Úloha

Majme $X = C([0,1])$. Je známe, že $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ je normou na X. Ak $w \in X : w(x) > 0$ pre $x \in (0,1)$, Dá sa ukázať, že aj $\|f\|_w = \sup_{x\in[0,1]} \{w(x)\,|f(x)|\}$ je normou.

Predpokladajme teraz, že $w(x) > 0$ pre $x \in [0,1]$. Potom vieme, že existujú x_1 a x_2 v $[0,1]$, v ktorých w dosahuje svoje minimum a maximum $w(x_1) = m, w(x_2) = M$, pričom $m, M > 0$. Z toho potom

$$\sup_{x\in[0,1]} m\,|f(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} \{w(x)\,|f(x)|\} \leq \sup_{x\in[0,1]} M\,|f(x)|,$$

čo implikuje

$$m\,\|f\|_\infty \leq \|f\|_w \leq M\,\|f\|_\infty,$$

teda ekvivalentnosť noriem. Teda ak konverguje f_n k f v supremovej norme, konverguje aj v $\|\cdot\|_w$ a naopak.

Na druhej strane, napr. pre $w(x) = x$, ukážeme, že to neplatí.

Ukážte, že supremum f_n sa nadobúda v bode $x_n := (n-1)^{-\frac{1}{n}}$ a platí $\|f_n\|_\infty \to 1$ pre všetky n, avšak $\|f_n\|_{w(x)=x} \to 0$. Z toho už vyplýva, že neexistuje konštanta $C \geq 0$ tak, aby platila nerovnosť $\|f_n\|_\infty \leq C\|f_n\|_{w(x)=x}$.

Ukážte, že platí nerovnosť $\|f_n\|_{w(x)=x} \leq \|f_n\|_\infty$ ale, že postupnosť $f_n(x) = x^{\frac{1}{n}}$ nekonverguje v norme $\|\cdot\|_\infty$ ale konverguje v norme $\|\cdot\|_w$.