Jozef Kiseľák

Sada úloh na precvičenie III.
13. október 2014

A. Stanovte divergenciu vektorového poľa.

1. (x^2yz, xy^2z, xyz^2)
2. $(xy^2, 1, 1)$
3. $(y - z, z - x, x - y)$
4. $(\cos x \sin y, -\sin x \cos y)$
5. $\nabla(x^2 + y^2 + z^2)$
6. $(yze^{xy}, xze^{xy}, e^{xy} + 3\cos 3z)$

B. Stanovte rotáciu vektorového poľa.

1. $(x^2 + yz, y^2 + xz, z^2 + xy)$
2. $\nabla(x^2 + y^2 + z^2)$
3. (xyz, y, z)
4. $(xyz, y \sin z, y \cos x)$
5. $(\cos x - y \cos z, xy + y \sin z, -xz)$
6. $(z \cos x, \sin x + y, xyz)$

C. Nech $\mathbf{r}, r$ je polohový vektor, resp. jeho veľkosť, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sú konštantné vektory a $f \in C^1$. Vypočítajte:

1. $\operatorname{div}\left[\mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{b})\right]$
2. $\operatorname{div}\left[f(r)\mathbf{r}\right]$
3. $\operatorname{div}\left[r(\mathbf{a} \times \mathbf{r})\right]$
4. $\operatorname{rot}\left[\mathbf{a} \times \mathbf{r}\right]$
5. $\nabla\left(\dfrac{a e^{-br}}{r}\right)$
6. $\operatorname{rot}\left[\mathbf{a}\ \ln r\right]$
7. $\operatorname{rot}\left[\mathbf{a}\, r^n\right]$
8. $\Delta(\mathbf{a} \ln r)$
9. $\Delta(\Delta \ln r)$
10. $\operatorname{rot}\left[-\frac{k\mathbf{r}}{r^3}\right]$

D1. Nájdite funkciu $g \in C^1$ tak, aby vektorové pole $(2y, 2x + g(z), 3yf(z))$, kde $f \in C$ bolo nevírivé.

D2. V počiatku kartézskych súradníc je umiestnený bodový náboj Q.

1. **Aké bodové náboje Q_A, Q_B, Q_C musíme umiestniť do bodov $A = (3,0,0), B = (0,3,0), C = (0,0,4)$, aby náboj q v bode $X = (1,1,1)$ bol v rovnováhe ?**

2. **Bude táto rovnováha stabilná ?**

E. Nájdite rovnice plochy (anuloid, torus), ktorá vznikne rotáciou kružnice $(x-a)^2 + z^2 = r^2,\ y = 0,\ \ a > r > 0$, okolo osi o_z.

F. Nájdite parametrické vyjadrenie:

1. pseudosféry, ktorá vznikne rotáciou traktrisy $x = a\sin t,\ z = a\ln\tan(t/2) + a\cos t,\ y = 0$

2. katenoidu, ktorý vznikne rotáciou reťazovky $x = b\cosh(u/b),\ z = u,\ y = 0$

G. Vylúčením parametrov u, v nájdite rovnicu plochy.

1. $(a\cos^4 u\cos^4 v,\ a\cos^4 u\sin^4 v,\ a\sin^4 u)$

2. $(a\cos^3 u\cos^3 v,\ a\cos^3 u\sin^3 v,\ a\sin^3 u)$

3. $\left(a\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1},\ b\frac{2u}{u^2+v^2+1},\ c\frac{2v}{u^2+v^2+1}\right)$

H. Nájdite parametrické vyjadrenie danej plochy.

1. $x^2z^2 = 4(x^2+y^2)$

2. $z = x^2 - y^2$

3. $z = b\arctan(y/x)$

I. Nájdite parametrické a implicitné vyjadrenie kužeľovej plochy, ktorej vrchol je $(0,0,1)$ a vytvárajúca krivka je asteroida $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

J. Nájdite singulárne body plôch.

1. $x^2 + y^2 - \cos^2 z = 0$
2. (u^2, v^2, uv)
3. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$
4. $x^2 = y^2 z$
5. $(y - x^2)^2 = y^4$
6. $x = u(1 - u^2/3 + v^2)/3, \ \ y = -v(1 - v^2/3 + u^2)/3, \ \ z = (u^2 - v^2)/3.$

K. Nájdite dotykovú rovinu a normálu plôch v bode M.

1. $xzy = 27, \ M = (-1, 3, 9)$
2. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 27, \ M = (2, 3, 4)$
3. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^2 - y^2 + z^2), \ M = (1, 0, 1)$
4. $z = \arctan(y/x), \ M = (1, 1, \pi/2)$
5. $(\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u), \quad M = (1, \pi/2)$
6. $(u + v, u^2 + v^2, u^3 + v^3), \ M = (1, 1)$

L. Sú množiny A, B sú homeomorfné ?

1. $A = (a, b), \ B = (c, d)$
2. $A = \mathbb{R}, \ B = (-1, 1)$
3. $A = \mathbb{Z}, \ B = \mathcal{N}$
4. $A = (0, 1) \cup (3, 4), \ B = (0, 1) \cup (1, 2)$
5. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 = 1\}, \ B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

M. Ukážte, že množina je (nie je) (hladká) varieta.

1. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$
2. $C^* = \{(x, y, z) \in C : 0 < z < 1\}$
3. $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}$
4. $K \setminus \{(0, 0, 0)\}$
5. $x^2 + y^2 = z^2, \ x + y + z = 1$
6. Elipsoid v $\mathbb{R}^n$
7. Množina reálnych matíc s jednotkovým determinantom (v $\mathbb{R}^{n^2}$)
   hint: definujte zobr. $g : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$.
8. Povrch kocky

N. Transformujte rovnice do polárnych súradníc.

1. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y + kx(x^2 + y^2), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + ky(x^2 + y^2)$
2. $(xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2)$
3. $(x^2 + y^2)^2 y'' = (x + yy')^3$
4. $x\dfrac{\partial u}{\partial y} - y\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$
5. $\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0$
6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

O. Zavedením nových nezávislých premenných transformujte rovnice.

1. $x^4 y'' + xyy' - 2y^2 = 0$, ak je $x = \mathrm{e}^t,\ y = u\mathrm{e}^{2t}$, kde $u = u(t)$
2. $y'' + (x + y)(1 + y')^3 = 0$, ak je $x = u + t,\ y = u - t$, kde $u = u(t)$
3. $\left(x\,\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(y\,\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = r^2\,\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}$, ak je $x = u\mathrm{e}^w,\ y = v\mathrm{e}^w,\ z = w\mathrm{e}^w$
4. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{z}$, ak je $u = 2x - z^2,\ v = \frac{y}{z}$
5. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, ak je $u = \frac{x}{x^2+y^2},\ v = -\frac{y}{x^2+y^2}$
6. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, ak je $u = x + y,\ v = x - y,\ w = xy - z$

P. Zavedením nových nezávislých premenných riešte rovnice.

1. $z_x = z_y$, ak je $u = x + y,\ v = x - y$
2. $y\,z_x = x\,z_y$, ak je $u = x,\ v = x^2 + y^2$
3. $x\,z_x + y\,z_y = z$, ak je $u = x,\ v = \frac{y}{x}$
4. $(z_y)^2\,z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (z_x)^2 z_{yy} = 0$, ak je $x = u,\ y = v,\ z = w\ \ (u = u(v, w))$

R. V teórii elekromagnetického poľa sa zavádza skalárny potenciál $\phi(x, y, z, t)$ a vektorový potenciál $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ určujúce intenzitu elekrického poľa E a mageneticků indukciu B pomocou vzťahov

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},\ \ \mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}.$$

Ukážte, že sa veličiny E, B po tzv. kalibračnej transformácii

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t},\ \ \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\lambda,$$

kde $\lambda = \lambda(x, y, z, t)$ spĺňa podmienku derivovateľnosti tak, aby uvedené vzťahy maly zmysel. Formulujte tieto podmienky.