Jozef Kiseľák

Sada úloh na precvičenie V.
12. november 2014

A. Preveďte nasledujúce integrály na jednoduché, ak $f \in C(\Omega)$.

1. $\iint\limits_{\Omega} f(x+y)\,\mathrm{d}\lambda_2,\ \ \Omega : |x| + |y| \leq 1$
2. $\iint\limits_{\Omega} f(xy)\,\mathrm{d}\lambda_2,\ \ \Omega : xy = 1,\ xy = 2,\ y = x,\ y = 4x$

B. Vypocítajte integrály na množine Ω.

1. $\iint\limits_{\Omega} xy^2\,\mathrm{d}\lambda_2,\ \ \Omega :\ \ y^2 = 2px,\ \ x = p/2,\ \ p > 0$
2. $\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{2a-x}}\,\mathrm{d}\lambda_2,\ \ \Omega :\ \ y = x = 0,\ \ x = 0,\ \ (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$
3. $\iint\limits_{\Omega} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\lambda_2,\ \ \Omega :\ \ \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$
4. $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{\lfloor y - x^2 \rfloor}\,\mathrm{d}\lambda_2,\ \ \Omega :\ \ x^2 \leq y \leq 4$
5. $\iint\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ \Omega :\ \ x^2 + y^2 \leq x$

C. Spočítajte obsahy rovinných plôch (ohraničených krivkami).

1. $x^2 + y^2 \geq a^2,\ (x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$
2. $y^2 = 2px + p^2,\ y^2 = -2qx + q^2,\ p, q > 0$
3. $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2,\ \ x, y > 0$
4. $xy = a^2,\ xy = 2a^2,\ y = x,\ y = 2x,\ \ x, y > 0$

D. Nájdite

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{\pi\rho} \iint\limits_{x^2+y^2\le\rho^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2,$$

kde f je spojitá funkcia.

E. Spočítajte obsah rovinnej plochy (ohraničených krivkami).

$$\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1,\ \ x = 0,\ \ y = 0$$

Hint: zovšeobecnené polárne súradnice

F. Spočítajte obsah rezu plochy $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=a^2$ rovinou $x+y+z=0$.

G. Určte tvary a rozmery telies, ktorých objemy sú dané takto:

1. $\iint\limits_{\substack{0\le x+y\le 1\\ x\ge 0, y\ge 0}} x+y\,\mathrm{d}\lambda_2$
2. $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} x^2+y^2\,\mathrm{d}\lambda_2$
3. $\iint\limits_{\substack{1\le x\le 2\\ x\le y\le 2x}} \sqrt{xy}\,\mathrm{d}\lambda_2$
4. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \sin\pi\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\lambda_2$

H. Spočítajte objemy telies (ohraničených plochami).

1. $z^2 = xy\ \ x^2+y^2=a^2$
2. $z = x^2+y^2,\ \ z = x+y$
3. $z = xy,\ \ x^2 = y,\ \ x^2 = 2y,\ \ y^2 = x,\ \ y^2 = 2x,\ \ z = 0$
4. $z = \sin\frac{\pi y}{2x},\ \ z = 0,\ \ y = x,\ \ y = 0,\ \ x = \pi$
5. $z = xy,\ \ z = 0,\ \ x+y+z = 1$
6. $z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2},\ \ z = 0,\ \ x^2+y^2 = R^2$

I. Spočítajte obsah časti torusu vymedzenej dvoma poludníkmi (ϕ_1, ϕ_2) a dvoma rovnobežkami (ψ_1, ψ_2). Aký je celkový povrch?

J. Spočítajte povrchy priestorových plôch.

1. $x^2+z^2 = a^2,\ \ y^2+z^2 = a^2$
2. $z^2 = 2xy,\ \ x+y = 1,\ \ x = 0,\ \ y = 0$
3. $(x^2+y^2)^{3/2}+z = 1,\ \ z = 0$
4. $x^2+y^2 = \frac{z^2}{3},\ \ x+y+z = 2a,\ \ a > 0$

K. Vypočítajte hmotnosť štvorcovej doštičky o veľkosti strany a, ak je hustota doštičky v každom jej bode priamo úmerná vzdialenosti tohto bodu od najbližšieho vrcholu a je rovná ρ_0 v strede štvorca.

L. Nájdite súradnice ťažiska kruhovej dosky s polomerom a, ak jej hustota je priamo úmerná vzdialenosti od bodu $(a, 0)$.

M. Guľa o polomere a je ponorená do tekutiny o konštanenj hustote ρ do hĺbky $h \geq a$ (od stredu gule). Vypočítajte tlakovú silu tekutiny na vrchnej a spodnej časti povrchu gule.

N. Určte príťažlivú silu homogénneho valca $x^2 + y^2 \leq a^2,\ 0 \leq z \leq h$, ktorá pôsobí na bod $(0, 0, b)$, ak je hmotnosť valca rovná M a hmotnosť bodu m.

O. Vypočítajte momenty zotrvačnosti I_x, I_y homogénnej dosky (ohraničenej krivkami).

1. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$
2. $xy = a^2,\ \ xy = 2a^2,\ \ x, y, a > 0$
3. $r = a(1 + \cos\phi),\ \phi \in [0, 2\pi]$

P. Vypočítajte integrály na množine Ω (ohraničenej plochami).

1. $\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3 \,\mathrm{d}\lambda_3,\ \ \Omega:\ \ z = xy,\ \ y = x,\ \ x = 1,\ \ z = 0,\ \ y = 0$
2. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} \,\mathrm{d}\lambda_3,\ \ \Omega:\ \ x + z + y = 1,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0$
3. $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{-P(x_1,x_2,x_3)} \,\mathrm{d}\lambda_3,\ \ \Omega = \mathbb{R}^3$ a $P(x_1, x_2, x_3) = \sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$ je poz. definitná kvadratická forma
4. $\iiint\limits_{\Omega} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}\lambda_3,\ \ \Omega:\ \ x^2 + y^2 = 2z,\ \ z = 2$

Q. Rozdelenie tlaku telesa na plochu prítlaku $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$ je dané vzťahom $p = p_0(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)$. Určite stredný tlak telesa na túto plochu.

R. Vypočítajte objemy telies (ohraničených plochami).

1. $z = x + y,\ z = xy,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0$
2. $z = 6 - x^2 + y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$
4. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2,\ x^2 + y^2 = z^2,\ z \geq 0,\ 0 < a < b$
5. $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^4/c^4 = 1$

S. Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénneho valca $x^2 + y^2 \leq a^2,\ \ z = \pm h$ o hustote ρ_0 vzhľadom k priamke $x = y = z$.

T. Vypočítajte súradnice ťažiska kocky $0 \leq x, y, z \leq 1$ pri hustote $\rho(x, y, z) = x^{\frac{2a-1}{1-a}} y^{\frac{2b-1}{1-b}} z^{\frac{2c-1}{1-c}},\ a, b, c \in (0, 1)$.

U. Vypočítajte potenciál dutej gule $R_1^2 \leq \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R_2^2$ v bode (x, y, z), ak jej hustota je $\rho = f(R)$, kde $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ a f je integrovateľná funkcia.

V. Spočítajte objem $m-$rozmernej gule.

W. Spočítajte integrály.

1. $\displaystyle\iint\limits_{xy\geq 1, x\geq 1} x^{-p} y^{-q}\, \mathrm{d}\lambda_2,\ p > q > 1$
2. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{x+y\geq 1\\ 0\leq x\leq 1}} (x + y)^{-p}\, \mathrm{d}\lambda_2,\ p > 1$
3. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, \mathrm{d}\lambda_2$
4. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leq x} \frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\sqrt{x^2+y^2}}$
5. $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geq 1} \frac{\mathrm{d}\lambda_3}{(x^2+y^2+z^2)^3}$
6. $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq 1} \frac{\mathrm{d}\lambda_3}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$
7. $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\lambda_3}{x^p y^q z^r}$
8. $\displaystyle\iiint\limits_{\substack{x,y,z\geq 0\\ x^2+y^2+z^2\leq r^2}} \frac{xyz\, \mathrm{d}\lambda_3}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}},\ a > b > c > 0$

X. Spočítajte integrály.

1.
$$\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \, \mathrm{d}\lambda_n$$

2.
$$\underset{\substack{x_i \geq 0,\ i=1,\dots,n \\ x_1+x_2+\dots+x_n \leq 1}}{\iint \dots \int} \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \, \mathrm{d}\lambda_n$$