

**A. Rozhodnite, či rovnica definuje (jednoznačne) implicitne funkciu  $y = f(x)$  v okolí bodu  $(a_1, a_2)$ . Ak áno, nájdite tam jej deriváciu.**

$$1. y'(2) = \frac{x+y}{y-x} \Big|_{(2,0)} = -1$$

$$2. y'(0) = \frac{e^{2x} \cos y \cos y - e^{2y} \cos x \sin x}{x \sin y e^{2x} \cos y - \cos x e^{2y} \cos x} \Big|_{(0,0)} = -1$$

3. nie<sup>a</sup>

$$4. \text{ pre } a_1 \neq 2a_2, y'(a_1) = \frac{e^{a_1(1+a_1)-a_2}}{2a_2+a_1}$$

$$5. y'(1) = \frac{y(x^y y - y^x x \ln y)}{x(y^x x - x^y y \ln x)} \Big|_{(1,1)} = 1$$

6. nie

<sup>a</sup>Pre limity je  $y(0^+) = 0^-$  a  $y'(0^+) = -\infty$ .

**B. Vypočítajte parciálne derivácie druhého rádu funkcie  $z(x, y)$  implicitne zadanej vzťahmi:**

$$1. z_{xx} = -\frac{z^2+x^2}{z^3}, z_{yy} = -\frac{z^2+y^2}{z^3}, z_{xy} = -\frac{yx}{z^3}$$

$$2. z_{xx} = -\frac{e^z}{(e^z-1)^3}, z_{yy} = -\frac{e^z}{(e^z-1)^3}, z_{xy} = -\frac{e^z}{(e^z-1)^3}$$

$$3. z_{xx} = \frac{2y^3xz}{(xy-z^2)^3}, z_{yy} = \frac{2x^3yz}{(xy-z^2)^3}, z_{xy} = \frac{z(2z^2xy-z^4+x^2y^2)}{(xy-z^2)^3}$$

$$4. z_{xx} = -\frac{zy^2}{(x^2-y^2)^2}, z_{yy} = -\frac{zx^2}{(x^2-y^2)^2}, z_{xy} = \frac{xyz}{(x^2-y^2)^2}$$

**D. Napíšte rovnice dotykových rovín.**

$$x + 4y + 6z \pm 21 = 0$$

**E. Určte rovnicu dotyčnice a normály.**

$$-x + y = 1, x + y = 3$$

**F. Nájdite dotykový vektor ku krivke.**

$$[-1, 1, 0] \text{ (nenormovaný)}$$

**G. Nájdite lineárnu aproximáciu funkcie  $z(x, y)$ .**

$$z(x, y) \approx 2 - \frac{2}{11}(x-1) - \frac{1}{11}(y-1)$$

**H. Rozhodnite, či rovnice definujú (jednoznačne) implicitne funkcie  $y = f(x)$ ,  $z = g(x)$  v okolí bodu  $(a_1, a_2, a_3)$ . Ak áno, nájdite tam ich derivácie.**

1.  $y'(1) = \frac{x+2z}{y(1+2z)} \Big|_{(1,1,1)} = 1$ ,  $z'(1) = \frac{2(1-x)}{1+2z} \Big|_{(1,1,1)} = 1=0$
2. nie
3.  $-y'(1) = \frac{x^2+z^2}{y^2+z^2} \Big|_{(1,1,-2)} = 1$ ,  $z'(1) = \frac{y^2-x^2}{y^2+z^2} \Big|_{(1,1,-2)} = 0$
4. nie

**I. Nájdite krivosť nasledujúcich kriviek.**

1.  $\frac{4\sqrt{(y+x)^2+(x+2)^2-2}}{|a|(2+y+x)^2}$ , kde  $x = e^{2t/a} = 1/y$
2.  $\frac{|\cos t - \sin t - 1|}{|a|2^{(3/2)}(1 - \cos t + \sin t)^{(3/2)}$ ,  $a \neq 0$
3.  $\frac{2ab|\cos t \sin^3 t(3-4\cos^2 t)|}{(a^2+b^2 \sin^4 t(1-2\sin^2 t)^2)^{(3/2)}$
4.  $\frac{1}{3|a \sin(t)|}$ ,  $a \neq 0$

**J. Nájdite krivosť a torziu nasledujúcich kriviek.**

1.  $\kappa = \frac{2\sqrt{1+9t^2+9t^3}}{(1+4t^2+9t^3)^{3/2}}$ ,  $\tau = \frac{3}{1+9t^2+9t^3}$ ,  $t$  nie je koreňom menovateľov
2.  $\kappa = \frac{2\sqrt{3\cos^2(t/2)+17}}{|a|(4+\cos^2(t/2))^{(3/2)}}$ ,  $\tau = \frac{3\cos(t/2)}{a(3\cos^2(t/2)+5)}$ ,  $a \neq 0$

**L. Vypočítajte polomer kola.  $R = 102m$**

**M. Nájdite rovnicu oskulačnej roviny krivky v bode  $a = (a_1, a_2, a_3)$ .**

1.  $18x + 108y - 108z = 0$
2.  $18x - 12y = 0$
3.  $4(x - a_1) \cos t_0(2 \cos^2 t_0 - 3) + 8(y - a_2) \sin^3 t_0 - 8(z - a_3) = 0$
4.  $(x - a_1) \frac{2(2t_0^2+b^2)}{|b^2-t_0^2|b} \pm (y - a_2) \frac{2t_0(3b^2-2t_0^2)}{|b^2-t_0^2|^{(3/2)}b} \mp (z - a_3) \frac{b^2}{|b^2-t_0^2|^{(3/2)}} = 0$ ,  $|b| \neq |t_0|$  v záv. od zn.  $t_0$

**O. Vyjadrite polomer krivosti krivky zadanej v polárnych súradniciach.**

$$R = \frac{(r^2+r_\theta^2)^{(3/2)}}{r^2+2r_\theta^2-rr_{\theta\theta}}$$

**P. Reparametrizujte krivku vzhľadom na dĺžku oblúka meraného od bodu, kde  $t = 0$  v smere rastu  $t$ .**

1.  $\frac{1}{\sqrt{19}} \langle s, 1 - 3s, 5 + 4s \rangle, s \geq 0$
2.  $\langle e^{2t} \cos 2t, 2, e^{2t} \sin 2t \rangle, t = \frac{1}{2} \ln(s/\sqrt{2} + 1), s > -\sqrt{2}$
3.  $\langle 3 \sin(s/3) \cos(s/3), 3 \sin^2(s/3), 3 \rangle, s \in [0, 3\pi/2]$
4.  $r = \left\langle \frac{8s^3}{27}, \pm \left| 1 - \frac{4s}{9} \right|^{(3/2)} \right\rangle, s \in [-3/2, 3/2]$

**R. Riešte exaktné diferenciálne rovnice.**

1.  $y \equiv 0, 3yx^2 - y^3 = c, x \neq 0, y \neq 0$
2.  $e^{-y}x - y^2 = c$
3.  $y \equiv 0, y \ln x + \frac{y^4}{4} = c, x \neq 1, y \neq 0, x \neq 0, (y \text{ ľub.})$
4.  $x^2 - 3x^3y^2 + y^4, x \neq 0, y \neq 0, x \neq \pm\sqrt{236-3/4}, y \neq \pm 2^{1/4}3^{-5/8}$
5.  $x + \frac{x^3}{y^2} + \frac{5}{y} = c, y \neq 0, (x \text{ ľub.})$
6.  $x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{(x^2 - y)^3} = c, x^2 \geq y, x \neq 0, y \neq 0$

**S. Riešte diferenciálne rovnice nájdením IF.**

1.  $x^2 - y = cx, x \neq 0, y \neq 0$
2.  $-\frac{x^{10}}{7} - \frac{ax^9}{6} + \frac{y^3}{3} + x^2y = cx^3, x \neq 0, y \neq 0$
3.  $y \equiv 0, x^2y + 2x = cy, x \neq 0, y \neq 0$
4.  $y \equiv 0, x^2y - x + y^2 + y \ln y = cy, x \neq 0, y \neq 0$

**T. Riešte diferenciálne rovnice nájdením IF.**

1.  $xy + x + y = c(x + y)(x + y + 2), x \neq 0, y \neq 0$

2.  $y \equiv 0, xy(x^2 + y^2) + 1 = cxy, x \neq y \neq 0, x \neq y \neq 2^{-1/4}$

3.  $y \equiv 0, xy - \ln |y| = c, x \neq 0, (y \text{ ľub.})$

4.  $y \equiv 0, x^2y^2 + 2 \ln \frac{x}{y} = c, x \neq 0, y \neq 0;$

5.  $y \equiv 0, c = \frac{xy}{e^{x+y}}$

Hint: hľadajte IF v tvare  $\mu = \mu(xy), \mu = \mu(x + y)$

**V.  $cx = ye^{xy}$**

**W.  $\sum_{i=1}^n e_i \frac{x - x_i}{((x - x_i)^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$**

**X. Zistite, či je funkcia rovnomerne spojitá na  $I$ .**

1. áno

2. nie

3. áno

4. áno

5. nie (ak  $I$  obsahuje 0, alebo  $\alpha = 0$ )6. nie ( $g, h$  musia byť ohraničené)

7. áno