Riešenia príkladov z písomnky z MAN3c zo dňa 09.11.2012

Príklad 1.

Krivosť hladkej krivky definovanej paramatricky $(x(t), y(t))$ v bode t_0 je

$$\kappa(t_0) = \left.\frac{x'y'' - y'x''}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}\right|_{t=t_0}.$$

Nech $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ je krivka daná parametricky:

$$x(t) = 2t - 4t^3,$$
$$y(t) = t^2 - 3t^4.$$

Nájdeme singulárne body, teda $\nabla\gamma = (2-12t^2, 2t-12t^3) = 0$. Tomu vyhovujú iba body, ktoré riešia rovnicu $1 = 6t^2$ a z toho máme dva SB: $t_\pm = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Teda krivka je regulárna pre body $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\}$. Funkcia je Lipschitzovsky spojitá na $[-1, 1]$, lebo

$$\sup_{t\in[-1,1]} ||\nabla\gamma|| \leq \sup_{t\in[-1,1]} |2t - 12t^3| + \sup_{t\in[-1,1]} |2 - 12t^2| = 20.$$

Na $\mathbb{R}$ však nemôže byť, lebo

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} ||\nabla\gamma|| = \infty.$$

Vyšetrime prostosť tohto zobrazenia. Riešiť rovnice $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ pre $t_1 \neq t_2$, nemusí byť jednoduché a tak využijeme, že $x(t) = 2t(1-2t^2)$, $y = t^2(1-3t^2)$. Vidíme (z tvaru kvadrátov), že hodnota y sa "vráti" pre všetky také t, pre ktoré sa "vráti" hodnota x. Tj. existujú iba 2 také t, konktrétne $t: \quad 1 - 2t^2 = 0$. Takže krivka nie je prostá. Uzavretá nemôže byť, lebo $\lim_{t\to\infty} x(t) = -\infty \neq \lim_{t\to-\infty} x(t) = \infty$. Krivosť vypočítame pre všetky body, okrem bodov $t_\pm$ (singularity). Po úprave máme $x'y''-y'x'' = 4-48t^2+144t^4 = 4(6t^2-1)^2$. Ďalej máme $(x')^2+(y')^2 = 4-44t^2+96t^4+144t^6 = 4(t^2+1)(6t^2-1)^2$. Takže súhrnne dostaneme

$$\kappa(t_0) = \frac{1}{2(t_0^2 + 1)^{3/2}|6t_0^2 - 1|}.$$

Príklad 2.

Druhú deriváciu v bode $x = 1$ možno riešiť aj bez toho aby sme vedeli ako vyzerá riešenie. Vieme, že $y'(x) = \frac{xy^3}{y(x^2y-x)} \to \pm\infty$ pre $x, y \to 1$ v závislosti od jednostranných limít. To isté musí platiť aj pre druhú deriváciu.
Pri riešení samotnej rovnice schválne vynechávame niektoré detaily (napr. diskusiu o "definičnom obore riešenia", či jeho vetvách).
Riešenie I.

Riešime DR
$$xy^3\,\mathrm{d}x - y(x^2y - x)\,\mathrm{d}y = 0$$
s podmienkami $x = 1,\ y = 1$, pre funkciu $y = y(x)$. Hneď vidíme, že $y \equiv 0$ je triviálne riešenie, ktoré však nespĺňa podmienky. Rovnicu ďalej riešime na množine $U := \mathbb{R}^2 \setminus L$, kde $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = 0 \vee y = 0\}$. Ak použijeme štandardné označenie, potom
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3xy^2 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -2xy^2 + y.$$
Musíme teda hľadať IF. Nenájdeme ho v tvare $\mu(x)$ ani $\mu(y)$, lebo dostaneme
$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1 - 5xy}{x(xy - 1)},$$
respektíve
$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1 - 5xy}{y^2x},$$
závisia na oboch premenných. Keď sa pozrieme na tvar poľa $\frac{1}{y}(M, N)$, vidíme, že je možné hľadať IF v tvare $\mu(xy) = \mu(z)$. Z nutnej podienky potenciálnosti poľa dostaneme rovnicu $2z^2\mu(z)' + 5z\mu(z) - z\mu(z)' - \mu(z) = 0$, po úprave
$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1 - 5z}{z(2z - 1)} = -\frac{3}{2z - 1} - \frac{1}{z}.$$
Integrovaním dostaneme $\ln \mu = -\ln\left(z(2z - 1)^{3/2}\right) + c$. Teda
$$\mu = \frac{1}{z(2z - 1)^{3/2}},$$
kde c je ľubovoľné (teda 0). Vezmeme teda $\mu(xy) = \frac{1}{xy(2xy-1)^{3/2}}$. Dostaneme tak exaktnú DR
$$\frac{xy^3}{xy(2xy - 1)^{3/2}}\,\mathrm{d}x - \frac{y(x^2y - x)}{xy(2xy - 1)^{3/2}}\,\mathrm{d}y = 0,$$

ktorá je ekvivalentná s pôvodnou rovnicou na $U \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ a tiež s exaktnou rovnicou

$$\frac{y^2}{(2xy-1)^{3/2}}\,\mathrm{d}x - \frac{xy-1}{(2xy-1)^{3/2}}\,\mathrm{d}y = 0.$$

Teda vieme, že existuje potenciál $V(x,y)$ pre nové pole

$$(\tilde{M}, \tilde{N}) = \left(\frac{y^2}{(2xy-1)^{3/2}}, -\frac{xy-1}{(2xy-1)^{3/2}}\right).$$

Z podmienky $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \tilde{M}$ dostaneme $V(x,y) = \int \frac{y^2}{(2xy-1)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{y}{(2xy-1)^{1/2}} + c(y)$. Z podmienky $\dfrac{\partial V}{\partial y} = \tilde{N}$ zistíme, že $c(y)$ je konštanta. Teda sme našli riešenie exaktnej rovnice

$$V(x,y) = -\frac{y}{(2xy-1)^{1/2}} = k.$$

Z podmienky $x = 1, y = 1$ máme $k = -1$ a riešenie v implicitnom tvare

$$y^2 = 2xy - 1.$$

Z toho máme riešenie
Riešenie II.

Triviálne riešenie sme už vylúčili a po úprave riešime teda ekvivalentnú rovnicu (na U)

$$y^2\,\mathrm{d}x - (xy-1)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Opäť

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -y.$$

Nájdeme však IF v tvare $\mu(y)$, lebo

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{M_y - N_x}{M} = -\frac{3}{y}.$$

Teda $\mu(y) = \frac{1}{y^3}$. Potom rovnica prejde na tvar

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}x - \frac{xy-1}{y^3}\,\mathrm{d}y = 0,$$

ktorú riešime na U. Hľadáme potenciál $V(x, y)$, teda z $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{y}$ máme

$$V(x, y) = \frac{x}{y} + c(y).$$

Ďalej z $\dfrac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{y} + c(y))$ dostaneme DR

$$-\frac{x}{y^2} + c'(y) = -\frac{xy - 1}{y^3},$$

ktorá je ekvivalentná na U rovnici $c'(y) = \frac{1}{y^3}$ a má riešenie $c(y) = -\frac{1}{2y^2} + k$. Z podmienky $x = 1, y = 1$ dostaneme hodnotu $k = -1/2$. Takže riešenie $y(x)$ pôvodnej rovnice na množine U je opäť v implicitnom tvare

$$2xy - 1 = y^2.$$

Riešenie III.

Rovnicu prepíšeme na množine U na tvar

$$y'(xy - 1) = y^2.$$

To je však špeciálny typ homogénnej rovnice, ktorá sa dá prepísať ako

$$y' = \frac{y}{x}\frac{xy}{xy - 1}$$

na množine $U \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$. Teda použijeme transformáciu $xy = u$ a dostaneme tak separovateľnú DR

$$xu'(1 - u) = u(1 - 2u).$$

Tá ma riešenie v implicitnom tvare $\frac{u^2}{x^2} - 2cu + c = 0$, a po spätnej transformácii $y^2 - 2cxy + c = 0$. Po dosadení podmienok máme $c = 1$ a opäť riešenie pôvodnej rovnice $y^2 = 2xy - 1$.

Všimnime si, že pôvodná rovnica má riešenie na "širšej" množine ako riešenie ekvivalentných rovníc.

Príklad 3.

Uvažujeme transformáciu $x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi$, kde $r > 0$, $\phi \in (-\pi, \pi]$. Toto zobrazenie je regulárne, prosté (bijekcia na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) a Jakobián je r. Chceme transformovať rovnicu

$$F = y^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x\,\frac{\partial z}{\partial x} - y\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Máme $z(x,y) = z(r\cos\phi, r\sin\phi) = h(r,\phi)$. Vyjadríme derivácie funkcie z pomocou derivácií funkcie h podľa r a ϕ. Platí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Po derivovaní transformácií máme navyše

$$1 = \frac{\partial r}{\partial x}\cos\phi - r\sin\phi\frac{\partial \phi}{\partial x},$$

$$0 = \frac{\partial r}{\partial x}\sin\phi + r\cos\phi\frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Takže $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \cos\phi$, $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin\phi}{r}$. Dokopy máme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial r}\cos\phi - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial h}{\partial \phi},$$

a to derivujeme opäť podľa x:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial^2 h}{\partial \phi \partial r}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\cos\phi - \frac{\partial h}{\partial r}\sin\phi\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{r^2}\left(r\cos\phi\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x}\sin\phi\right)\frac{\partial h}{\partial \phi} -$$

$$-\frac{\sin\phi}{r}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial \phi}\frac{\partial r}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}\cos^2\phi + \frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2}\frac{\sin^2\phi}{r^2} + \frac{\partial h}{\partial r}\frac{\sin^2\phi}{r} + \frac{\partial h}{\partial \phi}\frac{\sin 2\phi}{r^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial \phi}\frac{\sin 2\phi}{r}.$$

Podobne máme $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \sin\phi$, $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\cos\phi}{r}$ a z toho

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial r}\sin\phi + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial h}{\partial \phi}.$$

Ďalej

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}\sin^2\phi + \frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2}\frac{\cos^2\phi}{r^2} + \frac{\partial h}{\partial r}\frac{\cos^2\phi}{r} - \frac{\partial h}{\partial \phi}\frac{\sin 2\phi}{r^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial \phi}\frac{\sin 2\phi}{r}$$

a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}\sin\phi\cos\phi - \frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2}\frac{\sin\phi\cos(\phi)}{r^2} - \frac{\partial h}{\partial r}\frac{\sin\phi\cos(\phi)}{r} - \frac{\partial h}{\partial \phi}\frac{\cos 2\phi}{r^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial r\partial\phi}\frac{\cos 2\phi}{r}.$$

Všade využívame vetu o zámene poradia derivovania. Po dosadení dostaneme

$$F = r^2\sin^2\phi\left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}\cos^2\phi + \frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2}\frac{\sin^2\phi}{r^2} + \frac{\partial h}{\partial r}\frac{\sin^2\phi}{r} + \frac{\partial h}{\partial \phi}\frac{\sin 2\phi}{r^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial r\partial\phi}\frac{\sin 2\phi}{r}\right) -$$

$$-2r^2\sin\phi\cos\phi\left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}\sin\phi\cos\phi - \frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2}\frac{\sin\phi\cos(\phi)}{r^2} - \frac{\partial h}{\partial r}\frac{\sin\phi\cos(\phi)}{r} - \frac{\partial h}{\partial \phi}\frac{\cos 2\phi}{r^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 h}{\partial r\partial\phi}\frac{\cos 2\phi}{r}\right) + r^2\cos^2\phi\left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}\sin^2\phi + \frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2}\frac{\cos^2\phi}{r^2} + \frac{\partial h}{\partial r}\frac{\cos^2\phi}{r} - \frac{\partial h}{\partial \phi}\frac{\sin 2\phi}{r^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 h}{\partial r\partial\phi}\frac{\sin 2\phi}{r}\right) - r\cos\phi\left(\frac{\partial h}{\partial r}\cos\phi - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial h}{\partial \phi}\right) - r\sin\phi\left(\frac{\partial h}{\partial r}\sin\phi + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial h}{\partial \phi}\right) = 0.$$

A po úpravách (viď obrázok) dostávame

$$F = (\sin^4\phi + 2\sin^2\phi\cos^2\phi + \cos^4\phi)\frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2} = 0.$$

Takže naša PDR v polárnych súradniciach má jednoduchý tvar $\dfrac{\partial^2 h}{\partial \phi^2} = 0$. Riešime túto rovnicu postupným integrovaním a teda

$$\frac{\partial h}{\partial \phi} = f(r), \quad h(r,\phi) = f(r)\phi + g(r).$$

Takže riešením pôvodnej PDR je každá funkcia tvaru

$$z(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\operatorname{acos}(x,y) + g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

kde $f, g \in C^2$ (na príslušnom obore hodnôt riešenia.)

Príklad 4.

Plocha $F = \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-2 = 0$ je definovaná pre $x, y, z \geq 0$. Dotykovú rovinu ľahko nájdeme pre $x, y, z > 0$, kde má F vlastné derivácie, zo vzťahu $\nabla F(r_0)\cdot(r - r_0) = 0$, kde $r = (x, y, z), r_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Keďže $\nabla F(r_0) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \frac{1}{2\sqrt{y_0}}, \frac{1}{2\sqrt{z_0}}\right)$, rovnica dotykovej roviny má tvar

$$T^F_{r_0}: \quad \frac{x-x_0}{\sqrt{x_0}} + \frac{y-y_0}{\sqrt{y_0}} + \frac{z-z_0}{\sqrt{z_0}} = 0.$$

Obr. 1: Krátenie členov v príklade 3.

$$
\begin{aligned}
F = {} & r^2 \sin^2\phi \left(\cancel{\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} \cos^2\phi} + \frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2} \frac{\sin^2\phi}{r^2} + \cancel{\frac{\partial h}{\partial r} \frac{\sin^2\phi}{r}} + \cancel{\frac{\partial h}{\partial \phi} \frac{\sin 2\phi}{r^2}} - \cancel{\frac{\partial^2 h}{\partial r \partial \phi} \frac{\sin 2\phi}{r}} \right) - \\
& -2r^2 \sin\phi\cos\phi \left(\cancel{\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} \sin\phi\cos\phi} - \frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2} \frac{\sin\phi\cos(\phi)}{r^2} - \cancel{\frac{\partial h}{\partial r} \frac{\sin\phi\cos(\phi)}{r}} - \cancel{\frac{\partial h}{\partial \phi} \frac{\cos 2\phi}{r^2}} + \right. \\
& \left. + \cancel{\frac{\partial^2 h}{\partial r \partial \phi} \frac{\cos 2\phi}{r}} \right) + r^2 \cos^2\phi \left(\cancel{\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} \sin^2\phi} + \frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2} \frac{\cos^2\phi}{r^2} + \cancel{\frac{\partial h}{\partial r} \frac{\cos^2\phi}{r}} - \cancel{\frac{\partial h}{\partial \phi} \frac{\sin 2\phi}{r^2}} + \right. \\
& \left. + \cancel{\frac{\partial^2 h}{\partial r \partial \phi} \frac{\sin 2\phi}{r}} \right) - r\cos\phi \left(\cancel{\frac{\partial h}{\partial r} \cos\phi} - \cancel{\frac{\sin\phi}{r} \frac{\partial h}{\partial \phi}} \right) - r\sin\phi \left(\cancel{\frac{\partial h}{\partial r} \sin\phi} + \cancel{\frac{\cos\phi}{r} \frac{\partial h}{\partial \phi}} \right) = 0.
\end{aligned}
$$

Treba ukázať, že platí $R = |P_x O| + |P_y O| + |P_z O| = \text{konšt.}$, kde $P_x : (x, 0, 0), x \in T^F_{r_0}$ (obdobne P_y, P_z). Vieme, že

$$P_x = [\sqrt{x_0}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}), 0, 0] = [2\sqrt{x_0}, 0, 0],$$

$$P_y = [2\sqrt{y_0}, 0, 0],$$

$$P_z = [2\sqrt{z_0}, 0, 0].$$

Spolu teda $R = 2\sqrt{x_0} + 2\sqrt{y_0} + 2\sqrt{z_0} = 4$, kde sme využívali fakt, že (x_0, y_0, z_0) leží na našej ploche. Body, kde $x_0 = 0$ alebo $z_0 = 0$, alebo $y_0 = 0$ sú body hranice plochy a navyše tam má funkcia parciálne derivácie nevlastné, teda o dotykovej rovine nemá zmysel hovoriť.

Príklad 5.

Pole má byť nevírivé a teda má platiť $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$. Máme

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x & 2y + g(z) & 3y \sin^2 z \end{vmatrix} = (3\sin^2 z - g'(z), 0, 0).$$

Takže musíme vzriešiť DR $3\sin^2 z = g'(z)$. Jednoduchým integrovaním dostávame

$$g(z) = 3 \int_0^z \sin^2 s \, \mathrm{d}s = 3/2 \int_0^z (1 - \cos 2s) \, \mathrm{d}s = \frac{3}{2} z - \frac{3}{4} \sin 2z + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$