Jozef Kiseľák

Sada úloh na precvičenie IV.
18. november 2014

A1. X **je konečná.**

A2. Ktoré zo systémov tvoria σ-algebru na $\mathbb{R}$?

1. nie
2. nie
3. nie
4. áno
5. nie
6. nie

A3. Zistite, či $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^*$ je miera.

1. nie
2. áno
3. nie
4. áno
5. áno
6. áno

A6. Spočítajte integrály.

1. $\frac{\pi^2}{6}$
2. ∞
3. 0
4. $\frac{1}{\lambda}$

C. Zistite, pre ktoré hodnoty parametra $p \in \mathbb{R}$ konverguje integrál $\int_I f(x;p)\,\mathrm{d}\lambda_1$.

1. $p > 0$
2. $p \in (-1, 1)$
3. $p \in (1, 2)$
4. $p > -1$

E. $N \approx 0.244(kT\hbar c)^3$.

G. $T = \pi\sqrt{l/g}(1 + (\pi/16)\phi_0^2 + \dots)$

H1. Nájdite nasledujúce limity.

1. $\frac{\pi}{4}$
2. 1
3. 0
4. $\frac{8}{3}$
5. $\ln\frac{2}{\mathrm{e}+1}+1$
6. 0

I1. Zistite šetky hodnoty, pre ktoré integrály konvergujú a spočítajte ich.

1. $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(a)\ln(1+|a|),\ \ a\in\mathbb{R}$
2. $\pi\arcsin a,\ \ |a|\leq 1$
3. $\ln\frac{b+1}{a+1},\ \ a,b>-1$
4. $\frac{3\pi}{8}a|a|,\ \ a\in\mathbb{R}$
5. $\frac{n!}{(\alpha-1)^{n+1}},\ \ \alpha>1$
6. $\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...(2n-2)}\frac{\pi}{\alpha^{n-\frac{1}{2}}},\ n\geq 2, \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}, n=1,$ pre $\alpha>0$

I2. Ak je to možné, vypočítajte derivácie $F'(a)$.

1. $F'(a)=2a\mathrm{e}^{-a^5}-\mathrm{e}^{-a^3}-\int\limits_{a}^{a^2}x^2\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}\lambda_1(x),\ \ \alpha\in\mathbb{R}$
2. $F'(a)=2\arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right),\ \ \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
3. $F'(a)=\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2),\ \ \alpha\in\mathbb{R}$
4. $F'(a)=-(\mathrm{e}^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha+\mathrm{e}^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha)+\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{e}^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\lambda_1(x),\ \ \alpha\in\mathbb{R}$
5. $F'(a)=\frac{(2a+d)\sin(a(a+d))}{a(a+d)}-\frac{(2a+c)\sin(a(a+c))}{a(a+c)},\ \ \alpha\in\mathbb{R}$
6. $F'(a)=2\alpha\int\limits_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(y^2+\alpha^4-\alpha^2)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)+2\int\limits_{0}^{\alpha^2}\sin(2x^2)\cos(2\alpha x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)-2\alpha\int\limits_{0}^{\alpha^2}\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos(x^2+y^2-\alpha^2)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x),\ \ \alpha\in\mathbb{R}$

J1. Vyšetrite priebeh funkcie.

1. $D_F = \mathbb{R}$, $F \in C(D_F)$, rastie všade a pre $a > 0$ (< 0) je konkávna (konvexná), v nule je IB, asymptoty sú priamky $y = \pm\pi/2$

2. $D_F = [-1, 1]$, $F \in C(D_F)$ v nule má ostré lokálne (globálne) maximum $F(0) = 0$, rýdzo konkávna na D, $F(\pm 1) = -\pi$

3. $D_F{}^a = (1, \infty)$, $F \in C(D_F)$, $\lim\limits_{a\to\infty} F(a) = 0$, $\lim\limits_{a\to 1^+} F(a) = -\mathrm{Ci}(1) \doteq -0.3374$, $\forall a \in D_F : |F(a)| \le \frac{1}{a-1}$ a F má jediný lokálny extrém na D_F. Kedˇže

$$F(2) = \frac{\cos 1 - \sin 1 + \mathrm{Ci}(1)}{2} > 0,$$

ide o glob. maximum. Zrejme existuje aj IB.

4. $D_F = \mathbb{R}$, $F \in C(D_F)$, $\lim\limits_{a\to\pm\infty} F(a) = \infty$. Pre $a \ge 0$ F rastie a je konkávna. Pre $a < 0$ zámena derivácie a integrálu nie je možná. Avšak funkcia $\ln\left(|a + \mathrm{e}^x|\right)$ je symetrická okolo osi $a = -e^x$ pre každé fixované x. Táto vlastnosˇt sa prenáša na funkciu $F(a)$, a teda je unimodálna.

---

[a] pre $\alpha \in (0, 1]$ existuje ako nevlastný Riemannov integrál

J2. Vhodným zavedením parametra vypočítajte integrál.

1. $\frac{\pi \ln 2}{2}$
2. 2π
3. $\pi \ln 2$
4. $\frac{\pi^2}{8}$

K1. Spočítajte !

1. $\left(\frac{(2a)^a(2b)^b}{(a+b)^{a+b}}\right)^2$, ak $a, b \ge 0, a \ne b$ a 0, ak $a = b$
2. $\sqrt{\frac{\pi(a+\sqrt{a^2+b^2})}{2(a^2+b^2)}}$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$
3. $\frac{\pi}{2}\frac{\ln(p+1)}{|q|}$, $p > 0$, $q \ne 0$
4. $\frac{\pi(\sqrt{p+1}-1)}{2p\sqrt{p+1}} - \frac{\pi}{4}$, ak $p > -1, p \ne 0$, 0, ak $p = 0$
5. $\ln\left(\frac{p+q+1}{(p+1)(q+1)}\right)$, $p, q > -1$, $p + q > -1$

K2. Vypočítajte integrál

$\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}$

M. Vyšetrite konvergenciu integrálov.

1. $\frac{4}{3}$
2. diverguje
3. konverguje pre $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$
4. diverguje
5. diverguje
6. $\frac{1}{2}$
7. $\frac{\pi}{2}$
8. π
9. konverguje pre $p < 1$
10. diverguje

N.
$1; 1; 1$

O. Nájdite množinu $A \subset \mathbb{R}^2$.

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ 0 \leq y \leq 1, \ y \leq -\ln x\}$