Písomné overenie vedomostí - ZS 2022/2023

Meno a priezvisko:
Skratka predmetu: MAN3c

Dátum: 4.11.2022
Maximálny počet bodov: 40b

(1) Zavedením nových premenných $u = x^2 + y^2$, $v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, $w = \ln(z) - (x + y)$ nájdite riešenie rovnice

$$y\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - x\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (y - x)z,$$

s podmienkou $z(x, x) = \mathrm{e}^x$. [10b]

(2) Majme krivku danú implicitne rovnicou $4(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + 2x)^2$. Ukážte, že je ohraničená (celá leží v nejakom kruhu), nakreslite ju a nájdite jej dotyčnice v bodoch $[-4, 0]$ a $[0, 2]$. [8b]

(3) Nájdite integračný faktor a riešenie Cauchyho úlohy

$$\begin{cases} (x^2 y - y\sin^2(y))\,\mathrm{d}x + xy\sin(2y)\,\mathrm{d}y = 0, \\ y(1) = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

[8b]

(4) (i) Nech h je harmonická funkcia na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, kde Ω je otvorená. Nájdite všetky funkcie f tak, aby $f(h)$ bola tiež harmonická na Ω.

(ii) Nájdite všetky funkcie g tak, aby $\operatorname{div}\left(g(r)\,\dfrac{\vec{r}}{r}\right) = 0$, $\vec{r} = (x, y)$ na $\Omega \setminus \{(0, 0)\}$.

(iii) Spočítajte $\operatorname{rot}(\mathbf{a}\,\arctan(r))$, kde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ a $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

[9b]

(5) Majme $X = C(\mathbb{R})$. Ukážte,že $f_n(x) = x^n$ nekonverguje rovnomerne na $[0, 1]$ ale konverguje tam v integrálnej norme $\left(||\cdot|| = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\cdot|\,\mathrm{d}x\right)$. Čo z toho vyplýva? [5b]

Úloha	(1) [10b]	(2) [8b]	(3) [8b]	(4) [9b]	(5) [5b]	$\sum = 40$b
Získané body						$\sum =$

Svoje tvrdenia je nutné zdôvodniť!