Jozef Kiseľák

Sada úloh na precvičenie II.
13. október 2014

A. Rozhodnite, či rovnica definuje (jednoznačne) implicitne funkciu $y = f(x)$ v okolí bodu (a_1, a_2). Ak áno, nájdite tam jej deriváciu.

1. $x^2 + 2xy - y^2 = 4, \ \ (a_1, a_2) = (2, 0)$
2. $e^{2x \cos y} + e^{2y \cos x} = 2, \ \ (a_1, a_2) = (0, ?)$
3. $xe^{2y} - y \ln x = 0, \ \ (a_1, a_2) = (?, 0)$
4. $xe^x = y^2 + xy, \ \ (a_1, a_2)$ je ľub.
5. $x^y = y^x, \ \ (a_1, a_2) = (1, ?)$
6. $y^2 = x^3 + x + 11, \ \ (a_1, a_2) = (x_0, 0)$

B. Vypočítajte parciálne derivácie druhého rádu funkcie $z(x, y)$ implicitne zadanej vzťahmi:

1. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \ a \in \mathbb{R}$
2. $x + y + z = e^z$
3. $z^3 - 3xyz = a^3, \ a \in \mathbb{R}$
4. $z = \sqrt{x^2 - y^2} \tan \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

C. Ak sú funkcie $x = f(y, z), \ y = g(x, z), \ z = h(x, y)$ jednoznačne implicitne zadané vzťahom $F(x, y, z) = 0$, ukážte, že platí $f_y g_z h_x = -1$.

D. Napíšte rovnice dotykových rovín k ploche určenej rovnicou $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, ktoré sú rovnobžné s rovinou určenou rovnicou $x + 4y + 6z = 0$.

E. Určte rovnicu dotyčnice a normály ku krivke definovanej rovnicou $x^4 + y^4 - x^3y^3 = 9$ v bode $(1, 2)$.

F. Nájdite dotykový vektor ku krivke, ktorú dostaneme ako graf funkcie získanej riešením sústavy rovníc $x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0, \ x^2 + y^2 - 2z = 0$ v okolí bodu $(1, 1, 1)$.

G. Nájdite lineárnu aproximáciu funkcie $z(x, y)$, ktorá je riešením rovnice $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$ v okolí bodu $(1, 1, 2)$.

H. Rozhodnite, či rovnice definujú (jednoznačne) implicitne funkcie $y = f(x)$, $z = g(x)$ v okolí bodu (a_1, a_2, a_3). Ak áno, nájdite tam ich derivácie.

1. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $y^2 - 2x + z = 0$, $(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 1)$
2. $e^x + y + z = 3/2$, $e^{x+y} + z^2 = 5/4$, $(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 1/2)$
3. $x + y + z = 0$, $x^3 + y^3 - z^3 = 10$, $(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, -2)$
4. $\sin x + \cosh y - z = 1$, $\ln x + 1 + y^2 - z = 0$, $(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$

I. Nájdite krivosť nasledujúcich kriviek.

1. $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(t - \cos t)$, $a \in \mathbb{R}$
3. $x = a \cot t$, $y = b \sin t \cos t$, $ab > 0$
4. $x = a(3\cos t - \cos 3t)$, $y = a(3\sin t - \sin 3t)$, $a \in \mathbb{R}$

J. Nájdite krivosť a torziu nasledujúcich kriviek.

1. $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$
2. $x = a(1 + \cos t)$, $y = a \sin t$, $z = 2a \sin\left(\frac{t}{2}\right)$

K. Častica sa pohybuje v rovine xy tak, že jej pravouhlé súradnice sa menia s časom t podľa vzťahov: $x = At^2, y = B - Ct^2$, kde A, B, C sú dané konštanty. Nájdite polohový vektor častice v čase t, jeho veľkosť a určte tvar dráhy, po ktorej sa častica pohybuje.

L. Koleso s polomerom R sa otáča tak, že uhol otočenia ϕ závisí od času podľa rovnice $\phi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, kde $B = 1s^{-1}, C = 1^{-2}, D = 1s^{-3}$. Vypočítajte polomer kolesa, ak na konci druhej sekundy sa normálové zrýchlenie bodov na obvode kolesa rovnalo $3.46 \times 10^2 ms^{-2}$.

M. Nájdite rovnicu oskulačnej roviny krivky v bode $a = (a_1, a_2, a_3)$.

1. $r = \langle 2\sin 3t, t, 2\cos 3t \rangle$, $a = (0, \pi, 2)$
2. $r = \langle 2t, 3t, t^3 + 3t \rangle$, $a = (2, 3, 4)$
3. $r = \langle 2\sin^2 t, \sin 2t, 2\cos t \rangle$, a je ľub.
4. $x^2 + y^2 = b^2$, $2xy = bz$, $b \in \mathbb{R}$, a je ľub.

N. Pohyb častice začína v bode $(0, 0, 100)$ s počiatočnou rýchlosťou $(1, 2, 3)$ a so zrýchlením $(-0.01, 0, -8)$. Nájdite funkciu polohy a určte, kde pretína rovinu xy.

O. Vyjadrite polomer krivosti krivky zadanej v polárnych súradniciach.

P. Reparametrizujte krivku vzhľadom na dĺžku oblúka meraného od bodu, kde $t = 0$ v smere rastu t.

1. $r = \langle t, 1 - 3t, 5 + 4t \rangle$
2. $r = \langle e^{2t} \cos 2t, 2, e^{2t} \sin 2t \rangle$
3. $r = \left\langle \frac{3t}{1+t^2}, \frac{3t^2}{1+t^2}, 3 \right\rangle$
4. $r = \langle \cos^3 t, \sin^3 t \rangle$

R. Riešte exaktné diferenciálne rovnice.

1. $2xy \, dx + (x^2 - y^2) \, dy = 0$
2. $e^{-y} \, dx - (2y + xe^{-y}) \, dy = 0$
3. $\frac{y}{x} \, dx + (y^3 + \ln x) \, dy = 0$
4. $(2 - 9xy^2)x \, dx + (4y^2 - 6x^3)y \, dy = 0$
5. $\frac{3x^2+y^2}{y^2} \, dx - \frac{2x^3+5y}{y^3} \, dy = 0$
6. $2x(1 + \sqrt{x^2 - y}) \, dx - \sqrt{x^2 - y} \, dy = 0$

S. Riešte diferenciálne rovnice nájdením IF.

1. $(x^2 + y) \, dx - x \, dy = 0$
2. $(x^2 + y^2)(x \, dy - y \, dx) = (a + x)x^9 \, dx$
3. $(xy^2 + y) \, dx - x \, dy = 0$
4. $(2xy^2 - y) \, dx + (x + y + y^2) \, dy = 0$

T. Riešte diferenciálne rovnice nájdením IF.

1. $(x^2 + x^2y + 2xy - y^2 - y^3) \, dx + (-x^2 - x^3 + xy^2 + 2xy + y^2) \, dy = 0$
2. $(2x^3y^2 - y) \, dx + (2x^2y^3 - x) \, dy = 0$
3. $xy^2 \, dx + (x^2y - x) \, dy = 0$
4. $x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0$
5. $(xy - y) \, dx + (xy - x) \, dy = 0$

U. Ukážte, že homogénna diferenciálna rovnica $M \, dx + N \, dy = 0$, kde $Mx + Ny \neq 0$ a $N_x \neq M_y$ má IF v tvare $\mu = \frac{1}{Mx+Ny}$.

V. Ukážte, že diferenciálna rovnica $m(xy)y \, dx + n(xy)x \, dy = 0$, kde $m(xy)x - n(xy)y \neq 0$ a $(n(xy)x)_x \neq (m(xy)y)_y$ má IF v tvare $\mu = \frac{1}{m(xy)x-n(xy)y}$ a vyriešte rovnicu $(y - xy^2) \, dx - (x + x^2y) \, dy = 0$.

W. Na osi x sú v bodoch x_i bodové náboje e_i, $i = 1, \dots, n$. Elektrické siločiary v rovine xy sú určené diferenciálnou rovnicou

$$E_y(x,y)\,\mathrm{d}x - E_x(x,y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

pričom zložky intenzity elektického poľa sú dané podľa Coulombovho zákona výrazmi

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon}\sum_{i=1}^{n} e_i \frac{x - x_i}{((x-x_i)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon}\sum_{i=1}^{n} e_i \frac{y}{((x-x_i)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Použitím IF vyriešte rovnicu.

X. Zistite, či je funkcia rovnomerne spojitá na I.

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $I = [0, \infty)$
2. $f(x) = x^3$, $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \sin x$, $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \ln x$, $I = [1, \infty)$
5. $f(x) = \frac{1}{x}$, $I = (\alpha, \infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
6. $f(x) = g(x)\,h(x)$, I je ľub. a f, g sú rovnomerne spojité na I
7. $f(x)$ je kontrakcia, $I = M$ je metrický priestor (s metrikou d)