Jozef Kiseľák

Sada úloh na precvičenie VI.
25. november 2014

A. Spočítajte krivkové integrály 1. druhu .

1. $\int\limits_C y^2 \, \mathrm{d}s$, kde C je oblúk cykloidy $(t \in [0, 2\pi])$
2. $\oint\limits_C |y| \, \mathrm{d}s$, kde C je lemniskata
3. $\oint\limits_C \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}} \, \mathrm{d}s$, kde C je vytvorená krivkami $r = a, \phi = 0, \phi = \pi/4$, pričom je hranicou konvexnej oblasti
4. $\int\limits_C \frac{1}{y^2} \, \mathrm{d}s$, kde C je reťazovka $y = a \cosh(x/a)$
5. $\int\limits_C x \, \mathrm{d}s$, kde C je časť logaritmickej špirály $r = a\mathrm{e}^{k\phi}, k > 0$, ktorá je vo vnútri kruhu $r \leq a$
6. $\oint\limits_C (x + y) \, \mathrm{d}s$, kde C je obvod trojuholníka ABC, $A = (0, 0),\ B = (1, 0),\ C = (0, 1)$
7. $\int\limits_C xy \, \mathrm{d}s$, kde C je oblúk hyperboly $x = a \cosh t,\ \ y = a \sinh t,\ \ t \in [0, t_0],\ a > 0$

B. Spočítajte krivkové integrály 1. druhu .

1. $\int\limits_C x^2 + y^2 + z^2 \, ds$, kde C je časť skrutkovice $\mathbf{r} = (a \cos t, a \sin t, bt), t \in [0, 2\pi]$
2. $\int\limits_C z \, ds$, kde C je kužeľová skrutkovica $\mathbf{r} = (t \cos t, t \sin t, t), t \in [0, t_0]$
3. $\int\limits_C z \, ds$, kde C je oblúk krivky $x^2 + y^2 = z^2, y^2 = ax$ od bodu $(0, 0, 0)$ k bodu $(a, a, a\sqrt{2})$
4. $\int\limits_C \frac{z^2}{x^2+y^2} \, ds$, kde C je oblúk skrutkovice $\mathbf{r} = a(\cos t, \sin t, t), t \in [0, 2\pi]$
5. $\oint\limits_C x^2 \, ds$, kde krivka C je prienik plôch $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \;\; x + y + z = 0$

C. Spočítajte krivkové integrály 2. druhu.

1. $\oint\limits_C (x^2 + y^2, x^2 - y^2) \cdot (\,dx, \,dy)$, kde C je obvod trojuholníka $ABC, A = [0, 0], B = [1, 0], C = [0, 1]$ s orientáciou v smere ABC
2. $\oint\limits_C \frac{dx + \,dy}{|x|+|y|}$, kde C je obvod štvorca $ABCD, A = [1, 0], B = [0, 1], C = [-1, 0], D = [0, -1]$ s orientáciou v smere $ABCD$
3. $\int\limits_C \frac{x^2 \,dy - y^2 \,dx}{x^{5/3}+y^{5/3}}$, kde C je oblúk asteroidy od bodu $A = [a, 0], B = [0, a]$
4. $\oint\limits_C (x + y) \,dx + (x - y) \,dy$, kde C je kladne orientovaná elipsa
5. $\int\limits_C (2a - y) \,dx + x \,dy$, kde C je úsek cykloidy $x = a(t - \sin t), \;\; y = a(1 - \cos t), \;\; t \in [0, 2\pi]$

D. Spočítajte krivkové integrály 2. druhu.

1. $\int\limits_C (x, y, xz - y) \cdot (\,\mathrm{d}x,\, \mathrm{d}y,\, \mathrm{d}z)$, kde C je oblúk krivky $\mathbf{r} = (t^2, 2t, 4t^3)$ od bodu $A = [0, 0, 0]$ po bod $B = [1, 2, 4]$
2. $\oint\limits_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, kde C je priesečnica plôch $z = xy,\ x^2 + y^2 = 1$ a body $A = [1, 0, 0], B = [0, 1, 0], C = [-1, 0, 0]$ tvoria jej orientáciu
3. $\oint\limits_C y^2\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z$, kde C je časť Vivianiho krivky $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax, z \geq 0, a > 0$ a body $A = [a, 0, 0], B = [a/2, a/2, a/\sqrt{2}], D = [0, 0, a]$ tvoria jej orientáciu
4. $\oint\limits_C (y - z)\,\mathrm{d}x + (z - x)\,\mathrm{d}y + (x - y)\,\mathrm{d}z$, kde krivka C je prienik $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ y = x\tan\alpha,\ \alpha \in (0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$, a je orientovaná proti smeru hodinových ručičiek pri pohľade zo strany kladných hodnôt x

E. Spočítajte.

1. $\int\limits_A^B x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$, kde $A = [-1, 2], B = [2, 3]$
2. $\int\limits_A^B \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2}$, kde $A = [2, 1], B = [1, 2]$
3. $\int\limits_A^B \mathrm{e}^x(\cos y\,\mathrm{d}x - \sin y\,\mathrm{d}y)$, kde $A = [0, 0], B = [a, b]$
4. $\int\limits_A^B f(x + y)(\,\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y)$, kde $A = [0, 0], B = [a, b]$, kde f je spojitá
5. $\int\limits_A^B (x^4 + 4xy^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\,\mathrm{d}y$,kde $A = [-2, -1], B = [3, 0]$
6. $\int\limits_A^B \frac{x}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{2x+y}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}y$, kde $A = [1, 1], B = [3, 2]$
7. $\int\limits_A^B 2y\sin 2x\,\mathrm{d}x - \cos 2x\,\mathrm{d}y$, kde $A = [\pi/4, 2], B = [\pi/6, 1]$

F. Spočítajte.

1. $\int\limits_A^B x\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y - z^3\,\mathrm{d}z$, kde $A = [1,1,1], B = [2,3,-4]$

2. $\int\limits_A^B yz\,\mathrm{d}x + zx\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$, kde $A = [1,2,3], B = [6,1,1]$

3. $\int\limits_A^B \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, kde A leží na sfére $x^2+y^2+z^2 = a^2$ a bod B leží na sfére $x^2+y^2+z^2 = b^2$, $a, b > 0$

G. Nájdite funkciu u, ak jej totálny diferenciál $\mathrm{d}u$ je:

1. $\mathrm{d}u = (x^2 + 2xy - y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 - 2xy - y^2)\,\mathrm{d}y$

2. $\mathrm{d}u = \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

3. $\mathrm{d}u = (2x\cos y - y^2 \sin x)\,\mathrm{d}x + (2y\cos x - x^2 \sin y)\,\mathrm{d}y$

4. $\mathrm{d}u = \frac{yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z}{1 + x^2y^2z^2}$

5. $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^y(x - y + 2) + y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^y(x - y) + 1)\,\mathrm{d}y$

H. Ukážte, že

$$I_R = \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2} \to 0.$$

I1. Vypočítajte hodnotu logaritmického potenciálu jednoduchej vrstvy

$$u(x,y) = \oint\limits_{\gamma} \kappa \ln \frac{1}{r}\,\mathrm{d}s,$$

kde $\kappa > 0, r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ a krivka γ je $\xi^2 + \eta^2 = R^2$ orientovaná klasicky.

I2. Vypočítajte súradnice ťažiska homogénnej krivky

$$\mathbf{r} = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t), \ t \in (-\infty, 0].$$

J1. Nájdite statické momenty krivky $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \ x, y \geq 0$ vzhľadom k súradnicovým osiam.

J2. Drôt má tvar kružnice $x^2 + y^2 = a^2$. Nájdite jeho moment zotrvačnosti vzhľadom na jeho priemer, ak jeho lineárna hustota je $\rho(x, y) = |x| + |y|$.

K. Sila, ktorej veľkosť je nepriamo úmerná vzdialenosti bodu od roviny xy, smeruje do začiatku súradnicového systému. Vypočítajte prácu tejto sily, keď sa hmotný bod pohybuje po úsečke $(at, bt, ct), \ t \in [1, 2]$.

L. Spočítajte gravitačnú silu, ktorou pôsobí homogénna polkružnica s polomerom R a celkovou hmotnosťou M na HB s hmotnosťou m ležiaci v jej strede.

M. Nájdite prácu po časti elipsy v 1. kvadrante, prebiehanej proti smeru hodinových ručičiek, ak na jej body pôsobí centrálna sila (smer. do počiatku), ktorej veľkosť je úmerná vzdialenosti od počiatku.