Jozef Kiseľák

Sada úloh na precvičenie I.
October 2, 2019

A. Znázornite vektorové polia

1. $\mathbb{F}(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
2. $\mathbb{F}(x,y) = (1, x)$
3. $\mathbb{F}(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$
4. $\mathbb{F}(x,y) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$
5. $\mathbb{F}(x,y) = (2x-3y, 2x+3y)$
6. $\mathbb{F}(x,y) = (\ln(1+x^2+y^2), x)$

B. Nakreslite gradientné vektoré polia skalárnych funkcií spolu s ich vrstevnicami.

1. $f(x,y) = xy$
2. $f(x,y) = xy - 2x$
3. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
4. $f(x,y) = \frac{1}{4}(x+y)^2$
5. $f(x,y) = \sin x + \sin y$
6. $f(x,y) = \sin(x+y)$

C. Nájdite parametrické vyjadrenie nasledujúcich kriviek.

1. $4y^2 = 4x^2y + x^5$
2. $x^4 + y^4 = ax^2y$
3. $2y - x^2 + x^3 + 2 = 0$
4. $x^2 + y^2 = 2ay,\ a \in \mathbb{R}$
5. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$
6. $(x^2+y^2)\arctan\frac{y}{x} = ay, a \in \mathbb{R}$

D. Rovnice kriviek prepíšte na tvar $F(x,y) = 0$ a zistite tak o aké krivky ide.

1. $x = a + b\cos t,\ y = c + d\sin t,\ b, d > 0$
2. $x = \arctan t,\ y = \operatorname{arccot} t$
3. $\rho = \frac{d}{\sin(\phi - \phi_0)},\ d > 0$
4. $\rho = \frac{a}{\cos^2(\phi/2)},\ a > 0$
5. $\rho = \frac{a}{\sin^2(\phi/2)},\ a > 0$
6. $x = \frac{a\sqrt{2}\cos(t)}{\sin(t)^2+1}, y = \frac{a\sqrt{2}\cos(t)\sin(t)}{\sin(t)^2+1}, a \in \mathbb{R}$

E. Evolventa kružnice.

Na kružnici s polomerom R je namotaná niť nulovej hrúbky. Túto niť odmotávame z kružnice tak, aby bola niť stále napnutá (tj. aby bola vždy dotyčnicou ku kružnici). Nájdite parametrické vyjadrenie krivky, ktorú opisuje koniec nite.

F. Zostrojte nasledujúce krivky.

1. $(x^2+y^2)^3 = a^2(x^2-y^2)^2,\ a>0$
2. $x(x^2-y^2) = a(x^2+y^2),\ a>0$
3. $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3},\ a>0$
4. $x^3+y^3 = 3axy,\ a\in\mathbb{R}$
5. $x^3+y^3 = 3axy,\ a\in\mathbb{R}$
6. $\rho = \phi$
7. $\rho = \frac{1}{\phi}$
8. $\rho = 1+2\cos\phi$

G. Zostrojte nasledujúce krivky.

1. $x = -5t^2+2t^5,\ y = -3t^2+2t^3$
2. $x = t+\mathrm{e}^{-t},\ y = 2t+\mathrm{e}^{-2t}$
3. $x = \frac{(t+2)^2}{t+1},\ y = \frac{(t-2)^2}{t-1}$
4. $x = 2t-t^2,\ y = 2t^2-t^3$

H. Zistite, či sú zobrazenia Lipschitzovsky spojité, prosté, regulárne a načrtnite ich obory hodnôt.

1. $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2,\ f(t) = (a\cos t,\ b\sin t),\ a,b>0$
2. $f:[0,3\pi]\to\mathbb{R}^2,\ f(t) = (t-\sin t,\ 1-\cos t)$
3. $f:[0,1]\to\mathbb{R}^2,\ f(t) = (t,\ t^2\cos\frac{\pi}{t^2}),\ f(0) = (0,0)$
4. $f:[0,1]\to\mathbb{R}^2,\ f(t) = (t,\ t^a\cos\frac{\pi}{t}),\ f(0) = (0,0),\ a>0$
5. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ f(t) = (\mathrm{e}^{ct}\cos t,\ \mathrm{e}^{ct}\sin t),\ c = \frac{1}{2\pi}$
6. $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2,\ f(t) = (\cos t^3,\ \sin t^3)$

I. Pre $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ **položme** $||(x,y)||_h = \max\left(|y|, \left|x+\frac{y}{\sqrt{3}}\right|, \left|x-\frac{y}{\sqrt{3}}\right|\right)$**. Ukážte, že je to norma a nakreslite tvar jednotkovej kružnice.**

J. Nájdite normu prvku u v LNP priestore $(X, \|\cdot\|)$ (s prirodzenou normou, ak nie je povedané inak), ak

1. $X = \mathcal{L}^2([0,1]^2),\ u = u(x,y) = x^2 + y^2$
2. $X = C^1([0,1]^2),\ u = u(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$
3. $X = \ell^2,\ u = (1, 1/2, 1/3, \dots, 1/k, \dots)$
4. $X = \mathcal{L}^2_w(\mathbb{R}),\ u = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ a $w = e^{-x^2},\ \ n \in \mathcal{N}$ [hint: vzťah Hermiteových polynómov]
5. $X = \mathcal{M}^{3\times 3}$, u je matica
$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$
a norma je $a)\ \|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad b)\ \|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$
6. $X = \{u \in \mathcal{L}^2(0,1) : u' \in \mathcal{L}^2(0,1)\},\ u = u(x) = x^{\frac{2}{3}}$ a norma je $||u|| = \sqrt{||u||_2^2 + ||u'||_2^2}$
7. $X = C_{\text{Lip}}(\mathbb{R}),\ u = \arctan x + 1$
8. $X = \mathcal{P}_n,\ u = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$
9. $X = c,\ u = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} :\ \ x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}, n \in \mathcal{N},\ 0 < a < b$

K. Overte, či nasledujúce priestory sú normované.

1. $(\mathbb{R}, \lfloor x \rfloor)$ a $(\mathbb{R}, \mathrm{e}^x)$
2. $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$, kde
$$\|x\| = \begin{cases} x, & \text{ak } x \geq 0 \\ -2x, & \text{ak } x < 0 \end{cases}$$
3. $(C(\mathbb{R}_0^+), \|\cdot\|)$, kde $\|f\| = \sup_{t \geq 0} \mathrm{e}^{kt} |f(t)|, \ k \in R$
4. $\left(X, \frac{\|\cdot\|}{1+\|\cdot\|}\right)$, kde $\|\cdot\|$ je pôvodná norma na LNP X
5. $(X, \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2)$, kde $\|\cdot\|_k$, $k = 1, 2$ sú normy na LNP X
6. $(C_{\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, kde $\|f\| := |f(0)| + c_f, \ c_f := \sup \left\{ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} : x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \right\}$
7. $(C(0,1], \|\cdot\|)$, kde $||f|| = \sup\limits_{x \in (0,1]} \dfrac{|f(x)|}{|x|}$
8. $(C^1([a,b]), \|\cdot\|)$, kde $||f|| = \displaystyle\int_a^b |f'(t)| \,\mathrm{d}t$
9. $(C^1([a,b]), \|\cdot\|)$, kde $||f|| = \displaystyle\int_a^b \{|f(t)| + |f'(t)|\} \,\mathrm{d}t$
10. $(X, \|\cdot\|)$, kde $X = \{f \in C^1([a,b]) : f(a) = f(b) = 0\}$ a $||f|| = \displaystyle\int_a^b |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t$
11. $(\ell^p, \|\cdot\|)$, kde $||\mathbf{x}|| = \sqrt[p]{\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p}, \ p \in (0,1)$
12. $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$, kde $\|\mathbf{x}\| = |x_1|$
13. $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$, kde $\|\mathbf{z}\| = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|^{\frac{1}{2}} \right)^2$
14. $(\mathbb{R}^4, \|\cdot\|)$, kde $\|\mathbf{x}\| = 2|x_1| + \sqrt{3|x_2|^2 + \max(|x_3|, 2|x_4|)^2}$
15. $(\mathcal{P}_n, \|\cdot\|)$, kde $\|Q\| = \left[\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^{1-p} |a_i|^p \right]^{1/p}$ pre $Q(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$
16. $(\mathbb{H}, \|\cdot\|) \approx (\mathbb{R}^4, \|\cdot\|)$, kde $\|\mathbf{q}\| = \sqrt{\mathbf{q}\mathbf{q}^*}$, $\mathbf{q} = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k$, $\mathbf{q}^* = q_1 - q_2 i - q_3 j - q_4 k$, pričom platí $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

L. Nájdite vzdialenosť prvku x od množiny A v LNP priestore X, ak

1. $X = \mathbb{R}, \ \ x = \sqrt{2}$ a $A = \mathbb{Q}$
2. $X = c, \ \ x = (2/3, 3/4, 4/5, \dots, k/(k+1), \dots)$ a $A = c_0$
3. $X = C([0,1]), \ \ x = x(t) = t$ a A je množina koštantných funkcií
4. $X = C([0,1]), \ \ x = x(t) = t$ a A je množina lineárnych funkcií
5. $X = \mathcal{L}(0,\pi), \ \ x = x(t) = \sin t$ a A je množina kvadratických funkcií
6. $X = \ell^2, \ \ x = (1, 1/4, 1/9, \dots, 1/k^2, \dots)$ a $A = \left\{ \mathbf{x} \in \ell^2 : \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \right\}$
7. $X = \mathcal{L}^1(0,1), x = 1$ a $A = \{ f \in \mathcal{L}^1(0,1) : \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \}$
8. $X = \mathcal{L}^2(0,1), \ \ x = x(t) = t^2$ a $A = \left\{ f \in \mathcal{L}^2(0,1) : \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$

M. Nech $M = \{ f \in C([0,1]) : f(0) = 0 \}, \ \ g = 1$ **na** $[0,1]$**. Nájdite prvky** $h \in M$**, tak aby** $||g - h|| = \mathrm{dist}(g, M)$.

N. Dokážte, že platí $\lim\limits_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$**.**

O. Nech $p \in [1, \infty)$ **a** $a_n > 0, n \in \mathcal{N}$**. Nájdite nutnú a postačujúcu podmienku na to, aby elipsoid** $E = \left\{ \mathbf{x} \in \ell^p : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^p}{a_n^p} < 1 \right\}$ **bol ohraničený (v** ℓ^p**).**