1 Vlastnosti kriviek

Krivka k je zadaná buď implicitne, teda ako množina bodov

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

alebo parametricky, t.j. ako obor hodnôt zobrazenia $\mathbf{r}(t), t \in I$. Krivka k je **neohraničená**, ak $\forall C > 0$ existuje $P \in k : \rho(O, P) > C$. Ak nie je neohraničená je **ohraničená**. Napr. ľahko sa ukáže, že Bernoulliho lemniskáta $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ je ohraničená krivka. Naozaj v polárnych súradniciach je to $\rho^4 = 2a^2\rho^2 \cos(2\phi) \leq 2a^2$.

Asymptota krivky k je priamka p, pre ktorú platí, že existuje $k_1 \subset k$ taká, že

$$\lim_{n\to\infty} \rho(P_n, p) = 0,$$

pre každú postupnosť $\{P_n\}$ bodov k_1, pre ktorú je

$$\lim_{n\to\infty} \rho(P_n, O) = \infty.$$

Bod $\mathbf{x}_0 = \mathbf{r}(t_0) \in k$ je **Singulárny**, ak $\mathrm{rank}(\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)) < n - 1$, resp. $\mathbf{r}'(t_0) = 0$.

V prípade planárnych kriviek ($n = 2$) rozlišujeme viacero typov singulárnych bodov. Singulárny bod P krivky k je bodom **vratu** 1. [2.] druhu, ak v každom jeho dostatočne malom okolí ležia bodu krivky k po oboch stranách [po jednej strane] dotyčnice a po jednej strane normály. Singulárny bod P krivky k je **inflexným** [obyčajným] bodom, ak v každom jeho dostatočne malom okolí ležia bodu krivky k po oboch stranách [po jednej strane] dotyčnice a po oboch stranách normály. Singulárny bod P krivky k je bodom **samodotyku**, ak v každom jeho dostatočne malom okolí ležia bodu krivky k po jednej alebo oboch stranách dotyčnice a po oboch stranách normály. Singulárny bod P krivky k je **uzlom**, ak má krivka v ňom dve rôzne dotyčnice.

1.1 SB - Parametricky dané krivky

Majme bod $P = \mathbf{r}(t_0), t_0 \in I$. Nech n je rád 1. nenulovej derivácie $\mathbf{r}^{(n)}(t_0)$ a p je rád prvej z derivácií $\mathbf{r}^{(p)}(t_0)$, $p > n$, pre ktorú $\mathbf{r}^{(n)}(t_0)\,\mathbf{r}^{(p)}(t_0) \neq 0$, potom pre

- n je párne, p nepárne ide o bod vratu 1. druhu;
- n je párne, p párne ide o bod vratu 2. druhu;
- n je nepárne, p nepárne ide o inflexný bod;
- n je nepárne, p párne ide o obyčajný bod;

1.2 SB - Implicitne dané krivky

Ak $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0$ a $A := F_{xx}(P), B := F_{xy}(P), := F_{yy}(P),\ \Delta = AC - B^2$. Potom

- ak $\Delta < 0$, bod P je uzol;
- ak $\Delta > 0$, bod P je izolovaný;
- ak $\Delta = 0$ a
  - $\det R(P) \neq 0$, P je bod vratu 1. druhu;
  - $\det R(P) = 0$, P môže byť bodom vratu 2. druhu, bodom samodotyku alebo izolovaným bodom;

$$R = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & F_{xx} & F_{xy} & F_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & F_{xx} & F_{xy} & F_{yy} \\ F_{xxx} & F_{xxy} & F_{xyy} & F_{yyy} & 0 \\ 0 & F_{xxx} & F_{xxy} & F_{xyy} & F_{yyy} \end{pmatrix}.$$

1.3 Asymptoty - Implicitne dané krivky

- Pre neohraničenú krivku je priamka $ax + by + c = 0$ asymptotou vtedy a len vtedy, ak
  $$F(x, y) = ax + by + c + G(x, y),$$
  pričom $\lim G(x, y) = 0$ pre $x \to \pm\infty, y \to b$, resp. $x \to a, y \to \pm\infty$, resp. $x \to \pm\infty, y \to \pm\infty$.

1.4 Extrémy - Implicitne dané krivky

Body krivky $k : F(x, y) = 0$, pre ktoré $F_x(x, y) = 0, F_y(x, y) \neq 0$ majú dotyčnicu rovnobežnú s osou O_x. V nich navyše $y''(x) = -\dfrac{F_{xx}(x, y)}{F_y(x, y)}$. Body krivky $k : F(x, y) = 0$, pre ktoré $F_y(x, y) = 0, F_x(x, y) \neq 0$ majú dotyčnicu rovnobežnú s osou O_y. V nich navyše $x''(y) = -\dfrac{F_{yy}(x, y)}{F_x(x, y)}$.