Jozef Kiseľák

Sada úloh na precvičenie IV.
10. november 2014

A1. Nech X je množina a $\mathcal{A}$ je systém všetkých konečných podmnožín množiny X. Udajte nutnú a postačujúcu podmienku nato, aby $\mathcal{A}$ bol σ-okruh.

A2. Ktoré zo systémov tvoria σ-algebru na $\mathbb{R}$?

1. $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : 0 \in A\}$
2. $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ je konečná}\}$
3. $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ alebo } A^c \text{ je konečná}\}$
4. $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ alebo} A^c \text{ je spočítateľná}\}$
5. $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ je otvorená}\}$
6. $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ je otvorená, alebo } A \text{ je uzavretá}\}$

A3. Zistite, či $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^*$, $\psi : 2^X \to \mathbb{R}^*$ je miera.

1. $\phi(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ 1, & A \neq \emptyset. \end{cases}$
2. Pre pevne zvolený bod $a \in \mathbb{R}^m$
   $\phi(A) = \begin{cases} 0, & a \notin A, \\ 1, & a \in A. \end{cases}$
3. $\phi(A) = \max(\mu_1(A), \mu_2(A))$, kde μ_i sú miery na $\mathbb{R}^m$
4. $\psi(E) = \begin{cases} \text{card} E, & E \text{ je konečná,} \\ \infty, & E \text{ je nekonečná,} \end{cases}$
   $X = \mathbb{N}$
5. Nech $m = 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesajúca a zľava spojitá. $\phi_f(\langle a, b)) = f(b) - f(a)$ pre každý interval $\langle a, b) \subset \mathbb{R}$.
6. $\phi(A) = \int_A e^{-|x|^2/2} \, dx$

A4. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s nezápornými členmi. Na σ-algebre $2^{\mathbb{N}}$ definujme funkciu takto $\mu(E) = \sum_{n \in E} a_n,\ E \in 2^{\mathbb{N}}$. Ukážte, že μ je miera.

A5. Ukážte, že $[x] = \sup\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\},\ \ x \in \mathbb{R}$ je merateľnou funkciou na $\mathbb{R}$.

A6. Spočítajte integrály.

1. $\int_{\mathbb{R}} x \,\mathrm{d}\mu(x)$, kde $\mu : 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$ je miera taká, že $\mu(\{\frac{1}{n}\}) = \frac{1}{n}$ a $\mu(E) = 0$, ak $E \cap \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}_0} = \emptyset$
2. $\int_{\mathbb{R}} (x^2 + 3)\chi_{[0,2]}(x) \,\mathrm{d}\mu(x)$, kde $\mu : 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$ je ščítacia miera, tj.

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & A \text{ je konečná} \\ +\infty & A \text{ je nekonečná} \end{cases}$$

3. $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ix} \,\mathrm{d}\mu(x)$, kde μ je komplexná miera $\mathrm{d}\mu(x) = (\cos(x) + i\sin(x)) \,\mathrm{d}x$
4. $\mathrm{E}[X] = \int_\Omega X \,\mathrm{d}F = \int_\Omega X(\omega)F(\mathrm{d}\omega)$, kde F je distribučná funkcia exponenciálneho rozdelenia, tj. $F(x;\lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$

B1. Ukážte, že $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq n \\ x - n, & x > n, \end{cases}$ konverguje (bodovo) na $\mathbb{R}$, ale nekonverguje rovnomerne ani v $\mathcal{L}^1$ norme.

B2. Ukážte, že platí.

1. $\mathrm{e}^{-x} \in \mathcal{L}_1(0,\infty)$
2. $\ln x \in \mathcal{L}_1(0,1)$
3. $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} \in \mathcal{L}_1(0,1)$
4. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$ konverguje
5. $\frac{1}{\ln x} \in \mathcal{L}_1^*(0,1) \setminus \mathcal{L}_1(0,1)$
6. $\sin^2 \frac{1}{x} \in \mathcal{L}_1(1,\infty)$
7. $\int_0^\infty x^{1/x}\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = \infty$
8. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} \in \mathcal{L}_1(0,1)$
9. $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$ konverguje
10. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\lambda_1(x)}{\mathrm{e}^x-\cos x} = \infty$
11. $\frac{x}{x^2+1} \notin \mathcal{L}_1^*(-\infty,\infty)$
12. $\frac{\cos x}{\sqrt{x}} \notin \mathcal{L}_1^*(0,\infty)$[a]

[a] Hint: Pre $k \in \mathbb{N}$ platí $x \in \left((2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+3)\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$

C. Zistite, pre ktoré hodnoty parametra $p \in \mathbb{R}$ konverguje integrál $\int_I f(x;p)\,\mathrm{d}\lambda_1$.

1. $f(x;p) = \mathrm{e}^{px},\ \ I = (-\infty, 0)$
2. $f(x;p) = \tan(x)^p,\ \ I = (0, \frac{\pi}{2})$
3. $f(x;p) = \frac{\ln(1+x)}{x^p},\ \ I = (0,\infty)$
4. $f(x;p) = \frac{x^p}{\sqrt{1-x^2}},\ \ I = (0,1)$

D. Dokážte, že

1. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = 0$
2. $\displaystyle \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = \frac{\pi^2}{6}$
3. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^7 \frac{\mathrm{e}^{x^3}}{1+nx}\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = 0$
4. $\displaystyle \int_0^1 \ln x \ln(1-x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = 2 - \frac{\pi^2}{6}$

E. Celkový počet fotónov v objeme V vyplnenom žiarením čierneho telesa je daný výrazom

$$N = (\pi^2 c^3)^{-1} V \int_0^\infty \frac{\omega^2}{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega}-1}\,\mathrm{d}\omega.$$

Vypočítajte tento integrál, ak viete, že $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} \approx 1.202.$

F. Pri výpočte termodynamických veličín pre elektrónový plyn sa stretneme s integrálom

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\mu + \alpha z} - \sqrt{\mu - \alpha z}}{\mathrm{e}^z + 1}\,\mathrm{d}z.$$

Ukážte, že konverguje.

G. Doba T kyvu matematického kyvadla, ktoré bolo vypustené z kľudu pri určitej začiatočnej výchylke závisí na hodnote začiatočnej výchylke ϕ_0. Zo zákona zachovania celkovej mechanickej energie zozstavte vyjadrenie pre dobu kyvu a za predpokladu, že výchylka je malá, nájdite prvý korekčný člen k výrazu $T = \pi\, l/g$, odvodzovaného za predpokladu veľmi malých kmitov.

H1. Nájdite nasledujúce limity.

1. $\lim\limits_{a\to 0} \int_a^{1+a} \frac{\mathrm{d}\lambda_1(x)}{1 + a^2 + x^2}$
2. $\lim\limits_{a\to 0} \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n \mathrm{e}^x}{n+1}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$
4. $\lim\limits_{a\to 0} \int_0^2 x^2 \cos(ax)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\lambda_1(x)}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x} \cos x\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$

H2. Ukážte, že nasledujúce funkcie sú spojité na uvedených oboroch.

1. $F(a) = \int_0^\infty \frac{x}{2 + x^a}\,\mathrm{d}\lambda_1(x),\ \ a > 2$
2. $F(a) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(x),\ \ a > 0$
3. $F(a) = \int_0^2 \frac{1}{|\ln x|^a}\,\mathrm{d}\lambda_1(x),\ \ a \in (-\infty, 1)$
4. $F(a) = \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^a}\,\mathrm{d}\lambda_1(x),\ \ a > 0$
5. $F(a) = \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(x),\ \ a \in \mathbb{R}$
6. $F(a) = \int_0^1 \ln(x^2 + a^2)\,\mathrm{d}\lambda_1(x),\ \ a > 0$

I1. Zistite všetky hodnoty, pre ktoré integrály konvergujú a spočítajte ich.

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan ax}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}\ln\left(\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right)\mathrm{d}\lambda_1(x)$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$
4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 ax}{x^3}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$
5. $\displaystyle\int_1^\infty x^{-a}\ln^n x\,\mathrm{d}\lambda_1(x),\ n\in\mathbb{N}_0$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(a+x^2)^n}\,\mathrm{d}\lambda_1(x),\ n\in\mathbb{N}$

I2. Ak je to možné, vypočítajte derivácie $F'(a)$ nasledujúcich funkcií.

1. $\displaystyle F(a)=\int_a^{a^2} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$
2. $\displaystyle F(a)=\int_0^1 \ln\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$
3. $\displaystyle F(a)=\int_0^a \frac{\ln(1+ax)}{x}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$
4. $\displaystyle F(a)=\int_{\sin a}^{\cos a} \mathrm{e}^{a\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$
5. $\displaystyle F(a)=\int_{a+c}^{a+d} \frac{\sin(ax)}{x}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$
6. $\displaystyle F(a)=\int_0^{a^2}\int_{x-a}^{x+a} \sin(x^2+y^2-a^2)\,\mathrm{d}\lambda_1(x,y)$

I3. Dokážte, že Besselova funkcia

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\phi-x\sin\phi)\,\mathrm{d}\phi,\ \ n\in\mathbb{N}$$

je riešením Besselovej rovnice $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0.$

J1. Vyšetrite priebeh funkcie.

1. $\displaystyle F(a)=\int_1^\infty \frac{\arctan ax}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$
2. $\displaystyle F(a)=\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$
3. $\displaystyle F(a)=\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^a}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$
4. $\displaystyle F(a)=\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ln|a+\mathrm{e}^x|\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$

J2. Vhodným zavedením parametra vypočítajte integrál.

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\lambda_1(\theta)$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\log(1+\sin\phi)}{\sin\phi}\,\mathrm{d}\lambda_1(\phi)$

K1. Spočítajte !

1. $\int_0^\infty \left(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\right)^2 \,dx$
2. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}} \cos bx \,dx$
3. $\int_0^\infty \frac{x \arctan(x/p)}{x^2+q^2} \,dx$
4. $\int_0^{\pi/2} \ln(1 + p\sin^2 x) \,dx$
5. $\int_0^1 \frac{(1-x^p)(1-x^q)}{\ln x} \,dx$

K2. Vypočítajte integrál

$$\int_0^1 x^{n-1} \ln^m x \,dx,$$

kde $m \in \mathbb{N}$ a ak viete, že

$$\int_0^1 x^{n-1} \,dx = \frac{1}{n},\ n > 0.$$

L. Dokážte, že funkcie Γ, B a ich derivácie sú pre $x > 0$ resp. $x > 0, y > 0$ spojité.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \,dt,$$

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \,dt.$$

M. Vyšetrite konvergenciu integrálov ($0 < m \le |\phi(x,y)| \le M < \infty$).

1. $\displaystyle\iint\limits_{|x|\le 1, |y|\le 1, x^2 \ne y} \frac{x^4 - y^2}{x^2 - y} \,d\lambda_2$
2. $\displaystyle\iint\limits_{|x|\le 1, y\le 1} \arctan(x^2+y^2) \,d\lambda_2$
3. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\ge 1} \frac{1}{|x|^p + |y|^q} \,d\lambda_2,\ p,q > 0$
4. $\displaystyle\iint\limits_{x+y\ge 1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} \,d\lambda_2$
5. $\displaystyle\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-1/(x^2+y^2+z^2)} \,d\lambda_3$
6. $\displaystyle\iint\limits_{0\le x\le y} e^{-x-y} \,d\lambda_2$
7. $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \cos(x^2+y^2) \,d\lambda_2$
8. $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|x|}{(1+y^2+x^2)^2} \,d\lambda_2$
9. $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{\phi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p} \,d\lambda_2$
10. $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_1 e^{-1/(x_1^2+\cdots+x_n^2)} \,d\lambda_n$

N. Nech $A = [0,1]^2$, vypočítajte

$\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)$, $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)$ $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$, kde

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{I}, \\ 1 - 1/q, & y \in \mathbb{Q} \wedge x = p/q, \text{ kde } p, q \text{ sú nesúdeliteľné.} \end{cases}$$

O. Nájdite množinu $A \subset \mathbb{R}^2$, pre ktorú platí

$$\int_A xy\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) = \int_0^1 \int_0^{f(y)} xy\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y),$$

kde $f(y) = \min(1, \ln(1/y))$.