

# Matematická analýza pre fyzikov IV.

JOZEF KISELÁK

Rýchle odkazy

---

## Dodatky

### 8.1. Niektoré diferenciálne operátory

Lineárne diferenciálne operátory možno naraz zapísať takto:

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

kde  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  je tzv. multi-index,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ ,  $a_\alpha(x)$  sú funkcie a

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n}, D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

| operátor (funkcionál)                           | popis               | def. obor      |
|---|---------------------|----------------|
| $J[y] = y^{[-1]}$                               | inverzná funkcia    | bijekcie       |
| $Z[y] = f \circ y$                              | kompozícia s $f$    |                |
| $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ | operátor hybnosti   | $C^1$          |
| $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  | operátor energie    | $C^1$          |
| $LT[y] = t y'^{[-1]} - y \circ y'^{[-1]}$       | Legendreova transf. | konvex., $C^1$ |
| $\frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d^2}{dx^2})$        | op. ohybu nosníka   | $C^4$          |

|  |                                |       |
|--|--------------------------------|-------|
| $\nabla = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$   | gradient                       | $C^1$ |
| $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$  | divergencia                    | $C^1$ |
| $\Theta = \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$  | operátor homogenity            | $C^1$ |
| $\Delta = \nabla^2 = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$   | laplacián                      | $C^2$ |
| $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$   | D'Alembertov op.               | $C^2$ |
| $H[F] = -\frac{1}{2} \nabla \cdot \left( \frac{\nabla F}{ \nabla F } \right)$  | stredná krivosť plochy $F = 0$ | $C^2$ |
| $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$                                    | rotácia                        | $C^1$ |
| $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$<br>$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ | Wirtingerove der.              | $C^1$ |

# Matematická analýza pre fyzikov IV.

JOZEF KISELÁK

Rýchle odkazy

---

## 8.2. Niektoré integrálne operátory

| operátor (funkcionál)   | popis                    | def. obor         |
|---|--------------------------|-------------------|
| $\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X \, dP = \int_{\mathbb{R}} t f_X(t) \, dt$                                  | str. hodnota n.v. $X$    | $L^1(\Omega)$     |
| $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$   | rozptyl n.v. $X$         | $L^2(\Omega)$     |
| $\text{TV}[y] = \int_a^t  y'(s)  \, ds$   | totálna variácia         | $AC$              |
| $\text{AM}[y] = \frac{1}{t-a} \int_a^t y(s) \, ds$  | arit. priemer            | $L^1$             |
| $\text{GM}[y] = \exp\left(\frac{1}{t-a} \int_a^t \ln y(s) \, ds\right)$                                     | geom. priemer            | $L^1$             |
| $\text{Ent}[X] = - \int_{\mathbb{R}} f_X(t) \ln f_X(t) \, dt$   | entropia n.v. $X$        | $f \ln f \in L^1$ |
| $C[y] = y * f = \int_{\mathbb{R}} f(s)y(t-s) \, ds$   | konvolúcia s $f \in L^1$ | $L^p$             |
| $\ f\ _p \equiv \left( \int_S  f ^p \, d\mu \right)^{1/p}$  | $p$ -norma               | $L^p$             |
| $\text{Arc}[y] = \int_a^t \sqrt{1 + [y'(s)]^2} \, ds$   | dĺžka oblúka             |                   |
| $(Tf)(u) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) K(t, u) \, dt$   | Hilbertov–Schmidtov op.  | $L^2$             |
| $(Rf)(\alpha, s) = \int_{\mathbb{R}} f(z \sin \alpha + s \cos \alpha, s \sin \alpha - z \cos \alpha) \, dz$ | Radonova trans.          |                   |
| $\frac{1}{\omega_{n-1}(r)} \int_{\partial B(x,r)} u(y) \, dS(y)$  | sférický priemer         |                   |

### 8.3. Niektoré integrálne transformácie

$$(Tf)(u) = \int_X f(t) K_1(t, u) dt, \quad X = (a, b)$$

$$(T^{-1}g)(t) = \int_{\tilde{X}} g(u) K_2(t, u) du, \quad \tilde{X} = (c, d)$$

| popis              | symbol          | kernel   | X             | ker. inv.   | $\tilde{X}$           |
|--------------------|-----------------|--|---------------|---|-----------------------|
| Abel               | $\mathcal{A}$   | $\frac{2t}{\sqrt{t^2-u^2}}$                      | $(u, \infty)$ | $-\frac{1}{\pi\sqrt{u^2-t^2}} \frac{d}{du}$                         | $(t, \infty)$         |
| Fourier            | $\mathcal{F}$   | $e^{-2\pi iut}$                                  | $\mathbb{R}$  | $e^{2\pi iut}$  | $\mathbb{R}$          |
| Hankel             | $\mathcal{H}a$  | $t J_\nu(ut)$                                    | $(0, \infty)$ | $u J_\nu(ut)$   | $(0, \infty)$         |
| Hartley            | $\mathcal{H}$   | $\frac{\cos(ut)+\sin(ut)}{\sqrt{2\pi}}$          | $\mathbb{R}$  | $\frac{\cos(ut)+\sin(ut)}{\sqrt{2\pi}}$                             | $\mathbb{R}$          |
| Hermite            | $H$             | $e^{-t^2} H_n(t)$                                | $\mathbb{R}$  | $\frac{H_n(u)}{\sqrt{\pi} 2^n n!}$                                  | $\sum_{n=0}^{\infty}$ |
| Hilbert            | $\mathcal{H}il$ | $\frac{1}{\pi} \frac{1}{u-t}$                    | $\mathbb{R}$  | $\frac{1}{\pi} \frac{1}{u-t}$                                       | $\mathbb{R}$          |
| Jacobi             | $J$             | $(1-t)^\alpha (1+t)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(t)$ | $(-1, 1)$     |   | $\sum_{n=0}^{\infty}$ |
| Kontorovič-Lebedev | $K_{iu}$        | $K_{iu}(t)$                                      | $(0, \infty)$ | $\frac{2u \sinh(\pi u) K_{iu}(t)}{\pi^2 t}$                         | $(0, \infty)$         |
| Laguerre           | $L$             | $e^{-t} t^\alpha L_n^\alpha(t)$                  | $(0, \infty)$ | $\binom{n+\alpha}{n}^{-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} L_n^\alpha(u)$ | $\sum_{n=0}^{\infty}$ |

|             |               |  |               |  |                              |
|-------------|---------------|--|---------------|--|------------------------------|
| Laplace     | $\mathcal{L}$ | $e^{-ut}$                                    | $(0, \infty)$ | $\frac{e^{ut}}{2\pi i}$                      | $(c - i\infty, c + i\infty)$ |
| Legendre    | $\mathcal{J}$ | $P_n(t)$                                     | $(-1, 1)$     | $\frac{2n+1}{2}P_n(u)$                       | $\sum_{n=0}^{\infty}$        |
| Mellin      | $\mathcal{M}$ | $t^{u-1}$                                    | $(0, \infty)$ | $\frac{t^{-u}}{2\pi i}$                      | $(c - i\infty, c + i\infty)$ |
| Stieltjes   | $\mathcal{S}$ | $\frac{\Gamma(p)}{(u+t)^p}$                  | $(0, \infty)$ |  |                              |
| Weierstrass | $\mathcal{W}$ | $\frac{e^{-\frac{(u-t)^2}{4}}}{\sqrt{4\pi}}$ | $\mathbb{R}$  | $\frac{e^{\frac{(u-t)^2}{4}}}{i\sqrt{4\pi}}$ | $(c - i\infty, c + i\infty)$ |

## 8.4. Klasické riešenia PDR

### Príklady parciálnych diferenciálnych rovníc:

- Laplaceova rovnica  $\Delta u = 0$
- Helmholtzova rovnica  $-\Delta u = \lambda u$
- Lineárna transportná rovnica  $u_t + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} = 0$
- Liouvilleova rovnica  $u_t + \sum_{i=1}^n (b^i u)_{x_i} = 0$
- Rovnica vedenia tepla (difúzie)  $u_t - \Delta u = 0$
- Schrödingerova rovnica  $iu_t + \Delta u = 0$
- Kolmogorova rovnica  $u_t + \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} = 0$
- Fokkerova–Planckova  $u_t + \sum_{i,j=1}^n (a^{ij} u)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n (b^i u)_{x_i} = 0$
- Vlnová rovnica  $u_{tt} - \Delta u = 0$
- Telegrafná rovnica  $u_{tt} + d u_t - u_{xx} = 0$
- Airyho rovnica  $u_t + u_{xxx} = 0$
- Nelineárna Poissonova rovnica  $-\Delta u = f(u)$
- Rovnica minimálnej plochy  $\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) = 0$
- Burgerova rovnica  $u_t + uu_x = 0$
- Maxwellove rovnice  $\mathbf{E}_t = \operatorname{rot} \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}_t = -\operatorname{rot} \mathbf{E}$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$

**8.4.1. Transportná rovnica** Je to jedna z najjednoduchších rovníc. Jednorozmerný model popisuje napríklad unášanie nečistoty v trubici s prúdiacou tekutinou, kde  $u$  predstavuje koncentráciu unášaného nečistoty a parameter  $b$  konštantnú rýchlosť tekutiny. Predpokladajme preto, že koeficienty  $\mathbf{b}$  sú konštantné. Vo všeobecnosti majme teda rovnicu



$$u_t + \mathbf{b} \cdot \nabla u = 0, \quad \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad (8.1)$$

kde  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  a  $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, \infty), \mathbb{R})$  je neznáma funkcia. Rovnica nám vlastne dáva informáciu, že konkrétna smerová derivácia funkcie  $u$  je nulová. Túto informáciu využijeme a definujeme funkciu  $z(s) := u(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$  pre fixný bod  $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ . Potom platí

$$\dot{z}(s) = \nabla u(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s) + u_t(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s) = 0.$$

Teda  $z$  je konštantná funkcia premennej  $s$  a tým pádom pre každý bod  $(\mathbf{x}, t)$  je  $u$  konštantná na priamke prechádzajúcej týmto bodom v smere  $(\mathbf{b}, 1)$ . Zrejme nám stačí vedieť hodnotu  $u$  v jednom bode. Majme teraz Cauchyho úlohu

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{b} \cdot \nabla u = 0, & \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, & \text{na } \Gamma := \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases}$$

Priamka prechádzajúca bodom  $(\mathbf{x}, t)$  v smere  $(\mathbf{b}, 1)$  je daná  $(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Pre  $t = -s$  sa dotkne plochy  $\Gamma$  v bode  $(\mathbf{x} - t\mathbf{b}, 0)$ . Tam platí  $u(\mathbf{x} - t\mathbf{b}, 0) = g(\mathbf{x} - t\mathbf{b})$ . Z toho usudzujeme, že  $u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x} - t\mathbf{b})$  na  $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$  a aj to, že  $g \in C^1$ .

**Poznámka 8.4.2.**

Ak by  $g \notin C^1$ , zrejme ani riešenie nebude hladké. V takomto prípade je možné hovoriť o slabých riešeniach, ktoré sú hladké s.v. a takisto rovnica je splnená s.v. na danej množine.

V prípade nehomogénneho problému môžeme postupovať obdobne.

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{b} \cdot \nabla u = f, & \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, & \text{na } \Gamma := \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases}$$

Platí

$$\dot{z}(s) = \nabla u(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s) + u_t(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s) = f(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s).$$

Tým pádom

$$u(\mathbf{x}, t) - g(\mathbf{x} - t\mathbf{b}) = z(0) - z(-t) = \int_{-t}^0 \dot{z}(s) ds = \int_0^t f(\mathbf{x} + (s - t)\mathbf{b}, s) ds,$$

takže

$$u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x} - t\mathbf{b}) + \int_0^t f(\mathbf{x} + (s - t)\mathbf{b}, s) ds, \quad \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$$

je riešením nehomogénnej Cauchyho úlohy.

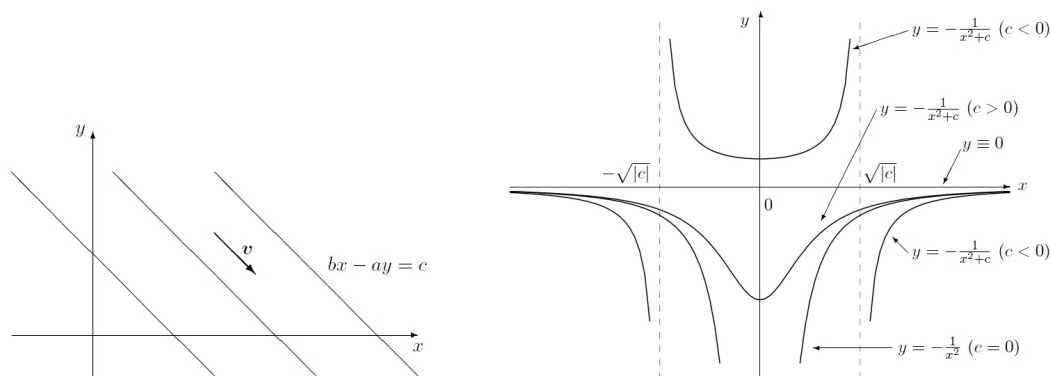
**8.4.3. Riešenie metódou charakteristík** Uvedieme si zovšeobecnenie metódy riešenia z predchádzajúcej úlohy. Predpokladajme najprv lineárnu homogénnu PDR prvého rádu dvoch nezávislých premenných s konštantnými koeficientami. Majme teda rovnicu v tvare

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (8.2)$$

kde  $a^2 + b^2 > 0$ . Geometrická interpretácia: rovnica sa dá zapísať v tvare  $\langle \mathbf{v}, \nabla u \rangle = 0$  a teda derivácia funkcie  $u$  v smere  $\mathbf{v}$  je nulová. Funkcia  $u$  sa nemení v tomto smere, tj. je konštantná na každej priamke, ktorej smerový vektor je  $\mathbf{v}$  (pozor konštanta môže byť na týchto priamkach rôzna). Platí teda  $u(x, y) = f(c) = f(bx - ay)$ , kde  $f \in C^1$ . Tieto priamky tvoria tzv. charakteristiky rovnice. Tento tvar je všeobecným (aj generickým) riešením danej rovnice, ide o postupnú vlnu hýbajúcu sa pozdĺž charakteristík. Funkciu  $f$  si vyjadríme z počiatočnej, alebo okrajovej podmienky. Podobne postupujeme aj v prípade nekonštantných koeficientov. Rozdiel je v tom, že charakteristiky nemusia byť vo všeobecnosti priamky, ale nejaké krivky. Majme rovnicu

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (8.3)$$

kde  $a(x, y)^2 + b(x, y)^2 > 0$ ,  $(x, y) \in G$  a  $a, b \in C(G)$ . Máme zaručené, že iba jedna charakteristika prechádza každým bodom množiny  $G$ . Teraz je  $\mathbf{v} = (a(x, y), b(x, y))$  a charakteristiky sú dané



(a) Charakteristické priamky rovnice  $au_x + bu_y = 0$ ,  $\mathbf{v} = (a, b)$ .

(b) Charakteristiky rovnice  $u_x + 2xy^2u_y = 0$ .

Obr. 8.1: Príklady charakteristík.

rovniciou

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)}.$$

Nech existuje (hlavný prvý integrál) riešenie a má tvar  $h(x, y) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , potom hľadaným riešením je funkcia  $u(x, y) = F(c) = F(h(x, y))$ ,  $F \in C^1$ .

Nevýhodou takejto metódy je, že ju nemôžeme použiť k riešeniu všeobecnejších rovníc. Dá sa to však využiť čiastočne. Majme rovnicu

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y). \quad (8.4)$$

- Metóda charakteristických súradníc - zaved' me súradnice  $\xi = bx - ay$ ,  $\tau = y$ , z toho máme

$$u_x = b\tilde{u}_\xi, \quad u_y = -a\tilde{u}_\xi + \tilde{u}_\tau.$$

Potom dostaneme rovnicu

$$b\tilde{u}_\tau + \tilde{c}(\xi, \tau)\tilde{u} = \tilde{f}(\xi, \tau),$$

na ktorú sa môžeme pozerat' ako na ODR s parametrom a riešiť ju štandardnými metódami.

Obdobne môžeme postupovať pre nekonštantné koeficienty:

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y), \quad (8.5)$$

pričom zavedieme súradnice  $\xi = h(x, y)$ ,  $\tau = y$  ( $h$  je prvý integrál). Platí totiž, že  $a(x, y)h_x + b(x, y)h_y = 0$  v ľubovoľnom bode  $(x, y)$ . Odtiaľ máme ODR s parametrom  $\tilde{b}(\xi, \tau)\tilde{u}_\tau + \tilde{c}(\xi, \tau)\tilde{u} = \tilde{f}(\xi, \tau)$ .

### Príklad 8.4.4.

Rovnica  $u_x + yu_y = ye^y$  má všeobecné riešenie  $u(x, y) = e^y + g(ye^{-x})$ , kde  $g \in C^1$ .

Uvažujme teraz 3 podienky:

- $u(0, y) = \sin y \Rightarrow g(y) = \sin y - e^y$  - práve jedno riešenie
- $u(x, 0) = \sin(x) \Rightarrow \sin(x) = u(x, 0) = 1 + g(0)$  - žiadne riešenie
- $u(x, 0) = 10 \Rightarrow 10 = u(x, 0) = 1 + g(0)$  - nekonečne veľa riešení ( $g \in C^1 : g(0) = 9$ )

Všimnime si, že v prvom prípade bola podmienka zadaná na osi  $y$ , ktorá pretína všetky charakteristiky rovnice práve raz a pod nenulovým uhlom. V ďalších dvoch prípadoch bola podmienka daná na osi  $x$ , ktorá je priamo jednou z charakteristík !

### Veta 8.4.5 (Lokálna o existencii).

Nech v rovnici (8.5) sú  $a, b, c, f \in C^1(G)$ , kde  $G \subset \mathbb{R}^2$  je oblasť. Nech aj okrajová podmienka  $u = u_0 \in C^1$  je zadaná na regulárnej krivke  $\gamma : (x_0(s), y_0(s))$ ,  $s \in I$ . Potom ak je splnená podmienka

$$b(x_0(s), y_0(s)) \frac{dx_0}{ds} - a(x_0(s), y_0(s)) \frac{dy_0}{ds} \neq 0, \quad \forall s \in I,$$

tak existuje jediné riešenie danej rovnice na okolí krivky  $\gamma$ , ktorá spĺňa  $u_0(s) = u(x_0(s), y_0(s))$ .

### Poznámka 8.4.6.

Daná podmienka len hovorí, že vektor  $(a, b)$  nie je dotykovým vektorom krivky  $\gamma$  v žiadnom z bodov  $(x_0, y_0)$ , tj. krivka  $\gamma$  pretína charakteristiky transversálne.

### 8.4.7. Rovnica vedenia tepla

Budeme študovať rovnicu

$$u_t - \Delta u = f, \quad \text{na } U \times (0, \infty), \quad (8.6)$$

s príslušnými počiatočnými a okrajovými podmienkami, kde  $u : \bar{U} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  je neznáma funkcia. Fyzikálne popisuje stav ("vývoj") hustoty  $u$  v čase nejakej kvantitatívnej veličiny (teplo, chemická koncentrácia, atď.). Štandardne platí, že zmena celkovej veľkosti veličiny v oblasti  $V \subset U$  (v čase  $t$ ) je rovná zápornej hodnote toku (s hustotou  $\mathbf{F}$ ) cez hranicu  $\partial V$ , tj.

$$\frac{d}{dt} \int_V u \, d\mathbf{x} = - \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Z toho máme  $u_t = -\operatorname{div} \mathbf{F}$ , kde  $V$  bola ľubovoľná. Častokrát je  $\mathbf{F}$  priamoúmerná gradientu  $u$ , tj.  $\mathbf{F} = -a\nabla u$ ,  $a > 0$ . Pre  $a = 1$  máme štandardný tvar tejto rovnice. Táto rovnica sa objavuje aj pri štúdiu Brownovho pohybu. Nájdeme fundamentálne riešenie. Z tvaru rovnice (rádu derivácii podľa časovej a priestorových premenných) dostaneme invariatnosť pri škálovaní. Teda ak  $u$  rieši rovnicu, tak aj  $u(\lambda \mathbf{x}, \lambda^2 t)$ . To indikuje fakt, že podiel  $\frac{\|\mathbf{x}\|}{t}$  je dôležitý a zrejme je možné hľadať riešenie v tvare  $u(\mathbf{x}, t) = v\left(\frac{\|\mathbf{x}\|}{t}\right)$ . V podstate je to špeciálny prípad sebakodobných tvarov riešení

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{\mathbf{x}}{t^\beta}\right).$$

Dosadením tohto výrazu do (8.6) dostaneme

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v + \beta t^{-(\alpha+1)} \mathbf{x} \cdot \nabla v + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v = 0,$$

pričom volíme  $\beta = \frac{1}{2}$ . Ak navyše predpokladáme, že riešenie je radiálne symetrické  $v(\mathbf{x}) = w(\|\mathbf{x}\|) = w(r)$ , tak dostaneme rovnicu

$$\alpha w + \left( \frac{1}{2}r + \frac{n-1}{r} \right) w' + w'' = 0. \quad (8.7)$$

Ďalšou voľbou parametra  $\alpha = \frac{n}{2}$  dostaneme rovnicu, ktorá má po redukcii tvare

$$r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w = \text{konšt.}, \quad (8.8)$$

pričom navyše predpokladáme, že  $\lim_{r \rightarrow \infty} w = \lim_{r \rightarrow \infty} w' = 0$ . Z toho máme riešenie v tvare  $w = be^{-\frac{r^2}{4}}$ . To nás privádza k nasledujúcej definícii.

### Definícia 8.4.8.

Funkcia

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4t}}, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0, \end{cases}$$

nazývame **fundamentálne riešenie rovnice vedenia tepla**.

### Poznámka 8.4.9.

Všimnime si, že  $\Phi$  má singularitu v bode  $(0, 0)$ . Konštanta  $b$  je volená z normalizácie  $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = 1$ .

V prípade Cauchyho úlohy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, & \text{na } \Gamma := \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases} \quad (8.9)$$

je jasné, že pre fixné  $\mathbf{y}$  aj  $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t)$  je riešením rovnice vedenia tepla (okrem bodu  $(0, 0)$ ).

Potom však riešenie v tvare konvolúcie je riešením (8.10). Dostávame tak vetu:

### Veta 8.4.10.

Nech  $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$  a  $u$  je dané  $u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ . Potom

- (I)  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ ,
- (II)  $u_t - \Delta u = 0$ , na  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ ,
- (III)  $\lim_{(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{x}^0, 0), t > 0} u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}^0)$ ,  $\forall \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ .

### Poznámka 8.4.11.

Všimnime si, že ak  $g \in C_b$ , nezáporná a  $g \not\equiv 0$ , potom riešenie  $u$  je kladné na  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ . Teda teplota je vždy a všade nenulová (môže nadobúdať malé hodnoty), ak počiatočný impulz je nezáporný a niekde kladný.

V prípade nehomogénnej Cauchyho úlohy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{na } \Gamma := \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases} \quad (8.10)$$

použijeme Duhamelov princíp. Už vieme, že problém

$$\begin{cases} u_t(\cdot; s) - \Delta u(\cdot; s) = 0, & \text{na } \mathbb{R}^n \times (s, \infty), \\ u(\cdot; s) = f(\cdot; s), & \text{na } \Gamma := \mathbb{R}^n \times \{s\}. \end{cases} \quad (8.11)$$

má riešenie v tvare  $u(\mathbf{x}, t; s) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y}$ . Uvažujme riešenie nehomogénneho problému v tvare

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t u(\mathbf{x}, t; s) ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds, \quad \mathbb{R}^n \times [0, \infty).$$

Dostávame tak vetu:

### Veta 8.4.12.

Nech  $u$  je dané  $u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) dy ds$ . Potom

(I)  $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ ,

(II)  $u_t(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t)$ , na  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ ,

(III)  $\lim_{(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{x}^0, 0), t > 0} u(\mathbf{x}, t) = 0, \forall \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ .

### Problém 8.4.13.

Ako by vyzeralo riešenie nehomogénneho problému s nenulovou počiatočnou podmienkou?

## 8.4.14. Laplaceova a Poissonova rovnica Budeme študovať rovnicu

$$\Delta u = f, \text{ na } U, \tag{8.12}$$

s príslušnými počiatočnými a okrajovými podmienkami, kde  $u : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  je neznáma funkcia. Metódou sebakpodobných radiálne symetrických riešení dostaneme fundamentálne riešenie v prípade  $f = 0$  (takéto funkcie sa nazývajú aj **harmonické** na  $U$ ).

### Definícia 8.4.15.

Funkcia

$$\Phi(\mathbf{x}) := \begin{cases} -\frac{\ln \|\mathbf{x}\|}{2\pi}, & n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)V(n)\|\mathbf{x}\|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases}$$

definované pre  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ , kde  $V(n)$  je objem jednotkovej guli v  $\mathbb{R}^n$ , nazývame **fundamentálne riešenie Laplaceovej rovnice**.



Ak pravá strana nie je nulová, nájdeme riešenie opäť v tvare konvolúcie, treba byť však opatrný kvôli singularite fundamentálneho riešenia.

Dostávame tak vetu:

### Veta 8.4.16.

Nech  $u$  je dané  $u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ . Potom

(I)  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ,

(II)  $\Delta u = f$ , na  $\mathbb{R}^n$ .

**8.4.17. Vlnová rovnica** Rovnica popisuje zjednodušený model kmitania struny, membrány či plastického telesa, pričom  $u$  udáva vychýlenie v nejakom smere a čase.

$$\square u := u_{tt} - \Delta u = f, \text{ na } U \times (0, \infty), \quad (8.13)$$

s príslušnými počiatočnými a okrajovými podmienkami, kde  $u : \bar{U} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  je neznáma funkcia.

Pozrime sa na d'Alembertovo riešenie pre  $n = 1$ . Máme teda Cauchyho úlohu

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \text{na } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = g, u_t = h, & \text{na } \Gamma := \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases} \quad (8.14)$$

kde  $g, h$  sú dané funkcie. Všimnime si, že rovnica sa dá faktorizovať (reps. jej diferenciálny operátor) a má tvar

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0.$$

Ak si označíme  $v := \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u$ , potom dostaneme homogénnu transportnú rovnicu pre  $v$  s konštantnými koeficientami. Vieme teda, že  $v(x, t) = a(x - t)$ , pre  $a(x) = v(x, 0)$ . Potom však

dostaneme rovnicu pre  $u$ :

$$u_t - u_x = a(x - t), \text{ na } \mathbb{R} \times (0, \infty). \quad (8.15)$$

To je zasa nehomogénna transportná rovnica, ktorá implikuje riešenie v tvare

$$u(x, t) = \int_0^t a(x + (t - s) - s) ds + b(x + t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(y) dy + b(x + t),$$

kde  $b(x) = u(x, 0)$ . Využívajúc počiatočných podmienok máme hneď  $b(x) = g(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  a  $a(x) = v(x, 0) = u_t(x, 0) - u_x(x, 0) = h(x) - g'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Po dosadení dostaneme riešenie a nasledujúcu vetu.

### Veta 8.4.18.

Nech  $g \in C^2$ ,  $h \in C^1$  a  $u$  je dané

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [g(x + t) - g(x - t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+.$$

Potom

- (I)  $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ ,
- (II)  $u_{tt} - u_{xx} = 0$ , na  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ ,
- (III)  $\lim_{(x,t) \rightarrow (x^0,0), t>0} u(x, t) = g(x^0)$   
 $\lim_{(x,t) \rightarrow (x^0,0), t>0} u_t(x, t) = h(x^0)$ ,  $\forall x^0 \in \mathbb{R}$ .

### Poznámka 8.4.19.

Riešenie má vlastne tvar  $u(x, t) = F(x + t) + G(x - t)$ , čo je dôsledoko faktorizácie. Je zrejmé, že ak  $g \in C^k$  a  $h \in C^{k-1}$ , tak  $u \in C^k$ , ale nemôže byť hladšie. Takže na rozdiel od rovnice vedenia tepla, táto rovnica nezhladzuje počiatočné dáta. Pre dimenzie  $n = 2, 3$  sa formuly riešení nazývajú Poissonova, resp. Kirchhoffova. Pre nehomogénny problém možno opäť použiť Duhamelov princíp.

## 8.5. Čo sa nevošlo

Pozrieme sa ešte na metódu neurčitých koeficientov pre nehomogénne rovnice s konštantnými koeficientami.

### Veta 8.5.1.

Nech  $\mathbf{b}(t)$  je stĺpec, ktorého zložky sú polynómy stupňa najviac  $m$ . Nech nula je  $k$ -násobný koreň charakteristickej rovnice matice  $A$ . Potom existuje partikulárne riešenie systému  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$ , ktorého zložky sú polynómy stupňa najviac  $m + k$ .

### Poznámka 8.5.2.

Platí, že  $k = 0$ , práve vtedy, keď  $\det \mathbf{A} \neq 0$ . Veta platí, aj keď prvky  $\mathbf{A}$  a popríklad koeficienty polynómu v zložkách  $\mathbf{b}(t)$  sú komplexné čísla.

### Veta 8.5.3.

Nech  $\mathbf{b}(t)$  je stĺpec tvaru  $e^{\alpha t} \mathbf{P}_m(t)$ , kde  $\alpha \in \mathbb{C}$  a zložky stĺpca  $\mathbf{P}_m$  sú polynómy stupňa najviac  $m$ . Potom substitúcia  $\mathbf{y} = e^{\alpha t} \mathbf{u}$  prevedie systém  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + e^{\alpha t} \mathbf{P}_m(t)$  na nehomogénny systém, kde zložky stĺpca pravých strán sú polynómy stupňa najviac  $m$ .

### Veta 8.5.4.

Nech  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Ak je  $\mathbf{y} = \mathbf{y}^1 + i\mathbf{y}^2$  riešením sústavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + e^{(\alpha+\beta i)t} \mathbf{P}_m(t)$ , potom je  $\mathbf{y}^1$  riešením sústavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + e^{\alpha t} \cos \beta t \mathbf{P}_m(t)$  a  $\mathbf{y}^2$  riešením sústavy  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + e^{\alpha t} \sin \beta t \mathbf{P}_m(t)$ .

## Príklad 8.5.5.

Hľadáme partikulárne riešenie sústavy  $y_1' = 2y_1 - y_2$ ,  $y_2' = -y_1 + 2y_2 - 5e^t \sin t$ . Zrejme  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$  a upravená pravá strana  $(0, -5e^{(1+i)t})$ . Zavedením substitúcie  $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{u}e^{(1+i)t}$  dostaneme (komplexný) systém

$$u_1' = (1 - i)u_1 - u_2, \quad u_2' = -u_1 + (1 - i)u_2 - 5.$$

Tu použijeme vetu 8.5.1 a dostaneme tak partikulárne riešenie  $\mathbf{u}_p = (2i - 1, 3i + 1)^T$ . Spätnou transformáciou dostaneme partikulárne riešenie pôvodnej sústavy v (komplexnom) tvare

$$\tilde{y}_1 = (2i - 1)e^x(\cos x + i \sin x), \quad \tilde{y}_2 = (3i + 1)e^x(\cos x + i \sin x).$$

Takže nakoniec hľadané reálne riešenie:

$$y_1 = e^x(2 \cos x - \sin x), \quad y_2 = e^x(3 \cos x + \sin x).$$

Ukážeme si ďalšiu metódu výpočtu pomocou tzv. exponenty matice  $\mathbf{A}$ . Vieme, že riešenie rovnice  $y' = ay$  tvoria funkcie tvaru  $y(t) = ce^{at}$ ,  $y(t_0) = c$ . Analogicky by mohlo platiť, že riešenie systému rovníc, ktorý môžeme zapísať v maticovom tvare  $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$ , bude  $Y(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{C}$ . Exponenciálu matice môžeme definovať analogicky ako

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}.$$

Najprv je potreba povedať, že takýto nekonečný rad konverguje pre každú štvorcovú maticu  $\mathbf{A}$ . Zaved' me normu matice takto

$$\|\mathbf{A}\| = \max \{ \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1 \} = \max \left\{ \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \neq 0 \right\}, \quad (8.16)$$

kde  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ . Zrejme pre ňu platí  $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|$  a teda  $\|\mathbf{A}^m\| \leq \|\mathbf{A}\|^m$ . Z toho ale máme

$$\left\| \sum_{m=k}^l \frac{\mathbf{A}^m}{m!} \right\| \leq \sum_{m=k}^l \frac{\|\mathbf{A}\|^m}{m!} \leq \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\|\mathbf{A}\|^m}{m!} \rightarrow 0,$$

pre  $k \rightarrow \infty$ , tj. postupnosť čiastočných súčtov spĺňa Bolzanovu-Cauchyovu podmienku (je fundamentálna).

### Poznámka 8.5.6.

Ak  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  sú komutatívne, potom  $e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$ . Ak  $\mathbf{O}$  je nulová matica, potom  $e^{\mathbf{O}} = \mathbf{I}$ .

### Veta 8.5.7.

Matica  $\mathbf{A} \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ , kde  $\mathbb{K}$  je algebraicky uzavreté pole je podobná s maticou  $J_{\mathbf{A}}$  v Jordanovom normálnom (kanonickom) tvare. Pritom matica  $J_{\mathbf{A}}$  je určená jednoznačne až na poradie Jordanových blokov.

## Problém 8.5.8.

Majme maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ukážte, že matica má dva dvojnásobné (algebraická násobnosť je 2) korene  $1, -1$ , pričom prvý z nich má geometrickú násobnosť 1 a druhý 2. Teda

$$J_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Majme  $A = V J_A V^{-1}$ , potom pre výpočet exponenciály matice platí

$$e^A = e^{V J_A V^{-1}} = V e^{J_A} V^{-1} = V \operatorname{diag}(e^{J_1}, \dots, e^{J_k}) V^{-1},$$

kde

$$e^{\mathbf{J}_i} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i} & \frac{e^{\lambda_i}}{1!} & \frac{e^{\lambda_i}}{2!} & \cdots & \frac{e^{\lambda_i}}{(r-1)!} \\ 0 & e^{\lambda_i} & \frac{e^{\lambda_i}}{1!} & \cdots & \frac{e^{\lambda_i}}{(r-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_i} & \frac{e^{\lambda_i}}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_i} \end{bmatrix},$$

pričom  $r$  je veľkosť danej bunky. A teda pre maticu  $\mathbf{A}(t)$  konečne máme

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{V}\mathbf{J}_{\mathbf{A}(t)}\mathbf{V}^{-1}} = \mathbf{V}e^{\mathbf{J}_{\mathbf{A}(t)}}\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V} \operatorname{diag} \left( e^{\mathbf{J}_1(t)}, \dots, e^{\mathbf{J}_k(t)} \right) \mathbf{V}^{-1},$$

kde

$$e^{\mathbf{J}_i(t)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & \frac{t e^{\lambda_i t}}{1!} & \frac{t^2 e^{\lambda_i t}}{2!} & \cdots & \frac{t^{r-1} e^{\lambda_i t}}{(r-1)!} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & \frac{t e^{\lambda_i t}}{1!} & \cdots & \frac{t^{r-2} e^{\lambda_i t}}{(r-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_i t} & \frac{t e^{\lambda_i t}}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}.$$

Ak spravíme lineárnu transformáciu  $\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , kde  $\mathbf{T} \in M_{n \times n}$  je regulárna matica, potom dostaneme systém  $\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}$ , pričom  $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ . Hovoríme, že takéto systémy sú **ekvivalentné**.

### Lema 8.5.9.

Pre všetky  $i = 1, \dots, n$  je  $\mathbf{T}^i$  vlastný vektor matice  $\mathbf{A}$  zodpovedajúci vlastnému číslu  $\lambda_i$ .

## Veta 8.5.10.

Systém (2.4) je ekvivalentný so systémom  $\mathbf{x}' = \mathbf{B} \mathbf{x}$ , kde  $\mathbf{B}$  je Jordanova forma matice  $\mathbf{A}$ , tj.

$$\mathbf{B} = J_{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{S}_k \end{bmatrix} = \text{diag}(\mathbf{D}, \mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_k),$$

kde

$$\mathbf{S}_j = \begin{bmatrix} \lambda_{m_j} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{m_j} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_j} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{m_j} \end{bmatrix},$$

kde  $m_j$  je veľkosť danej Jordanovej bunky,  $m + m_1 + \dots + m_k = n$  a  $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ ,  $\lambda_i$  sú vlastné hodnoty matice  $\mathbf{A}$ .

## Poznámka 8.5.11.

Riešme Cauchyho úlohu (2.4),  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0$  a predpokladajme, že platí predchádzajúca veta. Potom  $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{B}t} \mathbf{x}^0$ , kde  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{y}^0$ . Takže riešenie pôvodnej úlohy má tvar  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{T} \mathbf{x}(t) = \mathbf{T} e^{\mathbf{B}t} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{y}^0$ .



## Príklad 8.5.12.

Majme problém

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \mathbf{y}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Potom  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$  a k nim prislúchajúce vlastné vektory sú  $\mathbf{T}^1 = (1, 1)^T, \mathbf{T}^2 = (3, 4)^T$ . Z toho máme

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

, teda riešenie má tvar

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{T} \operatorname{diag}(e^{-2t}, e^{-3t}) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{y}^0$$

## Definícia 8.5.13.

Ohraničená oblasť je ***k*-násobne súvislá**, ak jej hranicu tvorí *k* uzavretých kriviek bez spoločných bodov.

Skúmanie stability riešenia systému (1.6) môže byť redukované na skúmanie stability nulového riešenia nového systému rovníc, získaného pomocou lineárnej transformácie. Pojednáva o tom nasledujúca veta.

## Veta 8.5.14.

Riešenie  $\psi(t, t_0, \xi)$  rovnice (1.6) je stabilné (asymptoticky stabilné, nestabilné)  $\Leftrightarrow$  triviálne riešenie  $\psi(t, t_0, 0) = 0$  rovnice  $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ , kde  $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x} + \psi(t, t_0, \xi)) - \mathbf{f}(t, \psi(t, t_0, \xi))$  je stabilné (asymptoticky stabilné, nestabilné).

### Veta 8.5.15.

Rovnica (2.1) ( $\mathbf{A}, \mathbf{b}$  sú spojité) je stabilná (asymptoticky stabilná, nestabilná)  $\Leftrightarrow$  homogénna rovnica k nej prislúchajúca je stabilná (asymptoticky stabilná, nestabilná).

### Veta 8.5.16.

Nech  $D$  je dvojnásobne súvislá oblasť fázového priestoru systému  $x' = f(x, y)$ ,  $y' = g(x, y)$  a  $\rho(x, y)$  je taká funkcia, že  $\rho f, \rho g \in C^1$ . Potom, ak  $\operatorname{div}(\rho f, \rho g)$  nemení znamienko na  $D$  s.v., tento systém nemá viac ako jednu periodickú trajektóriu v  $D$ .

### Veta 8.5.17.

Nech pravá strana  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  sústavy (1.6) spojitě diferencovateľná na  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Potom

- (I) ku  $\forall (t_0, \mathbf{y}^0) \in \Omega \exists$  v nejakom jeho okolí  $n$  nezávislých prvých integrálov, ak navyše uvažujeme autonómny systém, potom ku  $\forall \mathbf{y}^0 : \mathbf{f}(\mathbf{y}^0) \neq 0$ ,  $\exists$  v nejakom jeho okolí  $(n - 1)$  nezávislých prvých integrálov nezávisiacich na  $t$ .
- (II) Ak sú  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$  nezávislé v  $(t_0, \mathbf{y}^0)$  prvé integrály sústavy (1.6), potom v nejakom jeho okolí sa dá každý prvý integrál tejto sústavy napísať v tvare  $\Psi(\Theta_1(t, \mathbf{y}), \Theta_2(t, \mathbf{y}), \dots, \Theta_n(t, \mathbf{y}))$ , pričom  $\Psi$  je vhodná spojitě diferencovateľná funkcia. Navyše, existuje najviac  $(n - 1)$  nezávislých v bode  $(t_0, \mathbf{y}^0)$  prvých integrálov sústavy (1.6) nezávisiacich explicitne na  $t$ , okrem prípadu, kedy  $f(t, \mathbf{y})$  je identicky nula na nejakom okolí bodu  $(t_0, \mathbf{y}^0)$ . Ak je  $f(t_0, \mathbf{y}^0) \neq 0$  a  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{n-1}$  sú nezávisiace na  $t$  prvé integrály, ktoré sú nezávislé v bode  $(t_0, \mathbf{y}^0)$ , potom každý nezávisiaci na  $t$  prvý integrál sa v nejakom okolí bodu  $\mathbf{y}^0$  dá zapísať v tvare  $\Psi(\Theta_1(\mathbf{y}), \Theta_2(\mathbf{y}), \dots, \Theta_{n-1}(\mathbf{y}))$ , pričom  $\Psi$  je vhodná spojitě diferencovateľná funkcia.

## 8.6. Približné metódy riešenia diferenciálnych rovníc

**Picardova metóda postupných aproximácií:**

Majme systém (1.6), ktorý spĺňa podmienku  $\mathbf{y}(t_0) = \tilde{\mathbf{y}}^0$ , pričom predpokladáme, že riešenie spĺňa predpoklady zaručujúce existenciu a jednoznačnosť. Nech prvá aproximácia riešenia tejto začiatočnej úlohy je  $\mathbf{y}^0(t)$ . Väčšinou berieme za prvú aproximáciu začiatočnú podmienku (teda konštantnú funkciu), tj.  $\mathbf{y}^0(t) = \tilde{\mathbf{y}}^0$ . Následné aproximácie definujeme ako

$$\mathbf{y}^k(t) = \tilde{\mathbf{y}}^0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}^{k-1}(s)) ds, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (8.17)$$

Takže máme postupnosť funkcií, ktorá konverguje rovnomerne k riešeniu Cauchyho úlohy, tj.  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{y}^m(t) = \mathbf{y}(t)$ . Táto metóda je zahrnutá aj v dôkaze Picardovej-Lidelöfovej vety, ktorá využíva vetu o pevnom bode (uvedenú na prednáške). Ak sa rozhodneme pre určité  $m$ , dostaneme približné riešenie, pričom chybu tejto aproximácie možno odhadnúť nerovnosťou

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^m(t)\| \leq \frac{M(hL)^m}{L m!},$$

kde  $M = \max_G \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\|$  a  $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$  Uvedieme si príklad.

## Príklad 8.6.1.

Majme Cauchyho úlohu  $x' = tx$ ,  $y' = xy$ ,  $x(0) = y(0) = 1$ . Prvá aproximácia má tvar

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t f_1(s, x_0, y_0) ds = 1 + \int_0^t s ds = 1 + \frac{t^2}{2},$$

$$y_1(t) = 1 + \int_0^t f_2(s, x_0, y_0) ds = 1 + \int_0^t ds = 1 + t.$$

Druhá aproximácia má tvar

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t f_1(s, x_1, y_1) ds = 1 + \int_0^t s(1+s) ds = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3},$$

$$y_2(t) = 1 + \int_0^t f_2(s, x_1, y_1) ds = 1 + \int_0^t \left(1 + \frac{s^2}{2}\right)(1+s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{8}.$$

A tretia

$$x_3(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^5}{30} + \frac{t^6}{48},$$

$$y_3(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \frac{17t^5}{120} + \frac{t^6}{24} + \frac{17t^7}{1008} + \frac{t^8}{192}.$$

### Metóda využívajúca rozvoje do mocninných radov:

Ďalšou metódou približných riešení je využitie mocninných radov. My sa pozrieme iba na najjednoduchšiu z nich. Zopakujeme si niektoré fakty z teórie Taylorových radov.

## Poznámka 8.6.2.

1. Ak Taylorov rad  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  konverguje na intervale  $I : |x - x_0| < R$ , kde  $R > 0$ , potom tento rad definuje funkciu  $f(x)$ , ktorá je spojitá v každom  $x \in I$ .
2. Ak  $f$  je definovaná Taylorovým radom, tj.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ,  $|x - x_0| < R$ , tak  $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{(k-1)}$ ,  $|x - x_0| < R$ .
3. Ak  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ,  $|x - x_0| < R$  a  $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$ ,  $|x - x_0| < R$ , potom  $f = g \Leftrightarrow a_k = b_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, \infty$ .
4. Ak  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ,  $|x - x_0| < R$ , potom  $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ ,  $k = 0, 1, \dots$
5. Ak  $f \in C^\infty(I)$ ,  $I : |x - x_0| < h$ , potom  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$ , kde  $R_n$  je zvyšok. Ak navyše  $R_n \rightarrow 0$  pre  $n \rightarrow \infty$ , potom  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ ,  $I : |x - x_0| < h$

Pripomeňme, že pre rovnicu vyššieho rádu

$$y^{(n)} + f_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + f_1(t)y' + f_0 y = Q(t) \quad (8.18)$$

platí nasledujúce tvrdenie:

## Veta 8.6.3.

If  $Q, f_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  sú analytické v bode  $t_0$  (majú Taylorov rad na okolí tohto bodu), potom existuje jediné riešenie  $y$  rovnice (8.18), ktoré je analytické v bode  $t_0$  a spĺňa počiatočné podmienky  $y^{(k)}(t_0) = a_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

Analogicky chceme riešiť aj systémy diferenciálnych rovníc. Pre ne platí obdobné tvrdenie.

### Veta 8.6.4.

Ak  $\mathbf{f}$  je analytická v bode  $(t_0, \mathbf{a})$ , tj. každá  $f_k$  má Taylorov rad na intervale  $I \subset \mathbb{R}^{n+1}$  :  $|t - t_0| < r$ ,  $|y_k - a_k| < r$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , a ak pre každý bod  $(t, \mathbf{y}) \in I$  platí

$$|f_k(t, \mathbf{y})| \leq M, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

kde  $M > 0$ . Potom existuje interval  $J \subset \mathbb{R}$ , na ktorom existuje práve jedna funkcia  $\mathbf{y}$ , ktorá je analytická v bode  $t_0$  a rieši Cauchyho úlohu (1.11). Tj. každá  $y_k$  má Taylorov rad na okolí bodu  $t_0$  a koeficienty sú dané hodnotami  $\frac{y_i^{(j)}(t_0)}{j!}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Navyše interval  $J$  je aspoň  $\tilde{J} : |t - t_0| < \min\left(r, \frac{r}{(n+2)M}\right)$ .

### Príklad 8.6.5 (Metóda postupných derivácií).

Majme systém  $(x'_1, x'_2) = (tx_2, x_1x_2)$  s podmienkou  $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 1)$ . Pravá strana je analytická na  $\mathbb{R}^3$  a teda hľadáme riešenie v tvare

$$x_i(t) = x_i(0) + x'_i(0)t + \frac{x''_i(0)}{2}t^2 + \dots, \quad i = 1, 2.$$

Zrejme platí

$$x'_1 = tx_2, \quad x'_2 = x_1x_2,$$

$$x''_1 = x_2 + tx'_2, \quad x''_2 = x_1x'_2 + x_2x'_1,$$

$$x'''_1 = 2x'_2 + tx''_2, \quad x'''_2 = x_1x''_2 + 2x'_2x'_1 + x_2x''_1,$$

atď. Z toho dostaneme, že koeficienty sa rovnajú  $x_1(0)' = 0$ ,  $x_2(0)' = 1$ ,  $x_1(0)'' = 1$ ,  $x_2(0)'' = 1$ ,  $x_1(0)''' = 2$ ,  $x_2(0)''' = 2$ , atď. Takýmto spôsobom dostaneme požadované riešenie (alebo skôr aproximáciu)

$$x_1(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{8} + \dots,$$

$$x_2(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{7t^4}{24} + \dots$$

## Príklad 8.6.6 (Metóda neurčitých koeficientov).

Majme systém  $(x_1', x_2') = (tx_2, x_1x_2)$  s podmienkou  $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 1)$ . Pravá strana je analytická na  $\mathbb{R}^3$  a teda hľadáme riešenie v tvare

$$x_1(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots,$$

$$x_2(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots$$

Derivovaním dostaneme

$$a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + \dots = t(b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots),$$

$$b_1 + 2b_2t + 3b_3t^2 + \dots = (a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots)(b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots).$$

Z toho dostaneme rovnice

$$a_1 = 0, \quad b_1 = a_0b_0,$$

$$2a_2 = b_0, \quad 2b_2 = a_0b_1 + a_1b_0,$$

$$3a_3 = b_1, \quad 3b_3 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0,$$

atď. Hodnoty  $a_0, b_0$  určíme zo začiatočných podmienok a zvyšné koeficienty z týchto rovníc. A tak opäť dostaneme riešenie v tvare Taylorovho radu.

## Newtonova-Kantorovičova metóda:

Je to známa metóda riešenia veľmi všeobecných nelineárnych úloh. Vychádza z Newtonovej metódy dotyčníc na riešenie algebraických rovníc.

## Diferenciálna rovnica prvého rádu $y' = f(x, y)$ , $y(x_0) = y_0$ :

Nech nejaká funkcia (prvá aproximácia)  $y_0(x)$  splňa počiatočnú podmienku  $y_0(x_0) = y_0$ .

Nasledujúcu aproximáciu zostrojíme ako riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice

$$y_1'(x) - \frac{\partial f(x, y_0(x))}{\partial y} y_1(x) = f(x, y_0(x)) - \frac{\partial f(x, y_0(x))}{\partial y} y_0(x),$$

ktoré spĺňa počiatocnú podmienku  $y_1(x_0) = y_0$ . Podobne postupujeme ďalej tak, že aproximáciu  $y_{n+1}$  zostrojíme ako riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice

$$y_{n+1}'(x) - \frac{\partial f(x, y_n(x))}{\partial y} y_{n+1}(x) = f(x, y_n(x)) - \frac{\partial f(x, y_n(x))}{\partial y} y_n(x),$$

ktoré spĺňa počiatocnú podmienku  $y_{n+1}(x_0) = y_0$ . Táto rovnica je riešiteľná pre ľubovoľné koeficienty  $p_n(x) := f_y'(x, y_n(x))$ ,  $q_n(x) := f(x, y_n(x)) - f_y'(x, y_n(x)) y_n(x)$ . Platí

$$y_{n+1}(x) = e^{\int_{x_0}^x p_n(x) dx} \left( y_0 + \int_{x_0}^x q_n(z) e^{-\int_{x_0}^z p_n(x) dx} dz \right).$$

Uved' me podmienky konvergencie a odhad chyby približného riešenia. Označme

$$\rho := \max_Q \left| y_0(x) - y_0 - \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt \right|, \quad \gamma := a \rho M_2 e^{2M_1 a},$$

kde  $|f_y'(x, y)| \leq M_1$ ,  $|f_{yy}''(x, y)| \leq M_2$ . Ak sú splnené nerovnosti

$$\gamma \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{2\rho}{1 + \sqrt{1 - 2\gamma}} \leq b,$$

tak postupné aproximácie spĺňajú nerovnosť  $|y_n(x) - y_0| \leq b$  a rovnomerne konvergujú k skutočnému riešeniu na intervale  $|x - x_0| \leq a$ . Navyše platí  $|y_n(x) - y(x)| \leq \frac{(2\gamma)^{2^{n-1}} \rho}{2^{n-1}}$

**$m$ -rozmerný diferenciálny systém rovníc prvého rádu  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$  :**

Nech nejaká funkcia (prvá aproximácia)  $\mathbf{y}^0(x)$  spĺňa počiatocnú podmienku  $\mathbf{y}^0(x_0) = \mathbf{y}_0$ . Nasledujúcu aproximáciu zostrojíme ako riešenie systému lineárnych diferenciálnych rovníc

$$(y_j^1)'(x) - \langle \nabla_{\mathbf{y}} f_j(x, \mathbf{y}^0(x)), \mathbf{y}^1(x) \rangle = f_j(x, \mathbf{y}^0(x)) - \langle \nabla_{\mathbf{y}} f_j(x, \mathbf{y}^0(x)), \mathbf{y}^0(x) \rangle, \quad j = 1, \dots, m$$

ktoré spĺňa počiatocnú podmienku  $\mathbf{y}^1(x_0) = \mathbf{y}_0$ . Podobne postupujeme ďalej tak, že aproximá-



ciu  $\mathbf{y}^{n+1}$  zostrojíme ako riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice

$$(\mathbf{y}_j^{n+1})'(x) - \langle \nabla_{\mathbf{y}} f_j(x, \mathbf{y}^n(x)), \mathbf{y}^{n+1}(x) \rangle = f_j(x, \mathbf{y}^n(x)) - \langle \nabla_{\mathbf{y}} f_j(x, \mathbf{y}^n(x)), \mathbf{y}^n(x) \rangle, \quad j = 1, \dots, m$$

ktoré spĺňa počiatočnú podmienku  $\mathbf{y}_{n+1}(x_0) = \mathbf{y}_0$ . Koeficienty tohto systému sú vo všeobecnosti premenné, a teda integrovanie tohto systému je úloha dosť pracná. Navyše komplikáciou je aj fakt, že sa menia v každom kroku. Dá sa však použiť modifikácia tejto metódy:

$$(\mathbf{y}_j^{n+1})'(x) - \langle \nabla_{\mathbf{y}} f_j(x, \mathbf{y}^0(x)), \mathbf{y}^{n+1}(x) \rangle = f_j(x, \mathbf{y}^n(x)) - \langle \nabla_{\mathbf{y}} f_j(x, \mathbf{y}^0(x)), \mathbf{y}^n(x) \rangle, \quad j = 1, \dots, m$$

ktoré spĺňa počiatočnú podmienku  $\mathbf{y}_{n+1}(x_0) = \mathbf{y}_0$ .

### Veta 8.6.7 (Vlastnosti ortogonálneho doplnku).

Nech  $H$  je Hilbertov priestor. Pre ľubovoľnú  $A \subseteq H$  je  $A^\perp$  uzavretý podpriestor a  $A \subseteq A^{\perp\perp}$ . Pre  $A \subseteq B \subseteq H$  je  $B^\perp \subseteq A^\perp$ . Navyše  $A^{\perp\perp\perp} = A^\perp$ .

### Veta 8.6.8 (O úplnosti priestorov postupností).

- (I) Pre  $p \in [1, \infty]$  sú priestory  $l^p$  úplné (Banachove).
- (II) Priestory  $c, c_0$  sú uzavreté v  $l^\infty$  a sú teda úplné (v norme  $l^\infty$ ).
- (III) Priestor  $c_{00}$  nie je úplný.

### Príklad 8.6.9.

Uvažujme postupnosť  $z_n = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\} \in c_{00}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Zrejme pre  $n > m$  je  $z_n - z_m = \{0, 0, \dots, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\}$  a teda  $\|z_n - z_m\|_\infty = \sup\{\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+2}, \dots, \frac{1}{n}\} = \frac{1}{m+1} \rightarrow 0$ . Ale  $z_n \rightarrow z = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\} \notin c_{00}$  ( $\in c_0 \setminus c_{00}$ ).

### Veta 8.6.10 (O separabilnosti priestorov postupností).

- (I) Pre  $p \in [1, \infty)$  sú priestory  $l^p$  separabilné.
- (II) Priestory  $c, c_0$  sú separabilné.
- (III) Priestor  $l^\infty$  nie je separabilný.

## Problém 8.6.11.

Ako je to s priestorom  $c_{00}$ ?

## Hölderove priestory:

Majme  $\lambda \in (0, 1]$  a normu

$$\|f\|_{k,\lambda} := \max_k \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |f^{(k)}(\mathbf{x})| + \max_k \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}} \frac{\|f^{(k)}(\mathbf{x}) - f^{(k)}(\mathbf{y})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\lambda}$$

$$C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}, \mathbb{K}) := \{f \in C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{K}) : \|f\|_{\alpha,\lambda} < \infty, \forall \alpha : |\alpha| = k\}$$

Priestor  $C^{0,\lambda}$  tvoria hölderovsky spojité funkcie, tj. funkcie spĺňajúce  $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq c \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\lambda$ ,  $c > 0$ . Špeciálne pre  $\lambda = 1$  hovoríme o lipschitzovsky spojitých funkciách.

## Veta 8.6.12.

Ak  $\Omega$  je otvorená a ohraničená, potom  $(C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{k,\lambda})$  je Banachov priestor. Tieto priestory nie sú separabilné.

## 8.6.13. Spektrum operátora

Pri štúdiu lineárneho zobrazenia nám často pomôže, ak vieme toto zobrazenie rozložiť na jednoduchšie zobrazenia (pomocou projekcie na príslušné priestory) (reprezentácia matice v Jordanovom kanonickom tvare nám poskytuje rozklad na zobrazenia príslušné jednotlivým Jordanovým bunkám súvisiac s vlastnými číslami). Tento rozklad umožňuje tiež jednoduchý funkčný kalkulus pre dané zobrazenie (napr. mocnina operátora). V tejto kapitole chceme určiť spektrum operátora v nekonečnorozmernom prípade. Ukážeme, že spektrálny rozklad možno urobiť napr. pre normálne zobrazenia.

Majme Banachov priestor  $(X, \|\cdot\|)$  nad  $\mathbb{C}$  a lineárny operátor  $T : X \rightarrow X$  s definičným oborom  $D_T$  a oborom hodnôt  $H_T$ . Podobne ako pre matice, skalár  $\lambda$  ku ktorému existuje  $0 \neq x \in D_T : Tx = \lambda x$  sa nazýva **vlastnou hodnotou operátora  $T$**  a nulový priestor (kernel)  $\mathcal{N}(\lambda I - T)$  sa nazýva **priestorom vlastných vektorov (funkcií)**. Mohlo by sa zdať, že aj v prípade nekonečnej dimenzie stačí na geometrickú analýzu poznať vlastné hodnoty a vektory operátora.

Nasledujúci príklad ukazuje, že to tak nie je.

### Príklad 8.6.14.

Nech  $H = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  a  $(Tf)(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)} f(s) ds$ . Zrejme  $D_T = H$  a  $H_T \subset H$ . Keď že  $(Te^{i\omega s})(t) = \frac{e^{i\omega t}}{1+i\omega}$ , zdalo by sa, že je vlastným vektorom operátora  $T$  zodpovedajúcim vlastnej hodnote  $\lambda = \frac{1}{1+i\omega}$ . Ale  $e^{i\omega s} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , takže táto úvaha nie je správna.

Potrebuje poznať tzv. spektrum operátora  $T$ . Zopakujme si čo vieme pre matice  $M$ ,  $\lambda$  je vlastnou hodnotou práve vtedy, keď  $\lambda I - M$  nie je prostá (nemá inverziu), čiže keď  $\mathcal{N}(\lambda I - T)$  je netriviálny. Pre operátory sa ukazuje, že kľúčové je štúdium tých  $\lambda$ , pre ktoré  $\lambda I - T$  nemá spojité inverzné zobrazenie (spektrum). V prípade spojitých lineárnych operátorov existencia inverzie implikuje jej spojitosť. Keď že uvažujeme aj nespojité lineárne operátory potrebujeme pridať podmienku **uzavretosti** operátora  $T$  (operátor je uzavretý, ak je jeho graf uzavretý v  $X \oplus Y$  a množina uzavretých lineárnych operátorov obsahuje spojité lineárne operátory). Príklad nespojitého uzavretého operátora je derivácia.

### Definícia 8.6.15.

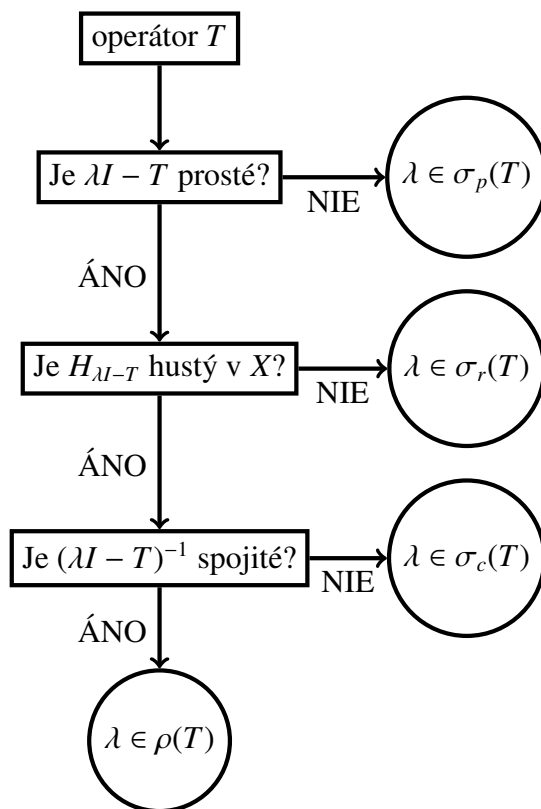
Povieme, že  $\lambda \in \mathbb{C}$  patrí do **rezolventnej množiny** (doplnok k spektru)  $\rho(T)$ , ak je  $\lambda I - T$  prosté,  $H_{\lambda I - T}$  je hustý v  $X$  a  $(\lambda I - T)^{-1}$  je spojité. Ďalej  $\lambda \in \mathbb{C}$  patrí do **spektra**  $\sigma(T)$ , ak nepatrí do rezolventnej množiny.

Keď že existuje viacero možných príčin, pre ktoré sa  $\lambda$  nedostane do rezolventnej množiny, musíme spektrum rozdeliť.

### Definícia 8.6.16.

- **bodové spektrum** (vlastné čísla)  $\sigma_p(T)$  je množina  $\lambda \in \mathbb{C}$ , pre ktoré  $\lambda I - T$  nie je prosté;
- **spojité spektrum**  $\sigma_c(T)$  je množina  $\lambda \in \mathbb{C}$ , pre ktoré  $\lambda I - T$  je prosté,  $H_{\lambda I - T}$  je hustý v  $X$ , ale  $(\lambda I - T)^{-1}$  nie je spojité;
- **residuálne (zbytkové) spektrum**  $\sigma_r(T)$  je množina  $\lambda \in \mathbb{C}$ , pre ktoré  $\lambda I - T$  je prosté, ale  $H_{\lambda I - T}$  nie je hustý v  $X$ .

Zrejme  $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$ . Existuje aj podrobnejšie členenie spektra (napr.



Obr. 8.2: Algoritmus na zistenie spektra.

existuje diskrétna a esenciálne spektrum, aproximatívne bodové spektrum a pod.). Spektrum  $\sigma(T)$  je uzavretá množina v  $\mathbb{C}$  a  $\rho$  je teda otvorená.

### Príklad 8.6.17.

Nech  $\dim X$  je konečná, potom platí  $\dim X = \dim \mathcal{N}(\lambda I - T) + H_{\lambda I - T}$  a  $\lambda I - T$  je prostá práve vtedy, keď  $\dim \mathcal{N}(\lambda I - T) = 0$ . Teda  $\sigma_r(T) = \emptyset$ . Navyše z prostosti máme existenciu inverzie a aj jej spojitosť (konečná dimenzia). Teda aj  $\sigma_c(T) = \emptyset$ .

## Veta 8.6.18.

- Spektrum  $\sigma(T)$  je uzavretá množina v  $\mathbb{C}$ . ( $\rho$  je teda otvorená)
- Ak je  $T$  navyše spojitý, potom  $\sigma(T) \neq \emptyset$  je kompaktný a leží v kruhu  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|T\|\}$ .
- Pre tzv. spektrálny polomer  $r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$  platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T\|$  a ak  $X$  je Hilbertov priestor a  $T$  je normálne, tak  $r(T) = \|T\|$ .

## Veta 8.6.19.

- Reziduálne spektrum  $\sigma_r(T)$  normálneho operátora  $T$  je  $\emptyset$ .
- Pre samoadjungovaný operátor platí  $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|] \subset \mathbb{R}$  a  $\sigma_r(T) = \emptyset$ . Navyše, vlastné vektory tvoria ortogonálny systém (separovateľnosť implikuje spočítateľnosť).
- Pre pozitívny operátor platí  $\sigma(T) \subset [0, \infty)$ .
- Pre unitárny operátor platí  $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .

Ďalšia dôležitá trieda operátorov sú **kompaktné** operátory, t.j. také, pre ktoré platí, že pre každú ohraničenú postupnosť  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  v  $X$ , postupnosť  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  obsahuje konvergentnú podpostupnosť.

## Veta 8.6.20 (Spektrálny rozklad).

Nech  $T$  je kompaktný normálny operátor na Hilbertovom priestore. Potom existuje ortonormálna báza vlastných vektorov  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  a postupnosť zodpovedajúcich vlastných hodnôt  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tak, že ak  $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n$  je Fourierov rozvoj prvku  $x$ , tak  $T(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$ .

## 8.6.21. Laplaceova transformácia

Laplaceova transformácia (LT) je v istom zmysle modifikáciou FT, a preto podobnosť rôznych vzorčekov pre obe transformácie nie je náhodná. Základný rozdiel je v definičnom obore funkcií, na ktoré ich aplikujeme. U LT je to napríklad interval  $[0, \infty)$  v prípade funkcií jednej premennej (na intervale  $(-\infty, 0)$  si ju môžeme dodefinovať 0). To umožňuje definovať ju aj pre

funkcie, ktoré nie sú z  $\mathcal{L}^1(0, \infty)$ , stačí iba aby nerástli pre  $t \rightarrow \infty$  rýchlejšie ako nejaká exponenciálna funkcia  $e^{\gamma t}$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Navyše je možno definovať aj pre komplexné hodnoty parametra  $p$  v nejakej polrovine  $\Re(p) > c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  (na rozdiel od reálnej premennej  $\xi$  u FT).

### Definícia 8.6.22.

Množina  $\mathcal{L}_+^1$  obsahuje všetky komplexné funkcie  $f$  jednej reálnej premennej s vlastnosťami:

1.  $f$  je definovaná s.v. na  $[0, \infty)$
2.  $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$ ,  $[a, b] \subset [0, \infty)$
3. existuje  $c_f \in \mathbb{R}$  :  $f e^{-c_f t} \in \mathcal{L}([0, \infty))$

### Poznámka 8.6.23.

Je zrejmé, že ak je pre  $f \in \mathcal{L}_+^1$   $c_f$  také, že  $f e^{-c_f t} \in \mathcal{L}([0, \infty))$ , potom pre každé  $c > c_f$  je aj  $f e^{-c t} \in \mathcal{L}([0, \infty))$ . Dá sa dokonca ukázať, že existuje také  $c_f^* \in [-\infty, \infty)$ , že  $f e^{-c_f t} \notin \mathcal{L}([0, \infty))$  pre  $c < c_f^*$  a  $f e^{-c_f t} \in \mathcal{L}([0, \infty))$  pre  $c > c_f^*$ . My ale nepotrebujeme nájsť také najmenšie možné  $c_f^*$ .

### Definícia 8.6.24.

Pre  $f \in \mathcal{L}_+^1$  definujeme jej **Laplaceovu transformáciu** predpisom

$$(\mathcal{L}f)(p) := \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad p \in \mathbb{C}, \quad \Re(p) \geq c_f,$$

kde  $c_f$  je z definície množiny  $\mathcal{L}_+^1$ .

### Príklad 8.6.25.

1.  $(\mathcal{L}1)(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left[ \frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p}, \quad \Re(p) > 0$
2.  $(\mathcal{L}e^{\alpha t})(p) = \int_0^{\infty} e^{(\alpha-p)t} dt = \left[ \frac{e^{(\alpha-p)t}}{\alpha-p} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha}, \quad \Re(p) > \Re(\alpha)$
3.  $(\mathcal{L}t^\nu)(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^\nu dt = \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^\nu p^{-\nu-1} d\tau = \frac{1}{p-\alpha} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}, \quad \Re(p) > 0$

## Veta 8.6.26 (Základné vlastnosti LT).

Pre  $f, \tilde{f} \in \mathcal{L}_+^1$

- 1)  $\mathcal{L}f$  je spojitá a ohraničená v polrovine  $\Re(p) \geq c_f$
- 2)  $(\mathcal{L}f)(p) \rightarrow 0$  pre  $\Re(p) \rightarrow +\infty$ , aj pre  $\Im(p) \rightarrow \pm\infty$  pri každom pevnom  $\Re(p) \geq c_f$

3) Je to lineárny operátor.

4)  $[\mathcal{L}f(\alpha t)](p) = \frac{1}{\alpha}[\mathcal{L}f(t)](\frac{p}{\alpha}), \alpha > 0, \Re(p) \geq c_f$

5)  $(\mathcal{L}f_\tau)(p) = e^{-p\tau}(\mathcal{L}f)(p)$ , pre  $\Re(p) \geq c_f, \tau > 0, f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ f(t - \tau), & t \geq \tau. \end{cases}$

6)  $[\mathcal{L}(e^{\sigma t} f(t))](p) = (\mathcal{L}f)(p - \sigma), \Re(p) \geq c_f + \Re(\sigma)$

7) Ak  $f \in C^k(\mathbb{R}_0^+), f^{(j)} \in \mathcal{L}_+^1, j = 1, 2, \dots, k$ , potom pre  $n = 1, 2, \dots, k$  platí

$$[\mathcal{L}(f^{(n)})](p) = p^n(\mathcal{L}f)(p) - \sum_{j=0}^{n-1} p^j f^{(n-j-1)}(0^+), \Re(p) \geq c,$$

kde  $c$  je najväčšia z konštánt odpovedajúcich deriváciám funkcie  $f$

8)  $\mathcal{L}f$  je holomorfná v polrovine  $\Re(p) \geq c_f$  a platí

$$\frac{d^n}{dp^n} (\mathcal{L}f)(p) = [\mathcal{L}((-1)^n f)](p), n \in \mathbb{N}.$$

9) Ak  $f * \tilde{f}$  existuje s.v. pre  $t$ , potom  $f * \tilde{f} \in \mathcal{L}_+^1$  a platí

$$[\mathcal{L}(f * \tilde{f})](p) = (\mathcal{L}f)(p) (\mathcal{L}\tilde{f})(p), \Re(p) \geq \max\{c_f, c_{\tilde{f}}\}.$$