Jozef Kiseľák

Výsledky úloh na precvičenie III.
14. október 2014

A. Stanovte divergenciu vektorového poľa.

1. $6xyz$
2. y^2
3. 0
4. 0
5. 6
6. $ze^{xy}(y^2+x^2) - 9\sin 3z$

B. Stanovte rotáciu vektorového poľa.

1. $(0,0,0)$
2. $(0,0,0)$
3. $(0,xy,xz)$
4. $(\cos x - y\cos z, xy + y\sin z, -xz)$
5. $(0, y\sin z + z, y + y\cos x + \cos z)$
6. $(xz, \cos x - yz, \cos x)$

C. Nech $\mathbf{r}, r$ je polohový vektor a jeho veľkosť, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sú konštantné vektory a $f \in C^1$. Vypočítajte:

1. $2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$
2. $3f(r) + f'(r)r$
3. 0
4. $2\mathbf{a}$
5. $\dfrac{-a(1+br)e^{-br}}{r^3}(x,y)$
6. $-\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{r}}{r^2}$
7. $-nr^{n-1}\mathbf{a}\times\mathbf{r}$
8. $\frac{\mathbf{a}}{r^2}$
9. $\frac{2}{r^4}$
10. 0

D1. Nájdite funkciu $g \in C^1$.

$g(z) = 3\int_{z_0}^{z} f(s)\,\mathrm{d}s + c$

D2.

1. $Q_A = Q_B = 8\sqrt(2)Q,\ Q_C = \sqrt{11^3/3}Q$
2. nie

Návod: Vychádzajte z podmienky, že v rovnovážnej polohe musí potenciálna energia náboja nadobúdať lokálny extrém a v stabilnom prípade lokálne minimum. Potenciĺna energia je rovná $qV(x,y,z)$, kde potenciál V je súčtom potenciálom budených v danom bode nabojmi Q, Q_A, Q_B, Q_C, pričom náboj Q_α umiestnený v bode určenom polohovým vektorom $\mathbf{r}_\alpha$ budí v bode $\mathbf{r}$ potencíal $V_\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_\alpha}{||\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha||}$.

F. Nájdite parametrické vyjadrenie:

1. $\mathbf{r}(u,v) = (a\sin u\cos v, a\sin u\sin v, a\ln\tan(u/2) + a\cos u)$
2. $\mathbf{r}(u,v) = (b\cosh(u/b)\cos v, b\cosh(u/b)\sin v, u)$

G. Vylúčením parametrov u, v nájdite rovnicu plochy.

1. $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$
2. $x^{(2/3)} + y^{(2/3)} + z^{(2/3)} = a^{(2/3)}$
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

H. Nájdite parametrické vyjadrenie danej plochy.
Napríklad:

1. $\mathbf{r}(u,v) = \left(u\cos v, u\sin v, \pm\frac{2}{\cos v}\right)$
2. $\mathbf{r}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v, v-u, 2uv)$
3. $\mathbf{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, bv)$

I. Nájdite parametrické a implicitné vyjadrenie kužeľovej plochy.

$x^{(2/3)} + y^{(2/3)} - a^{(2/3)}(1-z)^{(2/3)} = 0$

J. Nájdite singulárne body plôch.

1. $\{[0,0,\pi(2k+1)/2], k \in \mathbb{Z}\}$
2. $[0,0,0]$
3. $\{[-1,1,1],[1,-1,1],[1,1,-1],[-1,-1,-1]\}$
4. $\{[0,0,z], z \in \mathbb{R}_0^+\}$
5. $\{[0,0,z], z \in \mathbb{R}\}$
6. nemá SB

K. Nájdite dotykovú rovinu a normálu plôch v bode M.

1. $27x - 9y - 3z = 81$
2. $-24x + 3y + 30z = 81$
3. $8x + 8z = 16$
4. $x - y + 2z = \pi$
5. $y - z \sinh 1 = \cosh 1 - \sinh 1$
6. $3x - 3y + z = 2$

L. Sú množiny A, B sú homeomorfné.

1. áno
2. áno
3. áno
4. áno
5. nie

N. Transformujte rovnice do polárnych súradníc.

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r = kr^3, \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi = -1$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} r = \frac{1-\sin 2\phi}{\sin 2\phi} r^2$
3. $r(r^2 + 2(r')^2 - rr'') = (r')^3, \ \ ' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}$
4. u_ϕ
5. $u_r^2 + \frac{u_\phi^2}{r^2}$
6. $u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\phi\phi}}{r^2}$

O. Zavedením nových nezávislých premenných transformujte rovnice.

1. $u'' + (u+3)u' + 2u = 0$
2. $u'' + 8u(u')^3 = 0$
3. $u^2 w_u^2 + v^2 w_v^2 = w^2\, w_u\, w_v$
4. $\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{z(z^2+u)}{v(z^2-u)}$
5. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$
6. $2 - 4w_{uu}$

P. Zavedením nových nezávislých premenných riešte rovnice.

1. $\phi(x+y),\ \phi \in C^1(\mathbb{R})$
2. $\phi(x^2+y^2),\ \phi \in C^1(\mathbb{R})$
3. $x\phi\left(\frac{y}{x}\right),\ \phi \in C^1(\mathbb{R})$
4. $x = y\phi(z) + \psi(z),\ \phi, \psi \in C^1(\mathbb{R})$

R.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \ \Rightarrow\ \left(\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\mathbf{A} = \mu_0\,\mathbf{J},\ \left(\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$