Jozef Kiseľák

Sada úloh na precvičenie VII.
December 20, 2019

A1. Pomocou Greenovej vety spočítajte krivkové integrály.

1. $$\oint_C (x+y)^2 \, \mathrm{d}x - (x^2+y^2) \, \mathrm{d}y,$$

   kde C je trojuholník ABC, $A = [1,1]$, $B = [3,2]$, $C = [2,5]$ s orientáciou v kladnom smere

2. $$\oint_C xy^2 \, \mathrm{d}y - x^2 y \, \mathrm{d}x,$$

   kde C je $x^2 + y^2 = a^2$

3. $$\oint_C \mathrm{e}^{-x^2-y^2} (\cos 2xy \, \mathrm{d}x + \sin 2xy \, \mathrm{d}y),$$

   kde C je $x^2 + y^2 = R^2$

4. $$\oint_C (x+y) \, \mathrm{d}x - (x-y) \, \mathrm{d}y,$$

   kde C je elipsa

5. $$\int_{p(AO)} (\mathrm{e}^x \sin y - my) \, \mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - m) \, \mathrm{d}y,$$

   kde $p(AO)$ je horná polkružnica $x^2 + y^2 = ax$ z bodu $A = (a, 0)$ do bodu $O = (0, 0)$[a]

[a] Hint: uzavrite krivku vhodným spôsobom

A2. Použitím krivkových integrálov vypočítajte obsahy daných uzavretých plôch.

1. $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$
2. $(x+y)^2 = ax,\ a>0,$ os x
3. $x^3+y^3 = x^2+y^2,$ os $x,$ os y
4. $(x+y)^{n+m+1} = ax^n y^m,\ a,n,m>0$
5. $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1},\ a,b>0,\ n>1$

B. Spočítajte plošné integrály 1. druhu .

1. $\iint\limits_S x+y+z\,\mathrm{d}S$, kde S je plocha $x^2+y^2+z^2=a^2,\ z\geq 0$
2. $\iint\limits_S x^2+y^2\,\mathrm{d}s$, kde S je povrch telesa $\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1$
3. $\iint\limits_S \frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$, kde S je povrch telesa $x+y+z\leq 1,\ x,y,z\geq 0$
4. $\iint\limits_S |xyz|\,\mathrm{d}S$, kde S je plocha $z=x^2+y^2,\ z=1$
5. $\iint\limits_S \frac{\mathrm{d}S}{h}$, kde S je elipsoid a h je vzdialenosť jeho stredu od dotykovej roviny v bode $\mathrm{d}S$
6. $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S$, kde S je $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=v,\ \ u\in(0,a),\ v\in(0,2\pi)$
7. $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S$, kde S je časť plochy $x^2+z^2=2az,\ a>0$, vymedzená plochou $z=\sqrt{x^2+y^2}$

C1. Vypočítajte hmotnosť časti paraboloidu $2z=x^2+y^2,\ z\in[0,1]$ **o hustote** $\rho=z$**.**

C2. Vypočítajte momenty zotrvačnosti trojuholníkovej dostičky $x+y+z=1,\ x,y,z\geq 0$ **vzhľadom k súradnicovým rovinám.**

C3. Vypočítajte polárne momenty zotrvačnosti plochy S_i, $i = 1,2$, tj. $\iint\limits_{S_i}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$, ak $S_1 : \max\{|x|,|y|,|z|\} = a$, $S_2 : x^2+y^2 \le R^2$, $0 \le z \le H$.

D1. Vypočítajte $F(t) = \iint\limits_{U} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$.

1. $f(x,y,z) = \begin{cases} 1-x^2-y^2-z^2, & \text{pre } x^2+y^2+z^2 \le 1 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$ a $U : x+y+z = t$

2. $f(x,y,z) = \begin{cases} x^2+y^2, & \text{pre } z \ge \sqrt{x^2+y^2} \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$ a $U : x^2+y^2+z^2 = t^2$

D2. Približne vypočítajte povrch časti zemegule, $R \doteq 6400$ km, vymedzený poludníkmi 0°, 30° v.d. a rovnobežkami 45°, 60° s.š.

E. Spočítajte plošné integrály 2. druhu .

1. $\iint\limits_{S} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je (vonk.) povrch sféry $x^2+y^2+z^2 = a^2$
2. $\iint\limits_{S}(y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je (vonk.) povrch telesa $x^2+y^2 = z^2$, $z \in [0,h]$
3. $\iint\limits_{S} \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x} + \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{y} + \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z}$, kde S je (vonk.) povrch elipsoidu
4. $\iint\limits_{S} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je (vonk.) povrch sféry $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$
5. $\iint\limits_{S} \mathbf{f}\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{S}$, kde $\mathbf{f} = (x^2,y^2,z^2)$ a S je (vonk.) povrch kocky $[0,6]^3$
6. $\iint\limits_{S} \mathbf{f}\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{S}$, kde $\mathbf{f} = (x,y,xyz)$ a $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy \wedge x^2+y^2 \le 5\}$ je orientovaná pomocou normálových vektorov "zvierajúcich" s vektorom $(0,0,1)$ ostrý uhol
7. $\iint\limits_{S} f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + g(y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + h(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde f,g,h sú spojité funkcie a S je (vonk.) povrch telesa $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$

F. Priamym výpočtom overte, že Stokesova veta neplatí pre vektorové pole $\mathbf{F} = \frac{-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}}{x^2+y^2}$ a ľubovoľnú horizontálnu kružnicu so stredom ležiacim na osi z. Čo nie je splnené?

G. Pomocou Stokesovej vety spočítajte krivkové integrály.

1. $$\oint_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z,$$

   kde C je kružnica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x + y + z = 0$

2. $$\oint_C (y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}z,$$

   kde C je prienik kocky $[0, a]^3$ a roviny $x + y + z = \frac{3a}{2}$ kladne orientovaný vzhľadom k vektoru $(1, 1, 1)$

3. $$\oint_C y^2z^2\,\mathrm{d}x + x^2z^2\,\mathrm{d}y + x^2y^2\,\mathrm{d}z,$$

   kde C je krivka $(a\cos t, a\cos 2t, a\cos 3t)$ s orientáciou v smere rastu t

4. $$\oint_C (y - z)\,\mathrm{d}x + (z - x)\,\mathrm{d}y + (x - y)\,\mathrm{d}z,$$

   kde C je elipsa $x^2 + y^2 = a^2,\ x/a + z/h = 1,\ \ a, h > 0$ orietnovaná proti smeru hodniových ručičiek vzhľadom ku kladnej časti osi x

5. $$\oint_C (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2 + x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}z,$$

   kde C je prienik $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx,\ x^2 + y^2 = 2rx,\ \ 0 < r < R,\ z > 0$

6. $$\oint_C (x^2 - yz)\,\mathrm{d}x + (y^2 - xz)\,\mathrm{d}y + (z^2 - xy)\,\mathrm{d}z,$$

   kde C je oblúk $\overset{\frown}{AB}$ skrutkovice $(a\cos t, a\sin t, \frac{ht}{2\pi}),\ \ A = (a, 0, 0),\ B = (a, 0, h)$[a]

[a] Hint: vhodne doplňte krivku na uzavretú

H. Priamym výpočtom overte, že veta o divergencii neplatí pre vektorové pole $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{e}_r}{r}$ v cylindri s polomerom R a výškou H. Čo nie je splnené?

I. Pomocou vety o divergencii spočítajte.

1. $\iint\limits_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je (vonk.) strana kocky v počiatku o strane $2a$
2. $\iint\limits_S x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je (vonk.) strana sféry $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
3. Objem telesa ohraničeného plochou $(u\cos v, u\sin v, -u + a\cos v)$, $u \geq 0$ a rovinami $x = 0$, $z = 0$
4. Tok kvapaliny cez bočné steny štvorstena $ABCD$ s podstavou ABC, $A = [0,0,0]$, $B = [2,0,0]$, $C = [0,1,0]$, $D = [0,0,2]$. Steny sú orientované v smere vonkajšej normály a vektor prúdenia je (yz, zx, xy).
5. $\iint\limits_S \left(\mathrm{e}^{\cos z} + 3xy^2, \frac{1}{10-\sin x} + 3x^2y, \sin \mathrm{e}^y + z^3\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, kde S je (vonk.) strana plochy: $x^2 + y^2 \leq 4$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 8$ and $z \geq -2$

J. Variety vo vyšších dimenziách.

1. Majme 2D singulárnu kocku v 4D $C: x = r^2 - s^2, y = r^2 + s^2, z = r - s, w = r + s,\ \ [r, s] \in [0, 1]^2$. Spočítajte jej obsah a $\int_{\partial C} xy\,\mathrm{d}y + zw\,\mathrm{d}w$.
2. Nech $M : x^2 + y^2 = z^2 + w^2 = 1$ (torus). Spočítajte $\int_{\partial M} xyzw\,\mathrm{d}S$.
3. Nech $M : z = x^2 - y^2,\ w = 2xy,\ x^2 + y^2 \leq 1$. Spočítajte jej povrch.
4. Nech $M : 1 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2,\ ax^2 + y^2 + z^2 = w^2,\ a > 0$. Spočítajte jej povrch.
5. Nech $M : x^2 + y^2 + z^2 < w^2, 0 < w < 1$. Spočítajte $\int_{\partial M}(y + w)\,\mathrm{d}S$ a $\int_{\partial M}(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)\,\mathrm{d}S$.
6. Nech $p_k > 0$ a $M : \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1,\ x_k \geq 0$. Spočítajte
$$4\int_M \prod_{k=1}^{n} x_k^{2p_k - 1}\,\mathrm{d}S.$$
7. Nech $M : x^2 + y^2 = R^2, |z| \leq h, |w| \leq h,\ R, h > 0$ (cubinder bez podstáv), $\mathbf{F} = (x, y, z, w)$. Spočítajte
$$\int_M \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$