq x \leq b$$

$$x \in (a, b\rangle \equiv a < x \leq b \qquad x \in \langle a, b) \equiv a \leq x < b$$

$$x \in (a, \infty) \equiv a < x \qquad x \in (-\infty, b) \equiv x < b$$

$$x \in \langle a, \infty) \equiv a \leq x \qquad x \in (-\infty, b\rangle \equiv x \leq b$$

Príklad 8

$\sqrt{2}$ *nie je racionálne číslo.*

$$
\begin{gathered}
1^2 < 2 < 2^2 \\
1,4^2 < 2 < 1,5^2 \\
1,41^2 < 2 < 1,42^2 \\
1,414^2 < 2 < 1,415^2 \\
\vdots
\end{gathered}
$$

T3S44 Vlastnosti číselných množín

Veta 5 (Archimedov princíp)

Ak x, ε sú reálne čísla a $\varepsilon > 0$, tak existuje prirodzené číslo n také, že

$$n \cdot \varepsilon > x.$$

Veta 6 (Hustota racionálnych čísel)

Pre každé dve reálne čísla $a < b$ existuje racionálne číslo r také, že

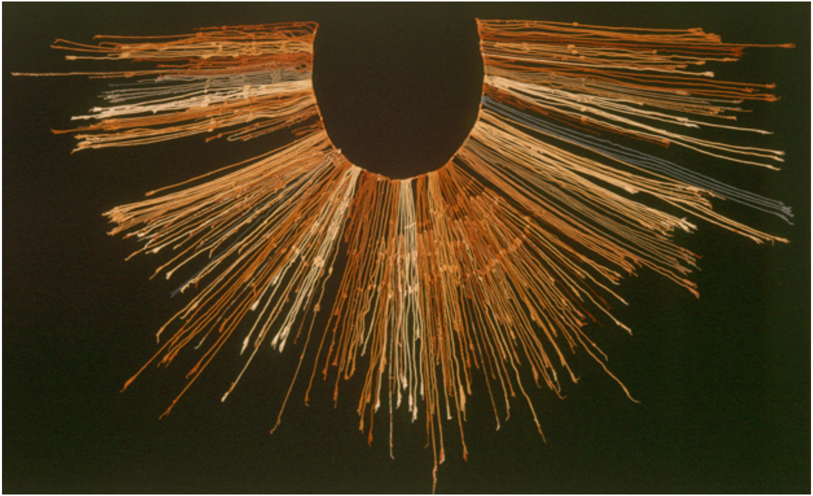
$$a < r < b.$$

Veta 7 (Hustota iracionálnych čísel)

Pre každé dve reálne čisla $a < b$ existuje iracionálne číslo r také, že

$$a < r < b.$$

T3S45 Kipu, Južná Amerika, Inkská ríša



T3S46

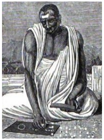
VÝVOJ ČÍSLIC OD NAJSTARŠÍCH DÔB.

http://www.priklady.eu/cs/Matematika/Zajimavosti-v-matematice/Vyvoj-cislic-od-najstarsich-dob.alej

T3S47

http://www.priklady.eu/cs/Matematika/Zajimavosti-v-matematice/Vyvoj-cislic-od-najstarsich-dob.alej

T3S48 Desiatkový pozičný zápis



Brahmagupta

598 - 670

Abú Abdalláh Muhammad ibn Músá al-Chorezmí al-Mádzúsí

780 - 850

Algoritmi de numero Indorum

T3S49 Desiatkový pozičný zápis

Ak $x \in \mathbb{R}$, tak celá časť x, píšeme $\lfloor x \rfloor$, je najväčšie celé číslo nie väčšie ako x, t.j.

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

iné označenie: $\mathrm{E}(x)$, $[x]$

Jedným zo zápisov reálnych čísel je tzv. nekonečný desatinný rozvoj

$$\pm a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots ,$$

kde $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $i \in \mathbb{N}$. Reálnymi číslami budeme nazývať čísla uvedeného tvaru.

T3S50 Desiatkový pozičný zápis

- Ak je iba konečný počet cifier $a_1, a_2, \dots, a_n$ nenulových, potom hovoríme o konečnom desatinnom rozvoji, ktorý môže byť reprezentovaný ako súčet

  $$\pm a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n = \pm \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \right).$$

  Toto číslo je racionálne.

- Racionálnym číslom je aj číslo s nekonečným desatinným rozvojom, ale periodickým (napr. $\frac{19}{22} = 0,8\overline{63}$).

- Čísla s nekonečným desatinným rozvojom ale neperiodickým sú iracionálne (napr.0,10100100010000...).

- Pozor na periódu 9 (napr. $1,34\overline{9} = 1,35$)!

T3S51 Presvedčanie o pravdivosti

Objektívna argumentácia

objektívne určenie pravdivosti tvrdenia použitím metód vyvinutých v matematike za týmto účelom

Subjektívna argumentácia

získanie pohľadu na tvrdenie
pochopenie tvrdenia
znázornenie tvrdenia
príklady týkajúce sa tvrdenia
sebapresvedčenie o pravdivosti tvrdenia

Chceme overiť pravdivosť výroku $\mathcal{V}$.

Priamy dôkaz

Postupným argumentovaním a využívaním základných faktov ukážeme, že z ich pravdivosti vyplýva pravdivosť výroku $\mathcal{V}$.

Dôkaz sporom

Predpokladáme, že platí $\neg\mathcal{V}$ a postupnou argumentáciou ukážeme, že platí nejaký výrok $\mathcal{U}$ a jeho negácia $\neg\mathcal{U}$.

Čiže ukážeme, že platí výrok $\neg\mathcal{V} \to (\mathcal{U} \wedge \neg\mathcal{U})$.

Chceme overiť pravdivosť výroku $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$.

Priamy dôkaz

Predpokladáme, že platí $\mathcal{V}$ a postupnou argumentáciou odvodíme pravdivosť výroku $\mathcal{W}$.

Čiže tvrdíme, že $\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_1 \Rightarrow \mathcal{V}_2$, $\dots$, $\mathcal{V}_{n-1} \Rightarrow \mathcal{V}_n$, $\mathcal{V}_n \Rightarrow \mathcal{W}$.

Nepriamy dôkaz

Priamy dôkaz výroku $\neg\mathcal{W} \to \neg\mathcal{V}$.

Sporom

Predpokladáme, že platia $\mathcal{V}$ a $\neg\mathcal{W}$ a postupne argumentujeme, až sa dostaneme k pravdivosti nejakého výroku $\mathcal{U}$ a jeho negácie $\neg\mathcal{U}$.

doplňujúca časť

T3S54 Čiastočné usporiadanie

Štruktúra $\langle M, \prec \rangle$, kde M je množina a $\prec$ je relácia na M (popisuje vzťah medzi dvoma prvkami M) sa nazýva čiastočné usporiadanie, ak spĺňa nasledujúce podmienky:

(1) $(\forall x \in M)\ x \not\prec x$.

(2) $(\forall x, y, z \in M)\ ((x \prec y \wedge y \prec z) \rightarrow x \prec z)$.

Označenie: $x \preceq y \equiv (x \prec y \vee x = y)$

Príklad 9

Nech M sú uchádzači vo výberovom konaní o lukratívnu zákazku. Po prezretí podkladov môže výberová komisia určiť čiastočné usporiadanie M. Úlohou je zmeniť ho na lineárne usporiadanie.

Príklad 10

Nech M je množina webových adries vyhľadaných internetovým vyhľadávačom na základe konkrétneho dopytu. Ako je zobrazená množina M v prehliadači?

Príklad 11

Nech M je množina kandidátov do prezidentských volieb. Na základe ľudového hlasovania môžeme väčšinou túto množinu usporiadať.

Použitá literatúra

- L. Kluvánek, I. Mišík, M. Švec, Matematika I, SVTL, Bratislava, 1959.
- B. Mihalíková, J. Ohriska, Matematická analýza 1, vysokoškolský učebný text, UPJŠ v Košiciach, Košice, 2012.
- I. Mojsej, Reálne čísla, prezentácia k prednáške, UPJŠ v Košiciach, Košice, 2014.