

Prednáška 1

Podmienky

- ☞ Účast' na prednáškach je nepovinná - zväžiť
- ☞ Účast' na cvičeniach je povinná - vid' podmienky na získanie "zápočtu"
- ☞ Jedinečná možnosť pýtať sa!!!
- ☞ Podmienky na skúšku (upresnené neskôr)

Sylabus

(I) Systémy diferenciálnych rovníc (DR vyšších rádov)

- (i) Existencia a jednoznačnosť a predĺžiteľnosť riešenia
- (ii) Rovnice s konštantnými koeficientami
- (iii) Prvé integrály diferenciálnych rovníc
- (iv) Teória stability riešení diferenciálnych rovníc

(II) Základné parciálne diferenciálne rovnice (ako dodatok)

(III) Priestory funkcií

- (i) Priestory so skalárnym súčinom (Hilbertove priestory)
- (ii) Operátory
- (iii) Úvod do variačného počtu

(IV) Fourierove rady

- (i) Fourierove rady v Hilbertovom priestore
- (ii) Trigonometrické rady

(V) Fourierov integrál, Fourierova transformácia

1.1. Diferenciálne rovnice vyšších rádov

V tejto kapitole sa budeme zaoberať obyčajnými diferenciálnymi rovnicami n -tého rádu, kde $n \geq 1$.

Definícia 1.1.1.

Nech $\Phi(t, z_0, z_1, \dots, z_n)$ je reálna funkcia $(n + 2)$ premenných, ktorá vzhľadom k premennej z_n nie je konštantná, definovaná na množine $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$. Potom výraz

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

nezávislá premenná neznáme závislá premenná a jej derivácie

nazývame **obyčajnou diferenciálnou rovnicou n -tého rádu**. Jej (klasickým) riešením v Ω na intervale $I \subset \mathbb{R}$ nazývame funkciu $y \in C^n(I)$, pre ktorú platí rovnosť (1.1) a pre každé $t \in I$ je $(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) \in \Omega$.

Poznámka 1.1.2.

Všimnime si, že rovnica (1.1) je vo všeobecnosti v implicitnom tvare. Ak intervalu I patrí krajný koncový bod, uvažujeme príslušnú jednostrannú deriváciu. Všimnime si, že vzťah $y' = (y \circ y)(t)$ nespĺňa našu definíciu diferenciálnej rovnice, ide o nelokálny typ operátora - kompozíciu, ale derivácia je lokálny typ operácie a tak je to pre nás neprípustné.

Motiváciou na študovanie diferenciálnych rovníc je množstvo aplikácií vo fyzike (a iných vedách). Ukážeme si motivačný príklad.

Príklad 1.1.3 (Motivácia I. - matematické kyvadlo).

Uvažujme teleso tvaru gule, hmotnosti m , zavesené na vlákne dĺžky L a hmotnosti M (vlákno sa nedeformuje). Predpokladajme, že vlákno sa môže otáčať o akýkoľvek uhol. Ak na teleso nepôsobí žiadna vonkajšia sila, tak zostane vo zvislej polohe (ľubovoľne dlho) - rovnovážny stav. Ak vychýlime vlákno z tejto polohy o uhol P_0 , bude teleso vykonávať kmitavý pohyb. Ešte si to zidealizujeme (prejdeme od fyzikálneho kyvadla k matematickému) tým, že predpokladáme pohyb vo vákuu (bez trenia), teleso je sústredené do bodu (HB) a $M = 0$. Na odvodenie rovnice potrebujeme 3. pohybové zákony (PZ). Vid' obrázky 1.1(a), 1.1(b).

- Sila F , ktorou držíme HB v začiatkovej polohe P_0 má podľa 3. PZ veľkosť mg . Pohyb však spôsobuje iba tangenciálna zložka tejto sily. Takže platí

$$|F_1| = |F| \sin P(t) = mg \sin P(t).$$

- Uvažujme teraz dve blízke polohy kyvadla A, B v časoch t a $t + \Delta t$, ktorým zodpovedajú uhly $P(t)$ a $P(t + \Delta t) = P(t) + \Delta P(t)$. Ak je Δt dostatočne malé, potom uhol OAB je blízky $\pi/2$ a dĺžka oblúka $\widehat{AB} =: \Delta s$ je približne dĺžka úsečky \overline{AB} . Dostávame teda $\frac{\Delta s}{L} = \sin \Delta P \approx \Delta P - \frac{(\Delta P)^3}{3!} + \frac{(\Delta P)^5}{5!} - \dots$. Keďže aj ΔP je dostatočne malé, potom je $\sin \Delta P \approx \Delta P$ a teda

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = L \frac{\Delta P}{\Delta t}.$$

Preto pre $\Delta t \rightarrow 0$, potom $s' = LP'$ ($s'' = LP''$) (vzťah oblúkovej a uhlovej rýchlosti).

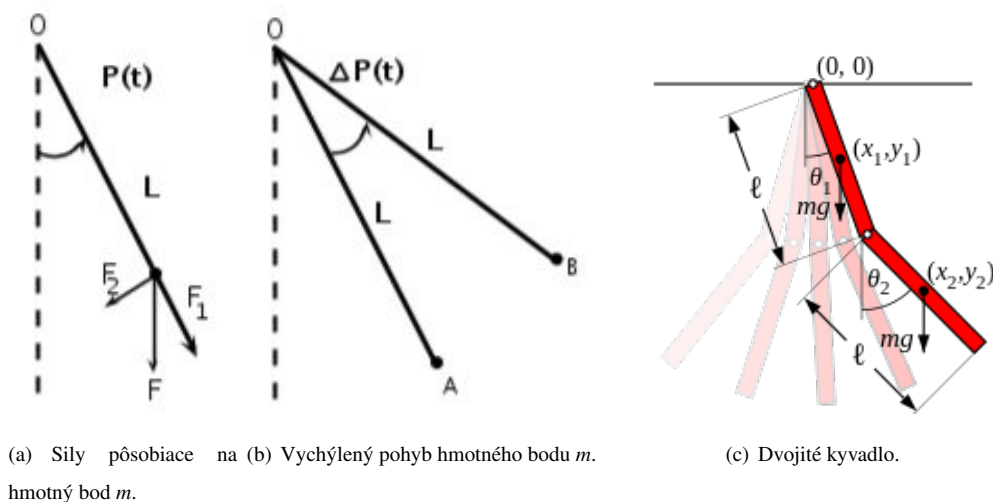
- Z 2. PZ a predchádzajúcich rovností máme rovnosť

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = mL \frac{d^2 P}{dt^2} mg \sin P.$$

Pohybová rovnica matematického kyvadla má teda tvar

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + k^2 \sin P = 0, \quad (1.2)$$

kde $k = \sqrt{g/L}$.



Obr. 1.1: Matematické kyvadlá.

Príklad 1.1.4 (Motivácia II. - dvojité matematické kyvadlo).

Uvažujme teraz dvojité matematické kyvadlo zjednodušeného typu. Ramená majú rovnakú dĺžku ℓ a HB rovnakú hmotnosť m , vid' obrázok 1.1(c). Ich pohybové rovnice sú reprezentované systémom diferenciálnych rovníc, ktorých Lagrangián ma tvar

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}I(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mg(y_1 + y_2), \quad (1.3)$$

kde $I = \frac{1}{12}m\ell^2$ je moment zotrvačnosti ťažiska ramena (stred ramena) a

$$x_1 = \frac{\ell}{2} \sin \theta_1, \quad y_1 = -\frac{\ell}{2} \cos \theta_1,$$

$$x_2 = \ell \left(\sin \theta_1 + \frac{1}{2} \sin \theta_2 \right), \quad y_2 = -\ell \left(\cos \theta_1 + \frac{1}{2} \cos \theta_2 \right),$$

sú ťažiská ramien.

Obr. 1.2: Trajektórie dvojitého kyvadla.

Príklad 1.1.5 (Motivácia III. - LCR obvod - vybíjanie kondenzátora).

LCR obvod je uzavretá elektronická sieť, pozostávajúca z 3 uzlov A_1, A_2, A_3 . Medzi A_1 a A_2 je odpor, medzi A_3 a A_2 je kondenzátor a medzi A_1 a A_3 je cievka. Zo zákonov pre prvky obvodu (Ohmov, o indukčnosti, o kapacite) dostávame

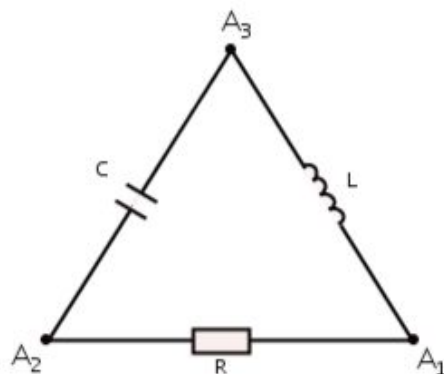
$$v_{12} = jR, \quad C \frac{dv_{23}}{dt} = j, \quad v_{31} = L \frac{dj}{dt},$$

kde j je intenzita prúdu v obvode, v_{ij} je rozdiel napätí na uzloch A_i, A_j , L je indukčnosť, C je kapacita a R je odpor. Z 1. Kirchhoffovho zákona máme $v_{12} + v_{23} + v_{31} = 0$. Ak si označíme $v := v_{23}$, tak dostaneme systém lineárnych rovníc

$$\frac{dv}{dt} = \frac{j}{C}, \quad \frac{dj}{dt} = -\frac{1}{L}v - \frac{R}{L}j.$$

Ak namiesto odporu dáme taký prvok, na ktorom bude napätie závislé na intenzite podľa nejakej funkcie t.j. $v_{12} = f(j)$, dostaneme nelineárny systém

$$\frac{dv}{dt} = \frac{j}{C}, \quad \frac{dj}{dt} = -\frac{1}{L}v - \frac{1}{L}f(j).$$



Obr. 1.3: LCR obvod.

Poznámka 1.1.6.

Ak y je riešením (1.1) na I , potom to automaticky znamená, že pre každé $t \in I$ je vektor $(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t))$ v definičnom obore funkcie Φ .

1.2. Špeciálne tvary diferenciálnych rovníc

0.

Bernoulliho rovnica má tvar

$$y' + p(x)y = g(x)y^\alpha, \quad (\text{B})$$

pričom $p, g \in C(a, b)$, $g \neq 0$ a $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Motivácia: pre $y \in C^1(a, b)$ platí $(y^m)' = p(y)^{m-1}y'$ pre "rozumné" m . Prenásobením rovnice (B) výrazom $(1 - \alpha)y^{-\alpha}$ dostaneme rovnicu

$$(1 - \alpha)y^{-\alpha}y' + (1 - \alpha)p(x)y^{1-\alpha} = (1 - \alpha)g(x).$$

Uvažujeme substitúciu $z = y^{1-\alpha}$, odkiaľ $z' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y'$. Obdržíme tak lineárnu rovnicu 1.

rádu

$$z' + (1 - \alpha)p(x)z = (1 - \alpha)g(x) \quad (\text{BL})$$

Pre $\alpha \in \{0, 1\}$ je to rovnica lineárna.

1.

Rovnice v tvare

$$y^{(n)} = f(t),$$

majú riešenia v tvare

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^i}{i!} y_i + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad t \in I,$$

ktoré možno nájsť postupným integrovaním.

2.

Rovnice v tvare

$$y^{(n)} = f(t, y^{(n-1)}),$$

možno upraviť pomocou substitúcie $z = y^{(n-1)}$ na tvar

$$z' = f(t, z).$$

Ak nájdeme riešenie $z(t)$ tejto rovnice, potom riešenie pôvodnej rovnice nájdeme opäť postupným integrovaním.

3.

Rovnice v tvare

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)}),$$

možno upraviť pomocou substitúcie $z = y^{(n-2)}$ na tvar

$$z'' = f(z).$$

4.

Rovnice v tvare

$$\Phi(t, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad 1 \leq k \leq n$$

možno upraviť pomocou substitúcie $z = y^{(k)}$ na tvar

$$\Phi(t, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Znížili sme teda rád rovnice.

5.

ak $\Phi(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, tak $y'(t) = z$, kde y bude nová nezávislá premenná zníži rád rovnice o 1

napr. v prípade $n = 2$ máme $y'' = \frac{dz}{dy} z$, teda $\Phi(y, z, z'z) = 0$

6.

Ak je rovnica $\Phi(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ exaktná, ak $\Phi(t, y^{(j)}, \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dt} \Phi(t, y^{(j)}, \dots, y^{(n-1)}) = 0$ a Φ je tzv. prvý integrál (podobne druhý ...)

Ak nie je rovnica $\Phi(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ exaktná, hľadáme integračný faktor $\mu(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

Napr. $z'' = f(z)$ riešime vynásobením oboch strán faktorom $2z'$ (predpokladáme teda, že $z' \neq 0$). Dostaneme (po úprave) $[(z')^2]' = 2f(z)z'$ a teda $(z')^2 = 2F(z) + k$, kde F je primitívna k f . Ak nájdeme riešenie $z(t)$ tejto rovnice, potom riešenie pôvodnej rovnice nájdeme opäť postupným integrovaním.

7.

Nech $y_1 \neq 0$ je riešením DR

$$y'' + p_1(t)y' + p_2(t)y = 0 \tag{1.4}$$

a z rieši $z' + (2y_1'/y_1 + p_1)z = 0$. Potom funkcie

$$y_1(t), y_2(t) = y_1(t) \int z(t) dt$$

tvoria FSR rovnice (1.4) na I .

7.

Transformácia závislej premennej (1.4). Použijeme substitúciu $y(t) = \psi(t)v(t)$, kde v je nová závislá premenná a ψ budeme hľadať tak, aby sme v rovnici

$$\left(p_1(t) \frac{d}{dt} \psi(t) + p_2(t) \psi(t) + \frac{d^2}{dt^2} \psi(t) \right) v(t) + \underbrace{\left(p_1(t) \psi(t) + 2 \frac{d}{dt} \psi(t) \right)}_{=0} \frac{d}{dt} v(t) + \psi(t) \frac{d^2}{dt^2} v(t) = 0$$

vynulovali člen 1. rádu, teda máme $\psi(t) = e^{-\frac{1}{2} \int p_1(t) dt}$. Ak budeme schopní nájsť bázu rovnice, tak nájdeme aj bázu tej pôvodnej.

Transformácia nezávislej premennej rovnice (1.4). Použijeme substitúciu $z = u(t)$, $\tilde{y}(z) = y(u^{-1}(z))$, kde z je nová nezávislá premenná a u budeme hľadať tak, aby sme v rovnici

$$\frac{d^2 \tilde{y}}{dz^2} + \underbrace{\frac{\frac{d^2 z}{dt^2} + p_1(t) \frac{dz}{dt}}{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}_{=0} \frac{d \tilde{y}}{dz} + \frac{p_2(t)}{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \tilde{y} = 0$$

vynulovali člen 1. rádu, teda máme $z(t) = \int e^{-\int p_1(t) dt}$. Ak budeme schopní nájsť bázu rovnice, tak nájdeme aj bázu tej pôvodnej.

Poznámka 1.2.1.

Samozrejme v oboch prípadoch je možné položiť koeficienty rovné aj nenulovým konštantám.

Už sme používali nelineárne transformácie na dosiahnutie cieľa, napr. pri Bernoulliho rovnici. Teoreticky je táto metóda použiteľná vždy, avšak je ťažké určiť akú transformáciu je potrebné použiť.

Problém 1.2.2.

Ukážte, že rovnica $(xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2)$ má v polárnych súradniciach tvar

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{1 - \sin(2\phi)}{\sin(2\phi)} r^2.$$

Problém 1.2.3.

Ukážte, že rovnica $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ má v súradniciach $u = x+y$, $v = x-y$, $w = xy-z$ tvar

$$1 = 2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}.$$

1.3. Sústavy obyčajných diferenciálnych rovníc

Uvažujme sústavu diferenciálnych rovníc pre neznáme funkcie $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ jednej reálnej premennej v tzv. normálnom tvare (derivácie príslušného rádu sa dajú explicitne vyjadriť)

$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\y_2' &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\&\vdots \\y_n' &= f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n),\end{aligned}\tag{1.5}$$

kde $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ sú reálne zadané funkcie definované a spojité na oblasti množine $\Omega = I \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a znak $'$ znamená deriváciu podľa premennej t . Zavedením stĺpcových vektorov možno (1.5) stručne zapísať aj v tvare

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}).\tag{1.6}$$

V literatúre sa používa niekoľko pojmov, ktoré sú v nejakom zmysle synonymom pojmu riešenia (1.6). Vyjasníme si to v nasledujúcej definícii.

Definícia 1.3.1.

(Klasickým) riešením sústavy (1.6) v Ω na intervale $I \subset \mathbb{R}$ rozumieme zobrazenie $\mathbf{y} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, pre ktoré platí rovnosť (1.6) a pre $t \in I$ je $(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \in \Omega$. Množinu U nazývame **fázový priestor** a množinu (obor hodnôt riešenia) $\mathbf{y}(I)$ **fázová krivka** (**trajektória**) - stav systému. Graf riešenia, t.j. $\text{gr } \mathbf{x} = \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, t \in I\}$ nazývame **integrálna krivka**. Množinu $O(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0), t \in I\}$ nazývame **orbita** predchádzajúca \mathbf{x}_0 , pričom $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Fázová krivka je projekciou integrálnej krivky do fázového priestoru pozdĺž "časovej" osi.

Príklad 1.3.2.

Uvažujme systém

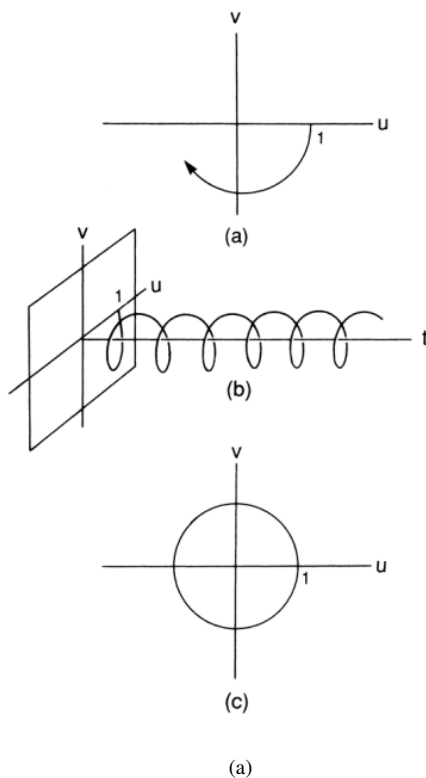
$$\dot{u} = v,$$

$$\dot{v} = -u.$$

Riešenie prechádzajúce bodom $(u_0, v_0) = (1, 0)$ v čase $t_0 = 0$ má tvar $(u(t) = \cos t, v(t) = -\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$. Integrálna krivka predchádzajúca bodom $(1, 0)$ v $t = 0$ je množina $\{(u, v, t) \in \mathbb{R}^3 : u = \cos t, v = \sin t, t \in \mathbb{R}\}$ a orbitou je kružnica $x^2 + y^2 = 1$. Vid' obrázok 1.4(a). Zrejme pre každé $T \in I$ je $O(\mathbf{x}(T; t_0, \mathbf{x}_0)) = O(\mathbf{x}_0)$

Riešeniu systému (1.6) zodpovedá krivka v priestore $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Odtiaľ, tak ako v prípade DR prvého rádu, vyplýva nasledujúca úvaha. Ak v každom bode $(t, \mathbf{y}) \in \Omega$ je skonštruovaný vektor \mathbf{T} so súradnicami $\mathbf{T}(t, \mathbf{y}) = (1, f_1(t, \mathbf{y}), \dots, f_n(t, \mathbf{y}))$, potom hovoríme, že je dané smerové pole systému (1.6) na množine Ω . V ľubovoľnom bode každej integrálnej krivky systému (1.6) je smer dotyčnice totožný so smerom zodpovedajúceho vektora smerového poľa, skonštruovaného v tomto bode. Geometrická reprezentácia stavov systému vo fázovom priestore sa volá **fázový portrét** (súbor fázových kriviek). Ten fyzikálne vyjadruje toto : ak sa t mení, bod $\mathbf{y}(t)$ sa pohybuje vo fázovom priestore tak, že jeho okamžitá rýchlosť sa rovná hodnote vektorového poľa \mathbf{f} v tomto bode.

Teraz si vyjasníme vzťah medzi sústavou n rovníc prvého rádu a jednou rovnicou rádu n .



Obr. 1.4: (a) Fázová krivka, (b) Integrálna krivka, (c) Orbita

Nech y je riešením rovnice

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1.7)$$

potom ak označíme $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$, bude funkcia \mathbf{y} riešením sústavy

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (1.8)$$

a naopak. Tento prevod má význam pri študovaní vlastností jednej či druhej rovnice. Zrejme však rovnica v tvare sústavy je zložitejší objekt a nie každý systém možno previesť na rovnicu vyššieho rádu.

Príklad 1.3.3.

Majme napríklad sústavu

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1^2, \\ y_2' &= \sqrt{y_2}.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Zrejme máme nezávislé rovnice, ktoré nemožno prepojiť.

Avšak, za istých predpokladov je to možné. Derivujme prvú rovnicu z (1.6) podľa t a za y_j , $j = 1, 2, \dots, n$, dosadíme ich vyjadrenie dané rovnicami (1.6), dostaneme tak

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial y_j} y_j' = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial y_j} f_j := F_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Toto opakujeme $(n - 1)$ -krát a tým dostaneme

$$y_1^{(n)} := F_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Ak z rovníc

$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_1'' &= F_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ y_1^{(n-1)} &= F_{n-1}(t, y_1, y_2, \dots, y_n),\end{aligned}\tag{1.10}$$

môžeme vyjadriť y_2, y_3, \dots, y_n ako funkcie premenných $t, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}$, t.j.

$$y_j = \phi_j(t, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}), \quad j = 2, 3, \dots, n,$$

čo vieme (aspoň lokálne) v okolí bodu (t, \mathbf{y}^0) , v ktorom je $\det \tilde{\mathbf{F}}' \neq 0$ (podmienka regularity), kde $\tilde{\mathbf{F}} = (f_1, F_2, \dots, F_{n-1})$ a derivácia je podľa vektora (y_2, y_3, \dots, y_n) , môžeme dosadením do rovnice

$$y_1^{(n)} = F_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

dostať pre y_1 rovnicu

$$y_1^{(n)} = F_n\left(t, y_1, \phi_2\left(t, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right), \dots, \phi_n\left(t, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right)\right),$$

čo je hľadaná rovnica vyššieho rádu. Dá sa ukázať, že tento vzťah je v tomto prípade obojstranný.

Definícia 1.3.4.

Cauchyho začiatočná úloha:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Nasledujúca veta, ako aj veta 1.3.8 majú tzv. lokálny charakter. Teda existencia, resp. jednoznačnosť riešenia je garantovaná iba na nejakom okolí bodu $t = t_0$.

Veta 1.3.5 (Peanova o existencii).

Nech $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je oblasť a $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazenie. Potom pre každý bod $(t_0, \mathbf{y}^0) \in \Omega$ existuje otvorený interval $I \subset \mathbb{R}$ obsahujúci t_0 , na ktorom je definované riešenie $\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ začiatočnej úlohy (1.11).

Carathéodoryho existenčná veta je zovšeobecnením Peanovej vety a pokrýva širšiu množinu funkcií, pre ktoré je existencia zaručená. Táto veta však hovorí o riešení diferenciálneho systému v inom zmysle (diferencovateľnosť s.v.).

Obr. 1.5: Iterácia $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ s $r \in (1, 1 + \sqrt{6})$ a počiatočnou hodnotou $0 < x_1 < 0.1$ konvergujúca k pevnému bodu $x^* : f(x^*) = x^*$.

Definícia 1.3.6.

Hovoríme, že zobrazenie $\mathbf{f} : I \times U = \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ je **lokálne lipschitzovské** na Ω vzhľadom na \mathbf{y} , ak je splnená podmienka: $\forall (t_0, \mathbf{y}^0) \in \Omega$ existujú čísla $a > 0, b > 0, L > 0$ také, že $G = \{(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| < a, \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0\| < b\} \subset \Omega$, a

$$\|f(t, \mathbf{y}^1) - f(t, \mathbf{y}^2)\| \leq L \|\mathbf{y}^1 - \mathbf{y}^2\|,$$

pre $\forall (t, \mathbf{y}^1), (t, \mathbf{y}^2) \in G$.

Veta 1.3.7 (Banachova o pevnom bode).

Nech (X, d) je úplný metrický priestor a $F : X \rightarrow X$ je kontraktívne zobrazenie (s konštantou L). Potom má zobrazenie F práve jeden pevný bod $u \in X$ ($F(u) = u$). Navyše, pre každé $x \in X$ platí $F^{[n]}(x) \rightarrow u$ pre $n \rightarrow \infty$, pričom pre rýchlosť konvergenzie platí $d(u, F^{[n]}(x)) \leq L^n \cdot d(u, x)$.

Veta 1.3.8 (Picardova-Lindelöfova o jednoznačnosti).

Nech $I \times U = \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je oblasť a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojité a lokálne lipschitzovské zobrazenie na Ω vzhľadom na y . Potom pre každý bod $(t_0, \mathbf{y}^0) \in \Omega$ existuje číslo $\delta > 0$ také, že na intervale $I_\delta = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ je definované práve jedno riešenie začiatočnej úlohy (1.11).

Niekedy sa táto veta označuje aj Cauchyho-Lipschitzova-Picardova veta. Pozor, podmienka v predchádzajúcej vete nie je nutnou podmienkou ako ukazuje aj nasledujúci príklad.

Príklad 1.3.9.

Dá sa ukázať, že problém $y' = f(y)$, $y(0) = \alpha$, $\alpha \in [0, 1)$, kde

$$f(y) = \begin{cases} y \ln \frac{1}{y}, & 0 < y < 1 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

má práve jedno riešenie $y(t) = \alpha e^{-t}$ napriek tomu, že pravá strana nie je lokálne lipschitzovská vzhľadom na y na okolí $(0,0)$.

Príklad 1.3.10 (nejednoznačnosť).

Problém $y' = y^{2/3}$, $y(0) = 0$ má nekonečne veľa riešení. Nájdite ich !

Problém 1.3.11.

Dokážte, že Cauchyho úloha $y' = 1 + y^{2/3}$, $y(0) = 0$ má jediné riešenie, a to aj napriek tomu, že nespĺňa podmienku (lokálna Lipschitzovskosť) vo vete 1.3.8.

Definícia 1.3.12.

Riešenie systému (1.6) sa nazýva **globálne**, ak je definované pre všetky $t \in \mathbb{R}$.

Nasledujúca veta hovorí o predĺžiteľnosti riešenia (postačujúca podmienka) na celú os \mathbb{R} , t.j. nenastáva tzv. blow-up riešenia. Všimnite si, že globálna Lipschitzovskosť pravej strany

(vzhľadom na premennú \mathbf{y}) na rovnice 1.6 automaticky implikuje predĺžiteľnosť riešenia na príslušnej množine (t.j. na množine, kde je pravá strana spojitá vzhľadom na premennú t).

Veta 1.3.13 (Veta o globálnom riešení).

Nech $\mathbf{f} \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ a pre všetky $(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ platí

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq F(t) \omega(\|\mathbf{y}\|),$$

kde $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ je spojitá funkcia a $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ je spojitá, pre ktorú navyše platí

$$\int_r^\infty \frac{ds}{\omega(s)} = \infty, \quad r > 0.$$

Potom pre všetky $(t_0, \mathbf{y}^0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ existuje globálne riešenie začiatočnej úlohy (1.11).

Poznámka 1.3.14.

Ak $\omega(s) = s, F(s) = L$ pre všetky $s \in [0, \infty), L > 0$, potom prvá podmienka vo vete znamená, že \mathbf{f} je globálne lipschitzovské zobrazenie (vzhľadom na \mathbf{y}) a druhá podmienka je splnená automaticky.

Dôsledok 1.3.15 (O globálnej existencii).

Nech $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a pre každé $T > 0$ existujú $M(T), L(T)$ tak, že

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq M(T) + L(T)\|\mathbf{y}\|, \quad (t, \mathbf{y}) \in [-T, T] \times \mathbb{R}^n,$$

potom všetky riešenia problému (1.11) sú globálne.

Problém 1.3.16.

Zamyslite sa nad tým, či môže odhad v predchádzajúcej vete vyzerat' takto

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq M(T) + L(T)\|\mathbf{y}\|^\alpha, \quad \alpha > 1.$$

Prednáška 2

2.1. Lineárne sústavy

Budeme uvažovať sústavu (1.6), kde \mathbf{f} bude v tvare lineárnej funkcie. Systém zapíšeme skrátene

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \quad (2.1)$$

kde funkcie $b_j(t)$ a koeficienty matice $\mathbf{A}(t) = (a_{jk}(t)) \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $j, k = 1, 2, \dots, n$ sú spojité (vo všeobecnosti komplexné) funkcie na intervale $I \subset \mathbb{R}$. Ak $\mathbf{b} = 0$ hovoríme o homogénnej sústave prislúchajúcej systému (2.1). Nasledujúca veta nám hovorí o algebraickej štruktúre riešení tohoto diferenciálneho systému (2.1).

Veta 2.1.1.

Množina všetkých (vo všeobecnosti komplexných) riešení homogénneho systému prislúchajúceho (2.1) tvorí n -rozmerný vektorový priestor.

Definícia 2.1.2.

Vektorové funkcie $\mathbf{h}^1, \dots, \mathbf{h}^n$ definované na intervale I nazývame **lineárne závislé** v intervale I , ak existujú konštanty c_1, \dots, c_n , ktoré nie sú všetky rovné nule, také, že pre každé $t \in I$ platí

$$\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{h}^i(t) = 0.$$

Ak funkcie nie sú lineárne závislé nazývame ich **lineárne nezávislé**.

Problém 2.1.3.

Zrejme $\mathbf{h}^1(t) = (e^{3t}, 2e^t)$ a $\mathbf{h}^2(t) = (2e^{3t}, 4e^t)$ sú lineárne závislé v \mathbb{R} . Ukážte to. Ukážte, že $\mathbf{h}^1(t) = (e^t, 0, 2e^t)$, $\mathbf{h}^2(t) = (e^{-t}, 3e^{-t}, 0)$, $h_1(t) = (e^{2t}, e^{2t}, e^{2t})$ sú lineárne nezávislé v \mathbb{R} .

Definícia 2.1.4.

Každú n -ticu $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^n$ lineárne nezávislých riešení sústavy (2.1) nazveme **fundamentálny systém** riešení (FSR). Maticu, ktorej stĺpce tieto riešenia tvoria nazývame **fundamentálna matica** a označíme ju $\Phi(t)$.

Príklad 2.1.5.

Majme systém

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2, \\y_2' &= -y_1.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Potom

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } \Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

je fundamentálna matica tohto systému.

Definícia 2.1.6.

Adjungovaná matica je transponovaná matica algebraických doplnkov (kofaktorov). Teda $\text{adj}\mathbf{A} = \mathbf{C}^T$, kde $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}$, kde \mathbf{A}_{ij} je štvorcová matica, ktorú získame z matice \mathbf{A} odstránením i -tého riadku a j -tého stĺpca.

Uvedieme si vyjadrenie derivácie determinantu matice \mathbf{A} pomocou k nej adjungovanej ma-

tíci a derivácie samotnej matice \mathbf{A} . Keďže platí $\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^n a_{ik} C_{ki}$ pre ľubovoľné i , máme

$$d \det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial \det \mathbf{A}}{\partial a_{ij}} da_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n C_{ji} da_{ij}.$$

Dostaneme tak nasledujúcu lemu.

Lema 2.1.7 (Jacobiho formula).

Nech \mathbf{A} je diferencovateľné zobrazenie z $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (matica), potom $d \det \mathbf{A} = \text{tr}(\text{adj } \mathbf{A} d\mathbf{A})$.

Je známe, že ak je matica \mathbf{A} regulárna, potom pre jej inverziu platí $\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}$.

Dôsledok 2.1.8.

Nech \mathbf{A} je diferencovateľná a invertovateľná na $I \subset \mathbb{R}$. Potom platí

$$\frac{d}{dt} \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{A}) \text{tr} \left(\mathbf{A}^{-1} \frac{d}{dt} \mathbf{A} \right).$$

Nasledujúca veta nám vyjadruje determinant FSR homogénneho systému prislúchajúcemu (2.1) v tvare sumy diagonálnych prvkov koeficientov matice $\mathbf{A}(t)$. Jej dôsledok nám poslúži pri vyšetrovaní lineárnej závislosti či nezávislosti systému vektorových funkcií, ktoré sú riešeniami homogénneho systému diferenciálnych rovníc.

Veta 2.1.9 (Abelova-Liouvilleova formula).

Nech $\Phi(t)$ je fundamentálna matica homogénneho systému prislúchajúcemu (2.1) na otvorenom intervale I , potom pre všetky $t, t_0 \in I$ platí

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr } \mathbf{A}(\xi) d\xi}.$$

Tento vzťah má aj peknú geometrickú interpretáciu, opisuje totiž vývoj objemu rovnobežnosti generovaného počiatočnými vektormi $\mathbf{y}^1(t_0), \dots, \mathbf{y}^n(t_0)$.

Príklad 2.1.10 (Použitie Abelovej-Liouvilleovej formuly).

Riešme na $I = (0, \infty)$ systém

$$\mathbf{y}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{x} \\ 1+x & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}(x)} \mathbf{y},$$

Predpokladajme, že sme jedno riešenie

$$\mathbf{y}^1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, \quad x \in I,$$

už našli. Potom z toho, že $\text{tr } \mathbf{A}(x) = 0$ pre $x \in I$ a každý vektor fundamentálnej matice

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} y_1^2(x) & 1 \\ y_2^2(x) & x \end{pmatrix}, \quad x \in I,$$

rieši náš systém, máme $c_1 := \det \Phi(x) = x y_1^2(x) - y_2^2(x)$, $x \in I$. Z toho však máme $(y_1^2)'(x) = \frac{c_1}{x}$, teda $y_1^2(x) = c_1 \ln x + c_2$, $x \in I$ a navyše $y_2^2(x) = c_1 x \ln x + c_2 x - c_1$, $x \in I$. Voľba $c_1 = 1$ a $c_2 = 0$ nám dáva lineárne nezávislé riešenie a tak

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \ln x & 1 \\ x \ln x - 1 & x \end{pmatrix}, \quad x \in I,$$

je hľadané fundamentálne riešenie.

Dôsledok 2.1.11.

Ak $\det \Phi(t_0) \neq 0$, tak $\det \Phi(t) \neq 0 \forall t \in I$. Ak $\det \Phi(t_0) = 0$, tak $\det \Phi(t) \equiv 0$.

Poznámka 2.1.12.

Všimnime si, že $\det \Phi(t)$ je vlastne Wronského determinant (wronskián) riešení daného systému (podobne ako pre rovnice vyšších rádov). Z dôsledku vyplýva, že ak je wronskián riešení daného systému nenulový v jednom bode intervalu I , potom je nenulový na celom intervale, čo znamená, že tieto riešenia sú lineárne nezávislé v I .

Princíp superpozície sa vo fyzike objavuje často a na mnohých miestach – od kvantovej mechaniky až po elektromagnetizmus. Vo všeobecnosti hovorí to, že ak sú rovnice popisujúce skúmaný fyzikálny systém lineárne a vezmeme nejaké dve riešenia, tak aj lineárna kombinácia týchto riešení (túto nazývame aj superpozícia) je tiež riešením.

Veta 2.1.13 (Princíp superpozície).

1. Ak sú \mathbf{y}^j riešením sústav

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t) \mathbf{y} + \mathbf{b}^j(t), \quad j = 1, 2,$$

potom pre ľubovoľné čísla α, β je $\alpha \mathbf{y}^1 + \beta \mathbf{y}^2$ je riešením sústavy

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t) \mathbf{y} + \alpha \mathbf{b}^1 + \beta \mathbf{b}^2,$$

2. Ak je \mathbf{y}_p partikulárne riešenie sústavy (2.1), potom všeobecné riešenie tejto sústavy je

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_p + \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{y}^j,$$

kde $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^n$ je FSR príslušnej homogénnej sústavy a \mathbf{c} sú ľubovoľné konštanty.

Teraz treba ešte vyriešiť otázku, ako získame partikulárne riešenie \mathbf{y}_p , ak máme FSR. Odpoveď dáva znovu, (podobne ako u lineárnych diferenciálnych rovníc vyšších rádov) metóda

variácie konštant. Partikulárne riešenie $\mathbf{y}_p(t)$ nehomogénneho systému (2.1) na intervale I hľadáme v tvare $\mathbf{y}_p(t) = \Phi(t) \mathbf{c}(t)$. Našou úlohou je nájsť funkcie $\mathbf{c}(t)$. Pri dosadzovaní funkcie \mathbf{y}_p do rovnice, ktorej má vyhovovať sa riadime tým, že pre operáciu derivovania súčinu matic platí rovnaké pravidlo ako pre derivovanie súčinu funkcií. Takže po dosadení máme

$$\Phi'(t)\mathbf{c}(t) + \Phi(t)\mathbf{c}'(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t).$$

Keďže vieme, že pre FSR platí $\Phi'(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t)$ a existuje matica $\Phi^{-1}(t)$, dostaneme implikáciu

$$\Phi(t)\mathbf{c}'(t) = \mathbf{b}(t) \Rightarrow \mathbf{c}(t) = \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{b}(t) dt.$$

Takže máme hľadané partikulárne riešenie $\mathbf{y}_p(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{b}(t) dt$.

Veta 2.1.14 (Variácia konštant).

Nech $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^n$ je FSR homogénnej sústavy príslušnej k (2.1), potom pre každé spojité \mathbf{b} existujú také funkcie $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$, že funkcia

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n c_j(t) \mathbf{y}^j$$

rieši (2.1)

Dôsledok 2.1.15 (Riešenie nehomogénnej lineárnej rovnice).

Riešenie začiatočnej úlohy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}(t) \mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0 \end{cases}$$

má tvar

$$\mathbf{y} = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) \mathbf{y}^0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} \mathbf{b}(s) ds \quad (2.3)$$

2.2. Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami

Majme systém 2.1, kde matica $\mathbf{A}(t)$ nezávisí na t a $\mathbf{b}(t) = \mathbf{0}$. Teda majme systém

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y}. \quad (2.4)$$

Pozrieme sa na metódu vlastných vektorov - výpočtu riešenia pomocou tzv. charakteristickej rovnice. Predpokladajme, že riešenie (2.4) je v tvare $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{h}$, $t \in I$, kde $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ je reálny alebo komplexný vektor a λ je reálne alebo komplexné číslo. Po dosadení máme $\mathbf{y}' = \lambda e^{\lambda t} \mathbf{h} = e^{\lambda t} \mathbf{A} \mathbf{h}$, $\forall t \in I$. Teda $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{h} = \mathbf{0}$, $\forall t \in I$. Táto sústava má nenulové riešenie \mathbf{h} iba vtedy, keď jej matica bude singulárna. Musí teda platiť

$$P(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0,$$

tj. tzv. **charakteristický polynóm** (stupňa n) pre diferenciálny systém (2.4) je rovný nule.

Veta 2.2.1 (Prípád navzájom rôznych vlastných hodnôt).

Nech $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sú navzájom rôzne vlastné hodnoty matice \mathbf{A} , a \mathbf{v}^i je vlastný vektor zodpovedajúci vlastnej hodnote λ_i , pričom $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$ sú lineárne nezávislé. Potom FSR (vo všeobecnosti komplexný) diferenciálnej rovnice (2.4) má tvar $\mathbf{y}^i(t) = e^{\lambda_i t} \mathbf{v}^i$, $i = 1, \dots, n$.

Poznámka 2.2.2.

Zrejme

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}^i, \quad C_i \in \mathbb{R}$$

je tvar všeobecného riešenia systému (2.4).

Tvrdenie vety 2.2.1 zostáva v platnosti aj v prípade komplexných koreňov. Problém je v tom, že riešenie je potom v komplexnom tvare. Je však možné skonštruovať z nich riešenia v reálnom tvare. Predpokladajme, že $\lambda = p + iq$ je koreňom charakteristickej rovnice s pri-

slúchajúcim vlastným vektorom. Zrejme aj $\bar{\lambda} = p - iq$ je jej koreňom. Vieme, že $\mathbf{y}(t) = \mathbf{v} e^{\lambda t}$ je riešením systému (2.4), ukážeme, že aj $\bar{\mathbf{y}}(t) = \bar{\mathbf{v}} e^{\bar{\lambda} t}$ ním je. Vyplýva to priamo z toho, že $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\overline{\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}})\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}} \Leftrightarrow (\bar{\lambda} \mathbf{I} - \mathbf{A})\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$. Vzhľadom na linearitu priestoru riešení sú riešeniami aj všetky lineárne kombinácie funkcií $\mathbf{y}(t), \bar{\mathbf{y}}(t)$, teda aj funkcie

$$\Re(\mathbf{y}(t)) = \frac{\mathbf{y}(t) + \bar{\mathbf{y}}(t)}{2}, \Im(\mathbf{y}(t)) = \frac{\mathbf{y}(t) - \bar{\mathbf{y}}(t)}{2i}.$$

Veta 2.2.3 (Prípado komplexných vlastných hodnôt).

Nech $\lambda = \sigma + i\omega$ je k -násobný koreň charakteristickej rovnice pre diferenciálnu rovnicu (2.4), tj. polynóm $P(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, pričom k nemu existuje k lineárne nezávislých vlastných vektorov: $\mathbf{w}^j = \mathbf{g}^j + i\mathbf{h}^j$, $j = 1, \dots, k$. Potom množina riešení tvaru $(\mathbf{a} \cos \omega t + \mathbf{b} \sin \omega t) e^{\sigma t}$ je vektorový podpriestor množiny všetkých riešení dimenzie $2k$, pričom jeho báza je

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^j(t) &= (\mathbf{g}^j \cos \omega t - \mathbf{h}^j \sin \omega t) e^{\sigma t}, \\ \mathbf{r}^j(t) &= (\mathbf{h}^j \cos \omega t + \mathbf{g}^j \sin \omega t) e^{\sigma t}, \quad j = 1, \dots, k. \end{aligned} \tag{2.5}$$

O niečo komplikovanejší je postup v prípade násobných vlastných čísel. Vieme však, že každému násobnému vlastnému číslu musí zodpovedať presne toľko lineárne nezávislých riešení, aká je jeho násobnosť. Medzi nimi sa vždy vyskytuje aspoň jedno riešenie tvaru $\mathbf{h} e^{\lambda t}$. Môžu však pribudnúť ďalšie riešenia, ktoré už tento tvar nemajú. Ak nastane situácia, že vlastný podpriestor prislúchajúci nejakej vlastnej hodnote nemá plnú dimenziu, musíme ju doplniť pomocou tzv. zovšeobecnených vlastných vektorov.

Definícia 2.2.4.

Nenulový vektor \mathbf{v} sa nazýva **zovšeobecnený vlastný vektor** rádu p matice \mathbf{A} prislúchajúci vlastnému číslu λ matice \mathbf{A} , ak existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^p \mathbf{v} = \mathbf{0}$ a $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{p-1} \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Usporiadanú p -ticu $(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^p)$, $\mathbf{v}^k = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{p-k} \mathbf{v}$, $k = 1, 2, \dots, p$ nazývame **ret'azec** zovšeobecnených vlastných vektorov rádu p matice \mathbf{A} vytvorený vektorom \mathbf{v} .

Poznámka 2.2.5 (O nulite matice).

Počet lineárne nezávislých vlastných vektorov zodpovedajúcich násobnému číslu λ je rovný nulite (rozdiel $n - h(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$) matice $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}$.

Poznámka 2.2.6.

Platí $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}^1 = 0$, $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1$, ..., $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}^{p-1} = \mathbf{v}^{p-2}$, $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}^p = \mathbf{v}^{p-1}$.

Veta 2.2.7 (Prípád zovšeobecnených vlastných hodnôt).

Nech $(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m)$ je reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov matice \mathbf{A} zodpovedajúci vlastnému číslu λ matice \mathbf{A} vytvorený vlastným vektorom \mathbf{v} . Potom vektorové funkcie (vo všeobecnosti komplexné)

$$\mathbf{s}^k(t) = \left(\sum_{i=1}^k \frac{\mathbf{v}^i t^{k-i}}{(k-i)!} \right) e^{\lambda t}, \quad k = 1, \dots, m$$

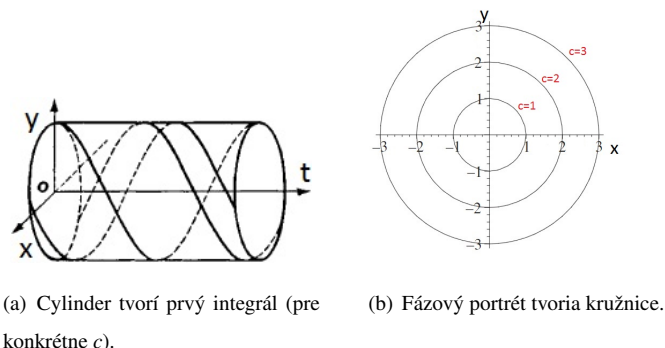
sú lineárne nezávislé riešenia rovnice (2.4).

Poznámka 2.2.8.

Vo všeobecnosti je FSR zjednotením všetkých množín lineárne nezávislých riešení zodpovedajúcich všetkým koreňom charakteristickej rovnice.

2.3. Prvé integrály sústav

Určiť riešenie diferenciálnych rovníc sa v podstate podarí len vo výnimočných prípadoch. Niekedy sa ale podarí urobiť malý krok: podarí sa nájsť takú funkciu $\Theta(t, \mathbf{y})$, ktorá je konštantná na každom riešení systému (1.6) (príslušná konštanta môže byť pre rôzne riešenia rôzna). Takýto postup nemusí byť však jednoduchý a je teda užitočný vtedy, ak iný nemáme. Také funkcie nazývame prvými integrálmi tejto sústavy, pričom často majú fyzikálny význam napríklad energie, hybnosti, momentu hybnosti (konštantnosť vyjadruje zákon zachovania týchto veličín).



Obr. 2.1: Správanie sa riešení z príkladu 2.3.3.

Príklad 2.3.1.

Exemplárnym príkladom je systém rovníc, podľa ktorých sa pohybujú častice v konzervatívnom poli. v 1D je to rovnica

$$m\ddot{x} = -\frac{dU(x)}{dx},$$

ktorá má prvý integrál (pohybu) $\Theta(x, v) = \frac{mv^2}{2} + U(x) = \text{konšt.}$, kde $v(t) = \dot{x}(t)$, vyjadrujúci celkovú energiu systému.

Definícia 2.3.2.

Prvým integrálom sústavy (1.6) na otvorenej množine $\Omega_1 \subset \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nazývame takú funkciu $\Theta \in C^1(\Omega_1, \mathbb{R})$, pre ktorú platí: Ak je $\mathbf{y}(t), t \in I$ riešenie na Ω_1 sústavy (1.6), potom je funkcia $\tilde{\Theta}(t) := \Theta(t, \mathbf{y}(t))$ konštantná na intervale I .

Príklad 2.3.3.

Uvažujme sústavu

$$x' = y, y' = -x. \quad (2.6)$$

Zrejme $x^2 + y^2 = c$ pre riešenie (x, y) a teda prvým integrálom danej sústavy je valec a integrálne krivky tvoria skrutkovice na ňom, viď. obrázky 2.1(a), 2.1(b).

Najprv si uvedieme tvrdenie, ktoré je často prakticky využívané pri riešení nelineárnych systémov a vo svojej podstate súvisí s prvým integrálom špeciálneho systému.

Veta 2.3.4.

Nech f, g sú spojité funkcie, $x, y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $t_0 \in (a, b)$, $f(x(t_0), y(t_0)) \neq 0$.

1. Potom existuje okolie U bodu t_0 také, že ak (x, y) je riešenie sústavy

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y)$$

na U , potom je $\tilde{y} = y \circ x^{-1}$ na $x(U)$ riešením rovnice

$$\frac{d\tilde{y}}{dz} = \frac{g(z, \tilde{y})}{f(z, \tilde{y})}, \quad \tilde{y}(x(t_0)) = y(t_0). \quad (2.7)$$

2. Pre každé okolie U bodu t_0 platí, že pokiaľ \tilde{y} je riešením rovnice (2.7) na $x(U)$ a x je riešením rovnice $x' = f(x, \tilde{y}(x))$ na U , potom funkcia $\tilde{y} \circ x$ je riešením rovnice $y' = g(x, y)$ na U .

Všimnime si, že rovnicu (2.7) získame formálnym predelením rovníc daného planárneho systému. Veta v podstate hovorí, že ak chceme nájsť riešenia danej sústavy, môžeme najprv vyriešiť rovnicu (2.7), ktorá nám dá orbity riešení vo fázovej rovine, a potom dopočítať závislosť na t .

Použitím pravidla o derivovaní zloženej funkcie dostaneme nasledujúcu lemu, ktorá je užitočná a dôležitá v tom, že funkcii Θ môžeme rozhodnúť, či je (nie je) prvým integrálom bez toho, aby sme poznali riešenie.

Lema 2.3.5 (Nutná a postačujúca podmienka).

Ak je pravá strana $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ sústavy (1.6) spojitá na $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, potom funkcia $\Theta \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ je jej prvým integrálom na $\Omega \Leftrightarrow$ ak platí

$$\frac{\partial \Theta(t, \mathbf{y})}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Theta(t, \mathbf{y})}{\partial y_j} f_j(t, \mathbf{y}) = 0, \quad \forall (t, \mathbf{y}) \in \Omega \quad (2.8)$$

Je to fakticky parciálna diferenciálna rovnica prvého rádu pre funkciu Θ . Takže je blízky vzťah medzi nimi a sústavami obyčajných diferenciálnych rovníc prvého rádu. Ak máme auto-

nómny systém, potom táto podmienka hovorí, že gradient prvého integrálu je kolmý na vektorové pole \mathbf{f} (na pravú stranu systému).

Poznámka 2.3.6.

Konštantné prvé integrály sú nezaujímavé. Nekonštantné prvé integrály definované na celej oblasti Ω existujú zriedka. Zvláštnu dôležitosť majú prvé integrály nezávisiace explicitne na t .

Príklad 2.3.7.

Uvažujme sústavu

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2 - y_3, \\y_2' &= y_3 - y_1, \\y_3' &= y_1 - y_2.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Sčítaním týchto rovníc dostaneme $(y_1 + y_2 + y_3)' = 0$. To znamená, že funkcia $\Theta_1(\mathbf{y}) = y_1 + y_2 + y_3$ je prvým integrálom sústavy (2.9). Iný prvý integrál je $\Theta_2(\mathbf{y}) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. Ako ho možno nájsť ?

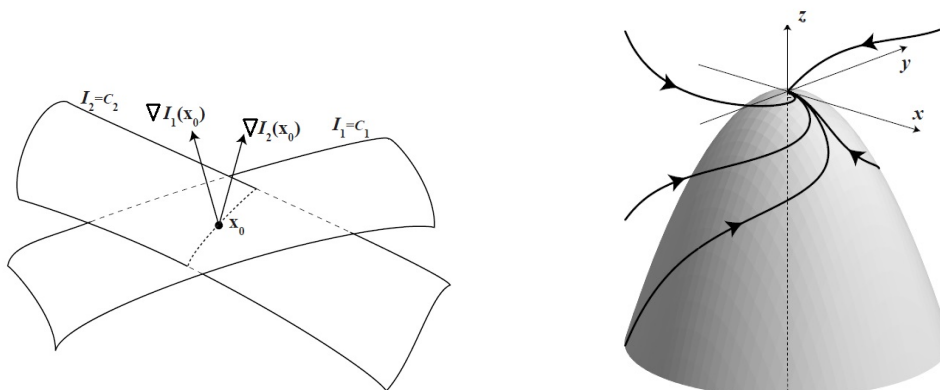
Poznámka 2.3.8.

Je zrejmé, že ak sú $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k$ prvé integrály sústavy (1.6), potom aj $\Psi(\Theta_1(t, \mathbf{y}), \Theta_2(t, \mathbf{y}), \dots, \Theta_k(t, \mathbf{y}))$ ním je, pričom Ψ je ľubovoľná spojitá diferencovateľná funkcia k premenných. Tento integrál nám ale nedáva žiadnu ďalšiu informáciu o riešení v porovnaní s informáciou, ktorú nám dávajú prvé integrály $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k$.

Ak chceme nájsť riešenie sústavy (1.6) pomocou prvých integrálov je podstatné, aby boli nezávislé na množine Ω .

Definícia 2.3.9.

Hovoríme, že prvé integrály $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k$, $k \leq n$ sú **nezávislé** na množine Ω , ak Ostrogradského-Jacobiho matica Θ_y' má plnú hodnotu k pre všetky $(t, \mathbf{y}) \in \Omega$.



(a) Nezávislosť prvých integrálov - 2 konkrétne hladiny a ich prienik v bode x_0 .
 (b) Integrály z príkladu 2.3.10. Počiatok je globálny atraktor, tj. pre $t \rightarrow \infty$ tam končia všetky trajektórie (dosahujú hladinu $I_1 = 0$).

Obr. 2.2: Prvé integrály.

Príklad 2.3.10 (Rabinovichov systém).

Nasledujúci diferenciálny systém tvorí parametrický model, ktorý popisuje interakcie troch kvázi-synchrónnych vln v plazme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2y^2 + \gamma x + z - \delta, \\ \dot{y} &= 2xy + \gamma y - \delta x, \\ \dot{z} &= -2z(x + 1), \end{aligned} \tag{2.10}$$

kde $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Nájst' prvé integrály pre takéto systémy nemusí byť vôbec jednoduché. Špeciálne pre $\gamma = 0, \delta = 1$ existujú dva explicitne závisiace na t prvé integrály

$$I_1 = (x^2 + y^2 + z)e^{2t}, \quad I_2 = zye^{3t}.$$

Presvedčte sa o tom ! Pre $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ sú ich gradienty lineárne nezávislé. Tak-tiež sa môžete presvedčiť, že pre $\gamma = 0$ je $z(y - \delta/2)e^{2t}$ d' alším prvým integrálom.

Problém 2.3.11.

Ukážte, že existencia lineárneho prvého integrálu pre lineárny homogénny systém s konštantnými koeficientami korešponduje s jeho degenerovanosťou, tj. systém (2.4) má lineárny prvý integrál $I(\mathbf{y}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \det \mathbf{A} = 0$.

2.4. Gradientné a Hamiltonove systémy

Príklad 2.4.1.

Vo fyzike je konzervatívny systém s jedným stupňom voľnosti popísaný rovnicou typu $\ddot{x} = g(x)$. Celková mechanická energia $H = T + U = \frac{\dot{x}^2}{2} - \int_0^x g(s) ds$ je prvým integrálom (súčet kinetickej a potenciálnej energie systému). Prislúchajúci systém diferenciálnych rovníc je príkladom všeobecného Hamiltonovho systému a prvý integrál sa v tomto prípade nazýva **Hamiltonova funkcia**.

Nasledujúci diferenciálny systém súvisí s hamiltonovskou formuláciou mechaniky, ktorá je všeobecnejšia než lagrangeovská, z ktorej pôvodne vychádzala. Hamiltonova funkcia (súčet kinetickej a potenciálnej energie) mechanického systému s n stupňami voľnosti je definovaná vzťahom:

$$H(p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t),$$

kde L je Lagrangeova funkcia systému. Platí $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}$ a Hamiltonova funkcia je vlastne Legendreova transformácia lagrangiánu. Tento dynamický systém opisuje vývoj fyzikálnych systémov ako napríklad planetárny systém alebo elektrón v elektromagnetickom poli.

Hamiltonove kanonické rovnice:

Nech $\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ je diferencovateľná funkcia. Nasledujúce rovnice tvoria pre mechanický systém s n stupňami voľnosti sústavu $2n$ diferenciálnych rovníc prvého rádu pre $2n$ neznámych funkcií času $q_i(t), p_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, kde q_i sú zovšeobecnené súradnice a p_i sú zovšeobecnené hybnosti.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{p} &= -\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \mathbf{X} \\ \frac{d}{dt}\mathbf{q} &= +\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \mathbf{Y}\end{aligned}\tag{2.11}$$

Veta 2.4.2 (Zákon zachovania energie).

Ak funkcia \mathcal{H} nezávisí explicitne na t , potom je prvým integrálom systému (2.11), tj. $\mathcal{H}(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)) = k, k \in \mathbb{R}$ na nejakom intervale $I \subseteq \mathbb{R}$.

Dôsledok tejto vety je ten, že pre každú trajektóriu γ tohto systému existuje konštanta $k \in \mathbb{R}$ taká, že γ je súvislou komponentou hladiny funkcie \mathcal{H} , tj. množiny $\mathcal{H}^{-1}(k)$. Fázový portrét možno teda zistiť analýzou takýchto hladín funkcie \mathcal{H} . Zrejme nutnou podmienkou pre systém (2.11) je $\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\mathbf{X} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\mathbf{Y} = 0$ (a aj postačujúcou v prípade systému 2 rovníc). Teda divergencia Hamiltonovho poľa (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) je nulová. Z toho máme (keďže to platí pre každé solenoidálne pole) nasledujúcu vetu.

Veta 2.4.3 (Liouville).

Nech $D_0 \subset \mathbb{R}^k$ je ohraničená oblasť vo fázovom priestore systému $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ a ϕ_t je ním generovaný (časovo závislý) fázový tok^a. Potom pre $D_t := \phi_t(D_0)$ platí

$$\frac{d\lambda_k(t)}{dt} = \int_{D_t} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

^aT.j. riešenie závislé na počiatočnom stave

Dôsledok 2.4.4.

Hamiltonove polia zachovávajú objem (vo fázovom priestore).

Obr. 2.3: Vývoj ensamble klasického konzervatívneho systému vo fázovom priestore (hore). Každý systém pozostáva z jednej hmotnej častice v jednorozmernej potenciálovej jame (červená krivka). Spočiatku kompaktný ensemble v priebehu času začne víriť. Ensemble je myslená množina systémov s rovnakými vonkajšími parametrami (napr. objem nádoby, gravitačné polia atď.), ale s rôznymi mikrostavmi - pojem štatistickej fyziky.

Problém 2.4.5.

Ukážte, že v 2D prípade je nutná podmienka aj postačujúcou.

Ukážte, že nutná podmienka pre nasledujúci systém je splnená, avšak systém nie je Hamiltonov.

$$q_1'' = -q_1, \quad q_2'' = q_1.$$

Príklad 2.4.6 (Klasické príklady).

Ukážeme, že systém

$$\begin{aligned}x' &= y(13 - x^2 - y^2), \\y' &= 12 - x(13 - x^2 - y^2),\end{aligned}\tag{2.12}$$

je Hamiltonov. Máme $\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{X} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{Y} = -2xy + 2xy = 0$ a teda podmienka je splnená. Nájdite \mathcal{H} tohto systému a načrtnite fázový diagram !

Príklad 2.4.7.

1. Hamiltonova funkcia pre jednorozmerný pohyb voľnej častice (HB):

$$\mathcal{H} = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 = \frac{p^2}{2m}$$

2. Hamiltonova funkcia častice s nábojom q v elektromagnetickom poli s elektrickým potenciálom φ (magnetický vektorový potenciál v nej nevystupuje):

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi$$

3. Hamiltonova funkcia relativistickej častice (pre nenabitú časticu odpadá člen s q):

$$\mathcal{H} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\varphi$$

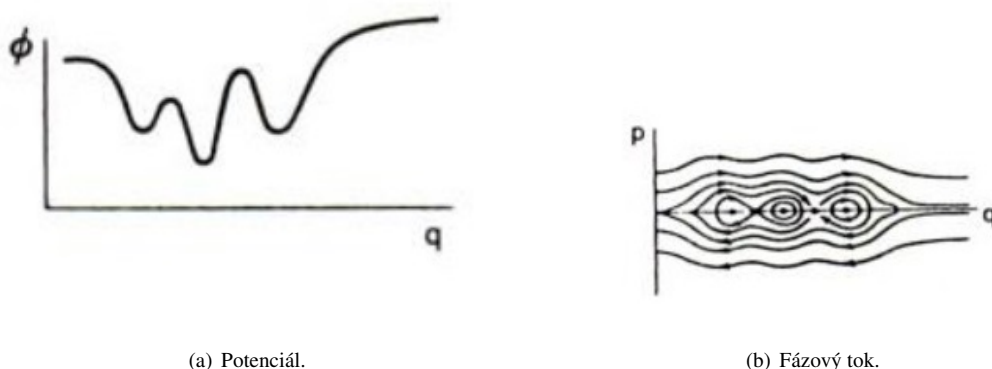
Hamiltonove systémy môžu mať relatívne zložité vlastnosti. Jednoduchšie vlastnosti trajektorií majú tzv. gradientné systémy.

Gradientný systém:

Nech $U \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$, $k \geq 1$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená množina. Gradientný systém na Ω je systém tvaru

$$\mathbf{y}' = -\nabla U(\mathbf{y}).\tag{2.13}$$

Obr. 2.4: Matematické kyvadlo s počiatočnými uhlami 45° , 135° a 180° .



Obr. 2.5: Vzťah potenciálu a fázového portréту.

Problém 2.4.8.

Potenciál (konzervatívneho) elektrostatického poľa možno chápať ako potenciálnu energiu jednotkového náboja. Záporný gradient potenciálu je rovný intenzite elektrického poľa, tzn. $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi(\mathbf{r})$. Čo predstavujú krivky vo fázovom portréte rovnice $\mathbf{r}' = -\nabla \varphi(\mathbf{r})$. ?

Problém 2.4.9.

Nech $W \in C^2(U, \mathbb{R})$, určte nutnú podmienku na to, aby systém bol gradientný. Ako je to s postačujúcou podmienkou ?

Ktoré lineárne systémy s konštantnými koeficientami sú gradientné?

Veta 2.4.10.

Nech \mathbf{y} je riešenie sústavy (2.13), potom $U(\mathbf{y}(t))$ je nerastúca funkcia.

Všimnime si, že $\frac{dU(\mathbf{y}(t))}{dt} = -\langle -\nabla U(\mathbf{y}(t)), \mathbf{y}'(t) \rangle = -\|\nabla U(\mathbf{y}(t))\|^2 \leq 0$. Ak je $\nabla U(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, potom je orbita ekvilibrium. V opačnom prípade platí striktná nerovnosť, teda naozaj U klesá pozdĺž trajektórií.

Dôsledok 2.4.11.

Gradientný systém nemá periodické trajektórie.

Veta 2.4.12 (Ortogonalita).

Ak je systém (2.11) autonómny Hamiltonov systém s n -stupňami voľnosti, potom je systém kolmý na (2.11) gradientný v \mathbb{R}^{2n} , teda (2.13) s $U = H$ a $\mathbf{y} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$, a jeho trajektórie pretínajú plochy $\mathcal{H} = \text{kont.}$ kolmo.

Poznámka 2.4.13.

V prípade dvojrozmerných systémov je gradientný systém v tvare

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \end{pmatrix}$$

a Hamiltonov systém v tvare

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Podobne vieme všeobecne zapísať Hamiltonov systém ako

$$\mathbf{y}' = J\nabla\mathcal{H}(\mathbf{y}),$$

kde $\mathbf{y} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ a $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ a (párny) gradientný systém ako $\mathbf{y}' = -I_{2n}\nabla U(\mathbf{y})$. Z

tohto je zaujímavé, že aj geometria je iná pre tieto dva typy systémov. Kým gradientné systémy sú asociované s varietami s Riemannovskou metrikou, pre hamiltonovské to nahrádzame tzv. symplektickou formou.

Prednáška 3

3.1. Teória stability

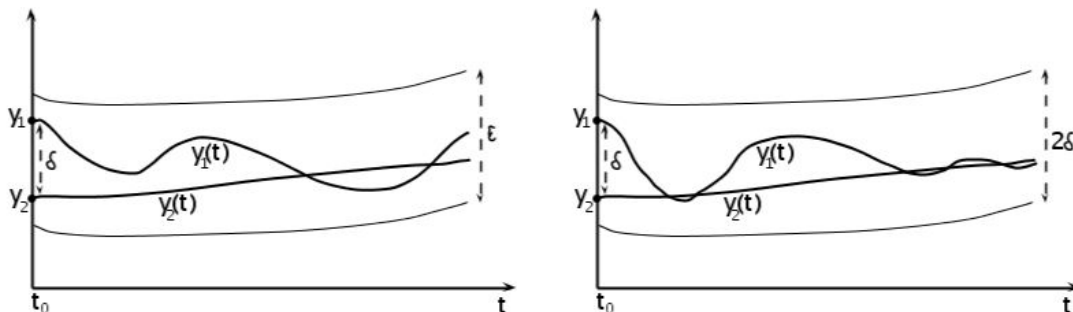
V inžinierskej praxi je nutné, aby rôzne systémy pracovali v stabilnom režime. V prípade poruchy potrebuje inžinier vedieť, či sa doň systém vráti. Ak systém nie je stabilný, môže byť jeho správanie sa dokonca nebezpečné (napr. mosty). Fyzikálny význam - stabilita (lineárneho, diferenciálneho) systému je jeho vlastnosť vyjadrujúca schopnosť sa navrátiť do rovnovážneho stavu po "odznení poruchy", ktorá ho z neho vyviedla. V tejto kapitole budeme teda vyšetřovať závislosť od začiatočných podmienok a parametrov. Majme systém (1.6), kde \mathbf{f} je spojitá vektorová funkcia na množine $[t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, pričom (maximálne) riešenie $\psi(t, t_0, \xi)$ existuje na $[t_0, \infty)$ a označuje riešenie, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $\psi(t_0, t_0, \xi) = \xi$.

Definícia 3.1.1.

Riešenie $\psi(t, t_0, \xi)$ rovnice (1.6) sa nazýva **stabilné** (v zmysle Ljapunova), ak pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi_1 - \xi_2\| < \delta \Rightarrow \|\psi(t, t_0, \xi_1) - \psi(t, t_0, \xi_2)\| < \varepsilon$ pre každé $t \geq t_0$. Ak platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\psi(t, t_0, \xi_1) - \psi(t, t_0, \xi_2)\| = 0,$$

potom sa riešenie $\psi(t, t_0, \xi)$ nazýva **pozitívny atraktor**. Ak platia obe podmienky, hovoríme, že riešenie je **asymptoticky stabilné**. Riešenie sa nazýva **nestabilné**, ak nie je stabilné. Rovnica sa nazýva **stabilná (asymptoticky stabilná, nestabilná)**, ak všetky jej riešenia sú stabilné (asymptoticky stabilné, nestabilné).



(a) Stabilné riešenie v zmysle Ljapunova.

(b) Asymptoticky stabilné riešenie.

Obr. 3.1: Stabilné riešenia v priestore trajektórií.

Poznámka 3.1.2.

Geometrický význam definície stability: riešenia, ktoré sú si δ -”blízke” v začiatočnom momente, zostanú navzájom ϵ -”blízke” aj pre všetky hodnoty $t \geq t_0$. Asymptoticky stabilné riešenie navyše konverguje k nejakému ekvilibriu.

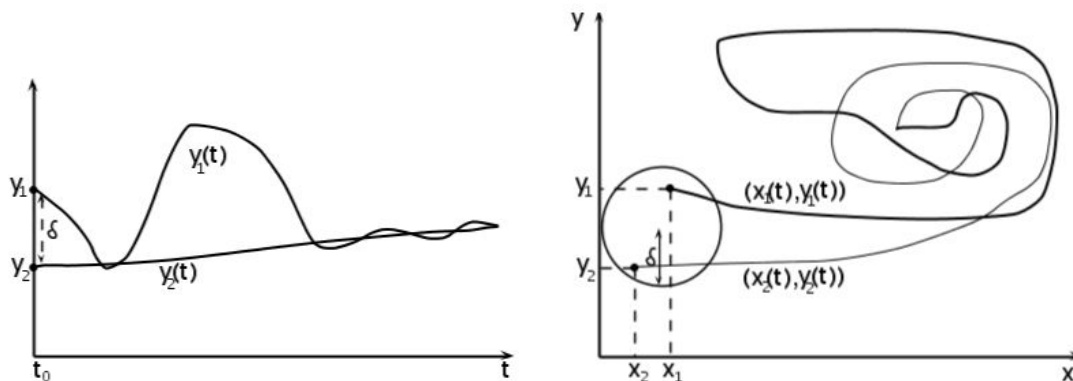
Problém 3.1.3.

Napíšte definíciu nestabilného riešenia.

Definícia 3.1.4.

Ak špeciálne $\|\psi(t, t_0, \xi_1) - \psi(t, t_0, \xi_2)\| < K e^{-b(t-t_0)}$, $b, K > 0$, pre každé $t \geq t_0$, potom sa riešenie $\psi(t, t_0, \xi)$ nazýva **exponenciálne stabilné**.

Zrejme každé exponenciálne stabilné riešenie je asymptoticky stabilné, ktoré navyše konverguje aspoň tak rýchlo ako nejaká exponenciálne klesajúca funkcia.



(a) Atraktor v priestore trajektórií.

(b) Atraktor vo fázovom priestore.

Obr. 3.2: Pozitívny atraktor.

Príklad 3.1.5.

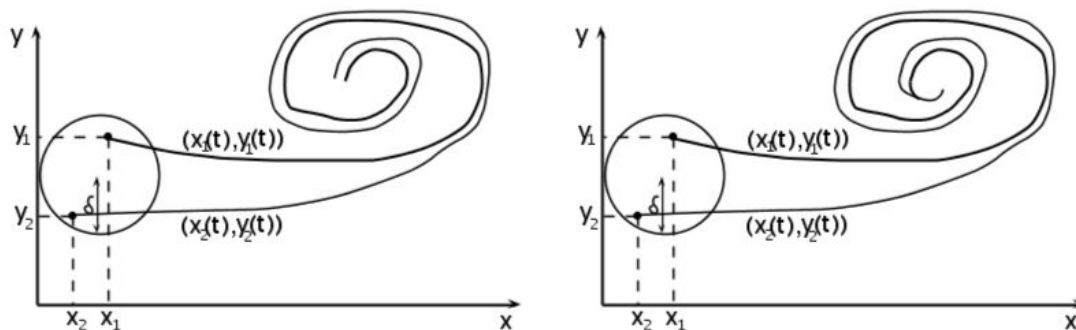
Pre diferenciálnu rovnicu $x' = kx$, $k \in \mathbb{R}$ je $\psi(t, t_0, \xi) = \xi e^{k(t-t_0)}$. Zrejme nám hodnota k ovplyvní stabilitu riešenia.

- Ak $k = 0$, potom $\psi(t, t_0, \xi) = \xi$ a zrejme $\|\psi(t, t_0, \xi_1) - \psi(t, t_0, \xi_2)\| = \|\xi_1 - \xi_2\|$. Teda pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ stačí vziať $\delta = \varepsilon$ a vidíme, že rovnica je stabilná (zrejme žiadne riešenie nie je asymptoticky stabilné).
- Ak $k < 0$, potom pre každé $\varepsilon > 0$ a $0 < \delta < \varepsilon$ je $\|\psi(t, t_0, \xi_1) - \psi(t, t_0, \xi_2)\| = e^{k(t-t_0)}\|\xi_1 - \xi_2\| < \varepsilon$. Navyše je $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\psi(t, t_0, \xi_1) - \psi(t, t_0, \xi_2)\| = 0$. Rovnica je teda asymptoticky stabilná.
- Ak $k > 0$, potom $\|\psi(t, t_0, \xi_1) - \psi(t, t_0, \xi_2)\| = e^{k(t-t_0)}\|\xi_1 - \xi_2\| \rightarrow \infty$, ak $t \rightarrow \infty$. Rovnica je teda nestabilná.

Poznámka 3.1.6.

V lineárnom prípade stačí namiesto skúmania stability partikulárneho riešenia skúmať stabilitu triviálneho riešenia transformovaného systému a teda stačí skúmať stabilitu homogénnych systémov.

Nasledujúce vety sa týkajú lineárneho systému s konštantnými koeficientami (2.4). Pre určenie stability či nestability nulového ekvilibría sú rozhodujúce vlastnosti koreňov charakteris-



(a) Stabilné riešenie v Ljapunovom zmysle.

(b) Asymptoticky stabilné riešenie.

Obr. 3.3: Stabilné riešenia vo fázovom priestore.

tickej rovnice $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$.

Veta 3.1.7 (Stabilita podľa charakteristických čísel).

1. Ak je rovnica (2.4) stabilná, potom $\Re(\lambda) \leq 0$ pre každé vlastné číslo matice \mathbf{A} .
2. Ak $\Re(\lambda) \leq 0$ pre každé vlastné číslo matice \mathbf{A} , pričom ak $\Re(\lambda) = 0$, tak Jordanov blok zodpovedajúci tomuto vlastnému číslu je jednoduchý, t.j. diagonálny (nemá jednotky nad diagonálou). Potom rovnica (2.4) je stabilná.
3. Rovnica (2.4) je asymptoticky stabilná \Leftrightarrow ak $\Re(\lambda) < 0$ pre každé vlastné číslo matice \mathbf{A} .
4. Ak existuje vlastné číslo λ matice \mathbf{A} tak, že $\Re(\lambda) > 0$, alebo vlastné číslo matice \mathbf{A} s $\Re(\lambda) = 0$ a nejednoduchým Jordanovým blokom, potom je rovnica (2.4) nestabilná.

Veta 3.1.8 (Nutná podmienka asymptotickej stability).

Nech rovnica (2.4) je asymptoticky stabilná a jej charakteristická rovnica má tvar

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k = 0 \quad (a_n = 1), \text{ potom } a_k > 0, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Pri určovaní stability je teda nutné zistiť či majú všetky korene záporné reálne zložky. Je známe, že kladnosť všetkých koeficientov nie je postačujúcou podmienkou na to, aby všetky korene charakteristickej rovnice ležali naľavo od imaginárnej osi - táto podmienka je nutná i

postačujúca iba pre rovnice prvého a druhého stupňa. Odpoveď na otázku ako je to vo všeobecnosti nám dáva nasledujúca veta.

Definícia 3.1.9.

Nech $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n-1$, $a_n = 1$, polynóm $P(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k$, $n \geq 1$ sa nazýva **Hurwitzov**, ak všetky jeho korene majú zápornú reálnu časť. Matica $(H)_{ij} = a_{2i-j}$, kde $a_k = 0$ pre $k \notin \{0, 1, \dots, n\}$, sa nazýva **Hurwitzova matica** polynómu $P(\lambda)$. Ide o maticu typu $n \times n$, ktorá má tvar

$$\mathbf{H}_P(n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

kde $a_k = 0$ pre $k \notin \{0, 1, \dots, n\}$.

Nasledujúca veta nám dáva nutnú a postačujúcu podmienku asymptotickej stability.

Veta 3.1.10 (Routhove-Stodolove-Hurwitzove kritérium).

Nech $a_k > 0$, $k = 0, \dots, n-1$, $a_n = 1$. Potom je polynóm $P(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k$, $n \geq 1$ Hurwitzov vtedy a len vtedy, ak jeho Hurwitzova matica má kladné všetky hlavné diagonálne minory.

Poznámka 3.1.11.

Pre hlavné minory matice platí $\Delta_1 = a_1 > 0$, $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \dots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0$. Navyše poslednú podmienku možno nahradiť podmienkou $a_n > 0$. Je vhodné, aby výpočty determinantov boli robené v tomto poradí: $\Delta_n, \Delta_1, \Delta_2$, atď.

Hurwitzova matice je rovnakého rádu ako stupeň polynómu a v prípade $n = 3$ má tvar

$$\mathbf{H}_p(3) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Problém 3.1.12.

Skúmajte stabilitu nulového riešenia rovnice

$$y^{(5)} + y^{(4)} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$$

Príklad 3.1.13.

Zistíme, pre ktoré $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je systém

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3, \\ x_2' &= -\alpha x_1 - x_2 + \alpha x_3, \\ x_3' &= -\beta x_1 - \alpha x_2 - x_3, \end{aligned} \tag{3.1}$$

asymptoticky stabilný. Charakteristický polynóm systému (3.1) je

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + (3 + 2\alpha^2 + \beta^2)\lambda + (1 + 2\alpha^2 + \beta^2).$$

Máme teda $a_0 = 1 + 2\alpha^2 + \beta^2$, $a_1 = 3 + 2\alpha^2 + \beta^2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 1$ a platí, že Hurwitzova matica má kladné všetky hlavné diagonálne minory pre všetky $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Problém 3.1.14.

Určte, pre aké hodnoty parametrov p, q je systém

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2, \\x_2' &= x_3, \\x_3' &= -x_1 - qx_2 - px_3,\end{aligned}\tag{3.2}$$

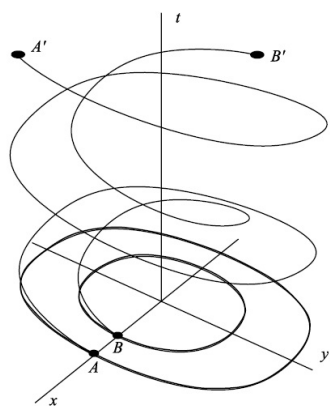
asymptoticky stabilný.

3.2. Klasifikácia ekvilibríí systémov 2×2

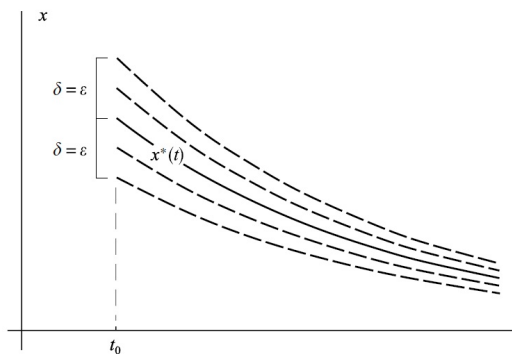
Pozrieme sa na klasifikáciu stacionárnych bodov systému

$$\begin{aligned}x' &= Ax + By, \\y' &= Cx + Dy.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Podľa správania sa trajektórií v okolí stacionárnych bodov rozdelíme tieto stacionárne body do niekoľkých navzájom disjunktných skupín. Zjednodušene povedané, kedykoľvek sa medzi vlastnými hodnotami matice koeficientov pravej strany v stacionárnom bode objaví vlastná hodnota so zápornou reálnou časťou, existuje trajektória konvergujúca do tohto bodu. Ak má niektorá vlastná hodnota kladnú reálnu časť, existuje trajektória vychádzajúca z tohto bodu. Ak majú vlastné hodnoty nenulovú imaginárnu časť, dochádza v okolí stacionárneho bodu k osciláciám.



(a) Integrované krivky prislúchajúce k stacionárnemu bodu typu centrum. Aj keď na začiatku sú blízko seba v bodoch A a B, časom sa od seba vzdialia (body A', B').



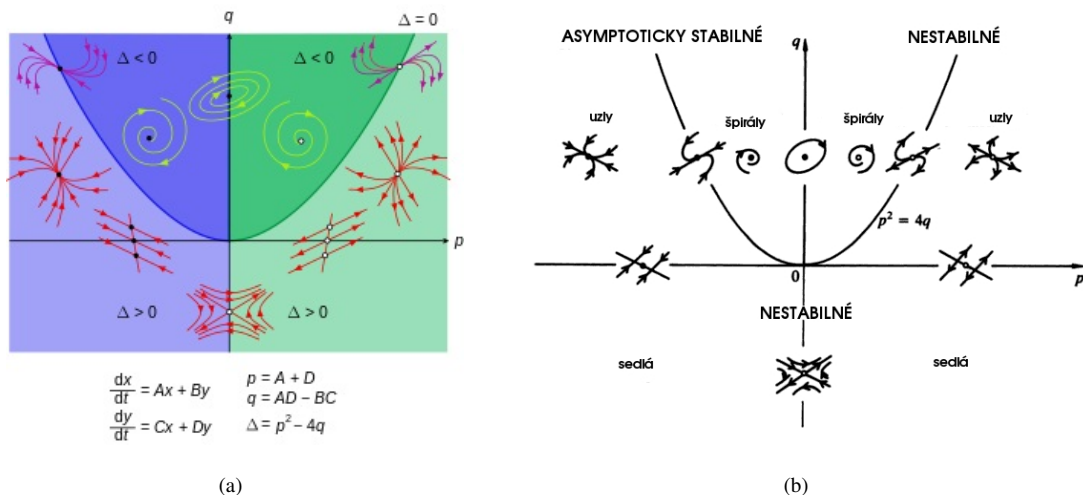
(b) Ljapunova stabilita riešenia $x^*(t) = x_0 e^{-(t-t_0)}$.

Obr. 3.4: Stabilita typických riešení.

Tabuľka 3.1: Klasifikácia ekvilibríí systému (3.3) pre nedegenerované prípady.

Diskriminant	Vlastné hodnoty	Kritický bod	Stabilita	Lokálny tok
$\Delta > 0$	$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	uzol	AS	\searrow v oboch súradniciach k x^*
$\Delta > 0$	$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	uzol	N	\nearrow v oboch súradniciach od x^*
$\Delta > 0$	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	sedlo	N	v jednom smere \nearrow a v druhom \searrow
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, 2 vl. vektory	dikrit. uzol	N	\nearrow v oboch súradniciach od x^*
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, 2 vl. vektory	dikrit. uzol	AS	\searrow v oboch súradniciach k x^*
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, 1 vl. vektor	degen. uzol	N	\nearrow v oboch súradniciach od x^*
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, 1 vl. vektor	degen. uzol	AS	\searrow v oboch súradniciach k x^*
$\Delta < 0$	$\Re(\lambda_i) < 0, i = 1, 2$	špirála	AS	má špirálový pohyb smerom k x^*
$\Delta < 0$	$\Re(\lambda_i) > 0, i = 1, 2$	špirála	N	má špirálový pohyb smerom od x^*

Version: 5.0



Obr. 3.5: Klasifikácia ekvibríí systému (3.3).

Poznámka 3.2.1.

Špirála sa niekedy nazýva aj fókus, alebo ohnisko. Centrum sa volá aj stred a degenerovaný uzol zasa nevlastný. Dikritický uzol sa v angličtine výstižnejšie nazýva star. Sedlový bod sa nazýva aj hyperbolický bod, čo je vzhľadom na grafické znázornenie výstižné.

3.3. Klasifikácia ekvibríí nelineárnych autonómnych systémov

Teraz sa pozrime na autonómny diferenciálny systém, t.j. systém (1.6), ktorý však explicitne nezávisí na t . Uvažujme teda systém

$$y' = f(y). \tag{3.4}$$

Poznámka 3.3.1.

Každá integrálna krivka systému (3.4) je tangenciálna k smerovému poľu \mathbf{f} v každom bode.

Definícia 3.3.2.

Nech \mathbf{y}^0 je singulárny (stacionárny) bod rovnice (3.4), t.j. $\mathbf{f}(\mathbf{y}^0) = \mathbf{0}$. Tento bod sa nazýva **stabilný (asymptoticky stabilný, nestabilný)**, ak riešenie $\psi(t, 0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{y}^0$ rovnice (3.4) je stabilné (asymptoticky stabilné, nestabilné).

Poznámka 3.3.3.

Ak \mathbf{y}^0 je singulárny bod rovnice (3.4), potom je vlastne jej konštantným riešením ak spĺňa počiatočnú podmienku. Takéto riešenie nazývame aj **ekvilibríum**.

Uvedieme si dve vety, ktoré na vyšetrenie stability využívajú linearizáciu v okolí singulárnych bodov.

Veta 3.3.4 (Ljapunovova o linearizácii).

Nech $\mathbf{f} \in C^1(E)$, $\mathbf{y}_* \in E \subset \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{y}_* \in \mathbb{R}^n$ je singulárny bod rovnice (3.4). Ďalej nech všetky vlastné čísla príslušnej Jacobiho matice $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{y}_*)$ majú záporné reálne časti, potom bod \mathbf{y}_* je asymptoticky stabilný (takýto singulárny bod nazývame aj atraktor - opakom je repeler).

Definícia 3.3.5.

Singulárny bod \mathbf{y}^0 systému (3.4) nazveme **hyperbolický**, ak žiadna z vlastných hodnôt príslušnej Jacobiho matice $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{y}^0)$ neleží na imaginárnej osi.

Singulárny bod \mathbf{y}^0 systému (3.4) nazveme **nedegenerovaný**, ak žiadna z vlastných hodnôt príslušnej Jacobiho matice $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{y}^0)$ nie je nulová.

Veta 3.3.6.

- (I) Nech systém (3.4) je analytický, Hamiltonov a dimenzie $n = 2$, potom každý nedegenerovaný singulárny bod tohto systému je buď centrum, alebo sedlový bod.
- (II) Nech systém (3.4) je analytický, gradientný a dimenzie $n = 2$, potom každý nedegenerovaný singulárny bod tohto systému je buď uzol, alebo sedlový bod.

Poznámka 3.3.7.

Ak nedegenerovaný singulárny bod je sedlovým bodom (ostrým lokálnym maximom, ostrým lokálnym minimom) hamiltoniánu $H(x, y)$ tak je sedlovým bodom (centrom) daného Hamiltonovho systému. Navyše, ak nedegenerovaný singulárny bod je sedlovým bodom (ostrým lokálnym maximom, ostrým lokálnym minimom) potenciálu $U(x, y)$ tak je sedlovým bodom (nestabilným uzlom, stabilným uzlom) daného gradientného systému.

Veta 3.3.8 (Grobmanova-Hartmanova).

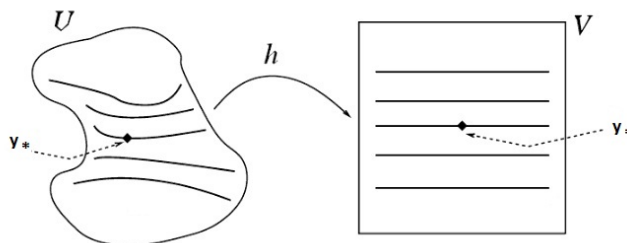
Nech \mathbf{y}_* je hyperbolický singulárny bod systému (3.4). Nech $\mathbf{f} \in C^1(E)$, $\mathbf{y}_* \in E \subset \mathbb{R}^n$ a $U, V \subset \mathbb{R}^n$ sú také, že $\mathbf{y}_* \in U, V$, $t_* = 0 \in I$. Potom existuje homeomorfizmus $h : U \rightarrow V$ tak, že pre všetky začiatkové hodnoty $\mathbf{y}^0 \in U$ existuje otvorený interval $I \subset \mathbb{R}$, že pre všetky $(\mathbf{y}^0, t_0) \in U \times I$ platí

$$h(\psi(t, t_0, \mathbf{y}^0)) = e^{At} h(\mathbf{y}^0)$$

(systém (3.4) je lokálne topologicky ekvivalentný so svojou linearizáciou).

Poznámka 3.3.9.

Tento homeomorfizmus zobrazuje komponenty súvislosti prienikov trajektórií systému (3.4) s U na komponenty súvislosti prienikov trajektórií svojej linearizácie s V , pričom zachováva aj orientáciu trajektórií (zobrazuje trajektórie jedného systému blízko trajektórií druhého).



Obr. 3.6: Lokálna topologická ekvivalencia systému (3.4) a jeho linearizácie.

Nasledujúca veta nám umožňuje vyšetriť stabilitu aj v okolí bodov, ktoré nie sú **hyperbolické**. Nie vždy sa nám to však musí podariť, keďže to závisí od nájdenia istej funkcie. Základnou myšlienkou priamej Ljapunovej metódy je, že je možné posúdiť stabilitu pohybu sústavy aj bez znalosti celého priebehu jemu odpovedajúcej trajektórie. Ljapunova metóda je zovšeobecnením Lagrangeovho tvrdenia, že postačujúcou podmienkou stability rovnovážneho stavu x^* sústavy je, aby celková energia sústavy bola v tomto stave (odpovedá mu singulárny bod fázového priestoru) minimálna. Teda celková energia sústavy pri pohybe smerom k rovnovážnemu stavu sústavy klesá, ak je tento stav stabilný. Ljapunov vlastne zovšeobecnil uvedené tvrdenie.

Veta 3.3.10 (Ljapunovova).

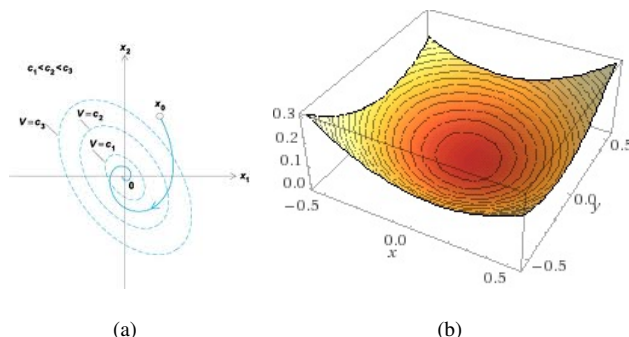
Nech $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ je okolie bodu $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ a existuje funkcia $V \in C^1(U, \mathbb{R})$ taká, že platí:

- (I) $V(\mathbf{y}) \geq 0$ pre všetky $\mathbf{y} \in U$, pričom $V(\mathbf{y}) = 0, \mathbf{y} \in U \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{0}$
- (II) Existuje funkcia $W \in C(U, \mathbb{R})$ taká, že $W(\mathbf{y}) \geq 0$ pre všetky $\mathbf{y} \in U$, pričom $W(\mathbf{y}) = 0, \mathbf{y} \in U \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{0}$ a

$$\dot{V} = \langle \nabla V(\mathbf{y}), \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\mathbf{y})}{\partial y_i} f_i(\mathbf{y}) \leq -\beta W(\mathbf{y})$$

pre všetky $\mathbf{y} \in U$, kde $\beta \geq 0$. Potom, ak $\beta = 0$ ($\beta > 0$), tak triviálne riešenie rovnice (3.4) je stabilné (asymptoticky stabilné).

- (III) Ak \dot{V} je pozitívne definitná na U , potom je triviálne riešenie rovnice (3.4) nestabilné.



Obr. 3.7: Typický tvar Ljapunovej funkcie.

Poznámka 3.3.11.

Vlastnosť (I) sa nazýva pozitívna definitnosť funkcie. Vlastnosť (II) hovorí o tom, že funkcia V je nerastúca pozdĺž trajektórií systému, t.j. jej derivácia (podľa t) je nekladná na nejakom okolí počiatku. Túto vetu je možné formulovať aj všeobecnejšie a to tak, že pravá strana systému (3.4) a funkcia V závisia explicitne aj od premennej t . Takýmto prípadmi sa však nebudeme zaoberať.

Geometrický význam (zo skalárneho súčinu) takto definovanej asymptotickej stability je, že fázové trajektórie musia v uvažovanom okolí počiatku pretínať plochy $V(\mathbf{y}) = C$ smerom od väčších hodnôt C k hodnotám menším (pre $t \rightarrow \infty$).

Poznámka 3.3.12.

Nevýhodou uvedenej metódy je, že nemáme návod ako túto funkciu nájsť. Pozor - nie je ani zaručené, že oblasť stavového priestoru, v ktorom platí uvedená podmienka stability reprezentuje celú skutočnú oblasť stability (voľba Ljapunovej funkcie nie je jednoznačná).

Príklad 3.3.13.

Uvažujme systém

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 x_2^4, \\x_2' &= -x_1^2 x_2.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Funkcia $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$ zrejme spĺňa prvú podmienku predchádzajúcej vety a $\frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = -2x_1^2 x_2^4 \leq 0$ pre všetky $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Teda bod $(0, 0)$ je stabilný.

Príklad 3.3.14.

Uvažujme systém

$$\begin{aligned}x_1' &= -x_1^3 - x_2, \\x_2' &= x_1 - x_2^3.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Funkcia $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ zrejme spĺňa prvú podmienku predchádzajúcej vety a $\frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = -2(x_1^4 + x_2^4)$. Ak definujeme $W(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$ a $\beta = -2$, potom z druhej podmienky vety je singulárny bod $(0, 0)$ asymptoticky stabilný.

Pozrieme sa ešte na to, kedy máme zaručenú neexistenciu periodických trajektórií riešení (tzv. limitných cyklov).

Veta 3.3.15 (Dulacov test ($\rho = 1$ - Bendixson)).

Nech D je jednoducho súvislá oblasť fázového priestoru systému $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$ a $\rho(x, y)$ je taká funkcia, že $\rho f, \rho g \in C^1$. Potom, ak $\text{div}(\rho f, \rho g)$ nemení znamienko s.v. v D , tento systém nemá periodickú trajektóriu v D .

Príklad 3.3.16.

Majme systém $x' = y + x^3$, $y' = x + y + y^3$. Zrejme $\text{div}(f, g) = 3x^2 + 1 + 3y^2 \geq 1 > 0$ na \mathbb{R}^2 . Tento systém teda nemá periodickú trajektóriu.

Príklad 3.3.17.

Majme systém $x' = y$, $y' = ax + by + cx^2 + dy^2$, $b, d \neq 0$. Zrejme $\operatorname{div}(e^{-2d x} f, e^{-2d x} g) = e^{-2d x} b \neq 0$ na \mathbb{R}^2 . Tento systém teda nemá periodickú trajektóriu.

Poincaré navyše ukázal, že ak oblasť je jednoducho súvislá a nemá žiadne stacionárne body, potom nemôže obsahovať žiadne uzavreté trajektórie.

Matematická analýza pre fyzikov IV.

JOZEF KISELÁK

Rýchle odkazy

Prednáška 4

4.1. Priestory so skalárnym súčinom

Pomocou skalárneho súčinu sa na priestore dajú rozumne definovať geometrické pojmy uhol a vzdialenosť, čím na priestore vzniká dodatočná geometrická štruktúra. Pomenovanie prehilbertovský priestor poukazuje na skutočnosť, že ľubovoľné jeho zúplnenie je Hilbertov priestor. Teória Hilbertových priestorov sa používa v kvantovej mechanike, kde sa stavy fyzikálneho systému popisujú pomocou prvkov nejakého Hilbertovho priestoru. Často sa predpokladá, že daný Hilbertov priestor je navyše reprezentácia nejakej grupy (zvyčajne grupy transformácií Lorentzových transformácií). S termínom Hilbertov priestor sa stretávame aj pri jadrovej transformácii pri metóde "support vector machines" populárnej v strojovom učení.

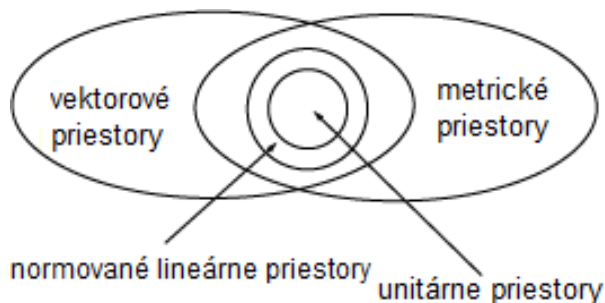
Definícia 4.1.1.

Nech X je vektorový priestor. Skalárnu funkciu $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ s nasledujúcimi vlastnosťami

- linearita: $\langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \beta \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$
- symetria: $\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
- pozitívna definitnosť: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ a $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ nazývame **skalárny súčin**.

Skalárny súčin je vlastne bilinéarna forma, ktorá prirodzeným spôsobom indukuje kvadratickú formu. Skalárny súčin je potom akákoľvek bilinéarna forma ktorá indukuje kladne definitnú kvadratickú formu.



Obr. 4.1: Diagram "matematických" priestorov.

Definícia 4.1.2.

Lineárny priestor so skalárnym súčinom nazývame aj **unitárny priestor (prehilbertov priestor)**. Úplný unitárny priestor nazývame **Hilbertov (H priestor)**.

Poznámka 4.1.3.

V unitárnom priestore je možné definovať aj uhol medzi prvkami $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ ako $\arccos \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$.

Príklad 4.1.4.

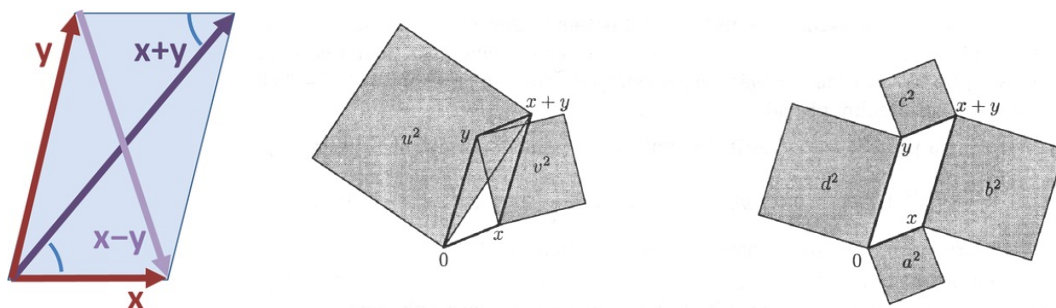
- Všeobecná forma skalárneho súčinu na \mathbb{C}^n je (známa ako Hermitovska forma) daná

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{x}^* \mathbf{M} \mathbf{y},$$

kde \mathbf{M} je ľubovoľná Hermitovská ($m_{ij} = \overline{m_{ji}}$) pozitívne-definitná matica, a \mathbf{x}^* konjugovaná transpozícia \mathbf{x} .

- Priestory l^2 , $\mathcal{L}^2(\Omega)$ sú unitárne.
- Na priestore reálnych matíc sa dá zaviesť skalárny súčin pomocou $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle := \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T)$.

Nasledujúcu nerovnosť už poznáme formulovanú pre rady, či integrály. Teraz si ju uvedieme pre skalárne súčiny.



(a) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

(b) $u^2 + v^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Obr. 4.2: Rovnobežníkové pravidlo.

Veta 4.1.5 (Cauchyova-Schwartzova nerovnosť).

Nech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalárny súčin na vektorovom priestore X .

- (i) Pre $x, y \in X$ platí $|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$.
- (ii) Funkcia $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ je norma na X .

Poznámka 4.1.6.

Predchádzajúca nerovnosť je zrejme špeciálnym prípadom Hölderovej nerovnosti ($p = q = 2$).

Zrejme každý unitárny priestor je NLP a teda metrický priestor.

Uvedieme si geometrické vlastnosti skalárneho súčinu, ktoré sa vlastne prenášajú s euklidovských priestorov.

Veta 4.1.7 (Polarizácia a rovnobežníkové pravidlo).

Majme priestor $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Potom platí

1. $4\langle x, y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2$
2. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

Poznámka 4.1.8.

Zrejme $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\Re(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) + \|\mathbf{y}\|^2$ (polarizácia je vlastne zovšeobecnenie kosínusovej vety).

V reálnom prípade môžeme skalárny súčin vyjadriť aj takto:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2),$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{4}(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2).$$

V komplexnom prípade zasa aj takto:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + i \|\mathbf{x} + i\mathbf{y}\|^2 - (1 + i)(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2).$$

Rovnako ako v geometrii roviny a trojrozmerného priestoru skalárny súčin umožňuje definovať situáciu, kedy dva prvky sú na seba kolmé. To nám umožňuje zaviesť aj ďalšie dôležité pojmy.

Definícia 4.1.9.

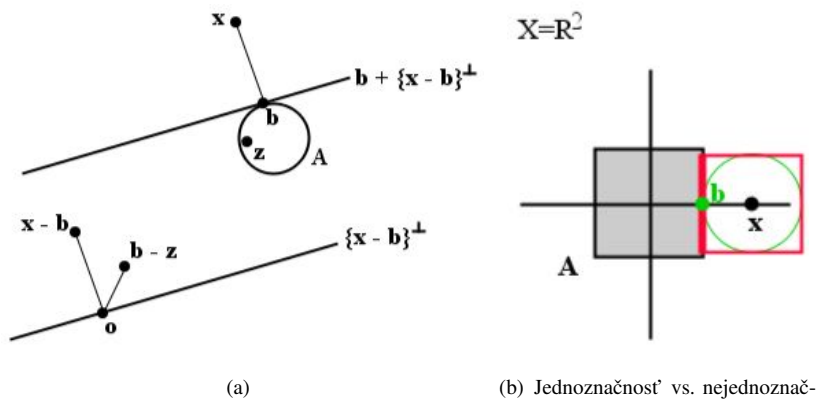
Dva prvky \mathbf{x}, \mathbf{y} lineárneho priestoru X so skalárnym súčinom nazývame **kolmé (ortogonálne)**, ak $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, zapisujeme to $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Hovoríme, že prvok $\mathbf{y} \in X$ je ortogonálny na $A \subseteq X$, ak $\mathbf{x} \perp \mathbf{a}$ pre ľubovoľné $\mathbf{a} \in A$. Hovoríme, že $A \subseteq X$ je ortogonálna, ak pre ľubovoľné $\mathbf{a} \in A$ platí $\mathbf{a} \perp A \setminus \{\mathbf{a}\}$. Podmnožiny $A, B \subseteq X$ nazývame navzájom ortogonálne, ak pre ľubovoľné $\mathbf{a} \in A$ platí $\mathbf{a} \perp B$.

Definícia 4.1.10.

Nech ľubovoľné $A \subseteq X$ je neprázdna množina. Potom množinu $A^\perp := \{\mathbf{x} \in X : \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = 0 \ \forall \ \mathbf{a} \in A\}$ nazývame **ortogonálny doplnok** A v X .

Poznámka 4.1.11.

Samozrejme je A^\perp lineárny podpriestor H . Je dokonca vždy uzavretý, čo plynie priamo zo Schwartzovej nerovnosti (a teda spojitosti skalárneho súčinu).



(b) Jednoznačnosť vs. nejednoznačnosť - stačí uvažovať normy $\|\cdot\|_2$ (zelenou) a $\|\cdot\|_\infty$ (červenou) v \mathbb{R}^2 .

Obr. 4.3: Najbližší prvok v H a v NLP X v prípade konvexných uzavretých množín.

Ďalšia známa geometrická vlastnosť, ktorá je však zovšeobecnená a to dvoma smermi.

Veta 4.1.12 (Pytagorova veta).

Majme H priestor. Ak $\mathbf{x}^i \in H, i = 1, \dots, n$ sú ortogonálne, potom platí

$$\left\| \sum_{k=1}^n \mathbf{x}^k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}^k\|^2.$$

Všimnime si, že rovnobežníkové pravidlo neobsahuje skalárny súčin, ale iba normy. Platí však iba v priestoroch so skalárnym súčinom.

Veta 4.1.13 (Charakterizácia H priestoru - von Neumann).

Banachov priestor $(X, \|\cdot\|)$ je Hilbertov priestor práve vtedy, keď platí rovnobežníkové pravidlo.

Nasledujúca veta nám dáva možnosť geometricky charakterizovať najbližší prvok uzavretých podpriestorov a konvexných množín v H priestoroch. Uzavretosť nie je postačujúca, ak hovoríme o LNP priestore X (poskúste sa nájsť kontrapríklad pre dvojicu priestorov c, c_0).

Veta 4.1.14 (O existencii najbližšieho prvku).

Nech H je Hilbertov priestor a $Y \subseteq H$. Potom platí:

1. Pre ľubovoľnú dvojicu $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) \in H \times Y$ je $\|\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in Y\} \Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{b} \in Y^\perp$.
2. Ak Y je uzavretý podpriestor, potom pre ľubovoľné $\mathbf{x} \in H$ existuje práve jedno $\mathbf{b} \in Y : \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in Y\}$.
3. Ak $\emptyset \neq A \subseteq H$ je konvexná a uzavretá podmnožina, potom pre ľubovoľné $\mathbf{x} \in H$ existuje práve jedno $\mathbf{b} \in A : \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| : \mathbf{a} \in A\}$.
4. Ak $Y \subseteq H$ je úplný podpriestor, tak $Y^{\perp\perp} = Y$.

Definícia 4.1.15.

Najbližší prvok $\mathbf{b} \in Y$ z predchádzajúcej vety nazývame **ortogonálna projekcia** prvku $\mathbf{x} \in H$ na Y . Operátor $P_Y : H \rightarrow H$ definovaný ako $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sa nazýva **ortogonálna projekcia** H na Y . P_Y je teda také zobrazenie, že pre ľubovoľné $\mathbf{x} \in H$ je $\|\mathbf{x} - P_Y\mathbf{x}\| = \text{dist}(\mathbf{x}, Y)$.

Poznámka 4.1.16.

Zobrazenie

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

je klasická kolmá projekcia.

Existujú aj neortogonálne projekcie. Napríklad pre $\alpha \neq 0$ je

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

taká projekcia.

Projekcia môže byť aj nelineárne zobrazenie, nech X je LNP:

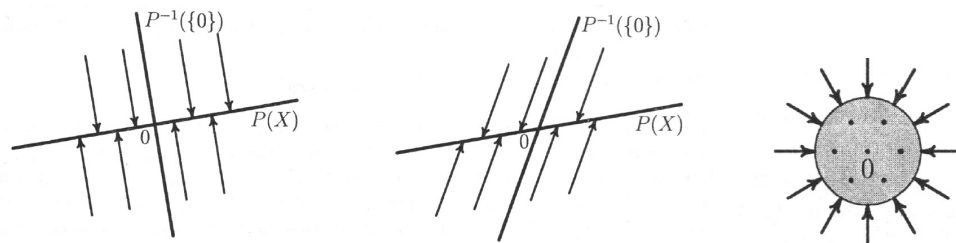
$$P : X \rightarrow \overline{B}(0, 1) : P(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, & \text{ak } \|\mathbf{x}\| > 1, \\ \mathbf{x}, & \text{ak } \|\mathbf{x}\| \leq 1. \end{cases}$$

Definícia 4.1.17.

Nech M, N sú podpriestory LNP X , potom ich **algebraický súčet** $M \oplus N$ definujeme takto: $M \cap N = \emptyset$ a $X = M + N := \{m + n : m \in M, n \in N\}$. Takže každý prvok $\mathbf{x} \in X$ vieme zapísať jednoznačne ako súčet $x_M + x_N$, kde $x_M \in M$ a $x_N \in N$.

Príklad 4.1.18.

Zrejme $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ je súčtom x -ovej $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ a y -ovej $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ osi.



(a) Ortogónálna a neortogónálna lineárna projekcia.

(b) Nelineárna projekcia.

Obr. 4.4: Typy projekcií z poznámky 4.1.16.

Dôsledok 4.1.19.

Nech H je Hilbertov priestor a Y je jeho uzavretý podpriestor, potom $H = Y \oplus Y^\perp$ a projekcie P_Y, P_{Y^\perp} sú spojité. (zrejme, ak $Y \neq H$, tak $Y^\perp \neq \emptyset$).

Veta 4.1.20 (Ortogónálne projekcie na konečnorozmerné podpriestory a ich doplnky).

Nech H je Hilbertov priestor a $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ sú LN.

1. Ak $G = \langle \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \rangle$, potom pre ľubovoľný prvok $\mathbf{y} \in H$ je

$$P_G(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\Gamma}_i}{\Gamma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)} \mathbf{x}_i,$$

kde Γ_i vznikne z Γ (gramián) nahradením i -teho stĺpca stĺpcom $(\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle, \dots, \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y} \rangle)^T$. Navyše pre $\mathbf{x}_0 \in H$ je $\text{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_0 + G) = \sqrt{\frac{\Gamma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y} - \mathbf{x}_0)}{\Gamma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)}}$.

2. Ak $L = \{\mathbf{y} \in H : \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y} \rangle = 0, i = 1, \dots, n\}$, potom pre ľubovoľný prvok $\mathbf{y} \in H$ je

$$P_L(\mathbf{y}) = \mathbf{y} - P_G(\mathbf{y})$$

3. Ak $V = \{\mathbf{y} \in H : \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y} \rangle = c_i, c_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, n\}$, potom pre ľubovoľný prvok $\mathbf{y} \in H$ je

$$P_L(\mathbf{y}) = \mathbf{y} - P_G(\mathbf{y}),$$

pričom Γ_i vznikne z Γ (gramián) nahradením i -teho stĺpca stĺpcom $(\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle - \bar{c}_1, \dots, \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y} \rangle - \bar{c}_n)^T$.

Je dobré si uvedomiť, že v predchádzajúcej vete je vo všeobecnosti v bode 1. množina G konečnorozmerná a v bodoch 2., 3. je konečnorozmerný zasa doplnok množín L, V .

Poznámka 4.1.21.

Majme H priestor. Dá sa ukázať, že pre neprázdny podpriestor $G \subseteq H$ a každé $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in H$ je

$$s := \sup_{\mathbf{0} \neq \mathbf{g} \in G} \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{g} \rangle|}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{g}\|} \in [0, 1],$$

a navyše, že existuje jediné $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $\cos \alpha = s$. Hodnotu α nazývame **uhol** medzi prvkom \mathbf{x} a množinou G , označujeme ho $\angle(\mathbf{x}, G)$ (v reálnom prípade zrejme modulus z čitateľa možno odstrániť).

Ak je navyše podpriestor G uzavretý, potom platí $s = \frac{\|P_G(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}$.

S pojmom Hilbertovho priestoru úzko súvisí pojem ortonormálna báza. Naším cieľom je vyjadrenie každého prvku priestoru H v tvare spočítateľnej kombinácie prvkov nejakej ortonormálnej sústavy. Ukazuje sa, že v prípade neseparabilného priestoru je taká sústava nespočítateľná.

Definícia 4.1.22.

Ľubovoľnú podmnožinu B priestoru H nazveme **ortogonálna sústava**, ak každé jej dva rôzne prvky sú kolmé. Je to teda taký systém $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$, že platí $\langle x_i, x_j \rangle = 0, i \neq j$ ($\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$) (naviac predpokladáme, že sú všetky nenulové). Ortogonálnu sústavu B nazveme **úplnou**, ak sa k nej už nedá pridať žiadny nenulový prvok z H , tj. pre každé \mathbf{x} platí: ak $\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{b} \in B$, potom $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Poznámka 4.1.23.

Zrejme z každej ortogonálnej postupnosti vieme ľahko urobiť ortonormálnu. Ak $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je ortogonálny systém, potom $\tilde{x}_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}, n \in \mathbb{N}$ je ortonormálny.

Príklad 4.1.24.

- Systém

$$\left\{ \frac{e^{\frac{i2\pi nx}{l}}}{\sqrt{l}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad l > 0$$

je ortonormálny v komplexnom priestore $\mathcal{L}^2(a, a + l)$, $a > 0$.

- Systém

$$\left\{ 1, \cos \frac{2\pi}{l} nx, \sin \frac{2\pi}{l} nx \right\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad l > 0$$

je ortogonálny v reálnom aj komplexnom priestore $\mathcal{L}^2(a, a + l)$, $a > 0$.

Nasledujúca veta je veľmi dôležitá. Jej dôkaz je z časti vlastne známa metóda ortogonalizácie: Gramov-Schmidtov ortogonalizačný proces. V podstate úplnosť systému v H priestore blízko súvisí s hustotou danej množiny a teda separabilitou priestoru, lebo platí, že pre každý prvok $\mathbf{x} \in H$ a pre každé $\varepsilon > 0$ existuje lineárna kombinácia $\mathbf{l} := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i : \|\mathbf{l} - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ (taký systém sa volá uzavretý - v neúplných priestoroch to nie je ekvivalentný pojem, tj. úplnosť systému neimplikuje uzavretosť).

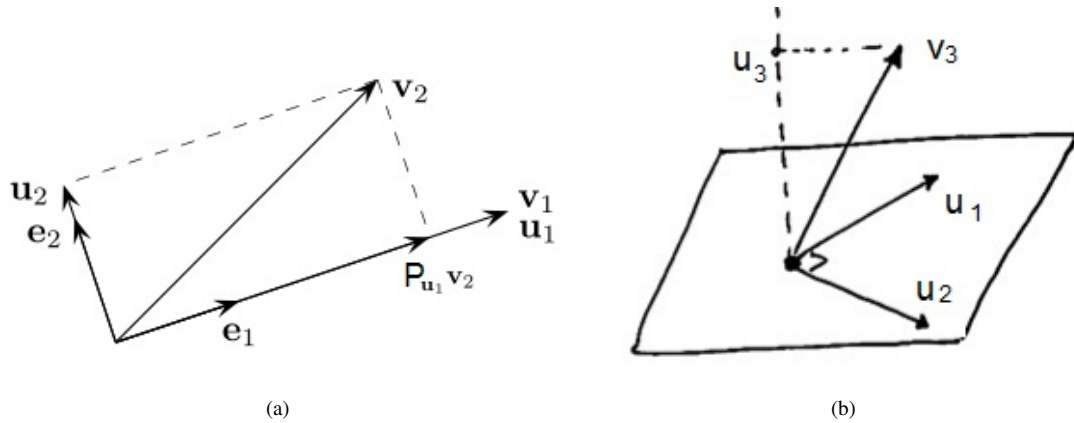
Veta 4.1.25 (O existencii bázy).

Majme H priestor, potom platí

1. V každom H priestore existuje úplná ortogonálna sústava.
2. Každá ortogonálna sústava je doplniteľná na úplnú.
3. V separabilnom priestore je ortogonálna sústava konečná, alebo spočítateľná.
4. V neseparabilnom priestore je ortogonálna sústava už nespočítateľná.

Definícia 4.1.26.

Ľubovoľný systém prvkov B v priestore H nazveme **báza**, akk je tento systém ortonormálny a úplný.



Obr. 4.5: Gramov-Schmidtov ortonormalizačný proces.

Príklad 4.1.27.

1. systém $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je báza v l^2
2. systém $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\} : f_n(x) = e^{2\pi i n x}$ je báza v $\mathcal{L}^2(0, 1)$

Gramov-Schmidtov ortonormalizačný proces:

Majme separabilný H priestor. Definujme operátor projekcie $P_{\mathbf{u}} : H \rightarrow H$

$$P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u},$$

ktorý robí kolmý priemet vektora \mathbf{v} na "priamku" generovanú vektorom \mathbf{u} . Majme LN neortogonálny systém $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots\}$, potom vygenerujeme prvých k ortonormálnych prvkov $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ takto:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1, & \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2), & \mathbf{e}_2 &= \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_3) - P_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_3), \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|}$$

$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_4 - P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_4) - P_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_4) - P_{\mathbf{u}_3}(\mathbf{v}_4), \quad \mathbf{e}_4 = \frac{\mathbf{u}_4}{\|\mathbf{u}_4\|}$$

\vdots

\vdots

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} P_{\mathbf{u}_j}(\mathbf{v}_k), \quad \mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|}. \quad (4.2)$$

Príklady úplných ortogonálnych sústav:

Uvažujme systém $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots, n \in \mathbb{R}$. Ľubovoľný konečný podsystem je LN v priestore $\mathcal{L}^2(-1, 1)$. Po ortonormalizácii dostaneme systém $L_n(t), n \in \mathbb{N}_0$ a keďže vieme, že každú spojitú funkciu vieme aproximovať polynómom s ľubovoľnou presnosťou, je tento systém hustý v $\mathcal{L}^2(-1, 1)$ (keďže aj množina $C([-1, 1])$ je taká). Takto sme dostali tzv. Legendreove polynómy. Podobne možno získať aj iné typy polynomickej sústav, napríklad ak uvažujeme priestor $\mathcal{L}_w^2(a, b)$.

Polynómy	Inerval	$w(t)$
Čebyševove 1. druhu	$[-1, 1]$	$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$
Čebyševove 2. druhu	$[-1, 1]$	$\sqrt{1 - x^2}$
Gegenbauerove	$[-1, 1]$	$(1 - x^2)^{\alpha - \frac{1}{2}}$
Hermiteove	\mathbb{R}	e^{-t^2}
Jacobiho	$(-1, 1)$	$(1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$
zovšeobecnené Laguerrove	$[a, \infty)$	$e^{-t} (t - a)^k$
Legendreove	$[-1, 1]$	1

Tabuľka 4.1: Niektoré známe ortogonálne polynómy.

Poznámka 4.1.28.

Pozor existujú aj neseperabilné Hilbertove priestory (príklad presahuje naše vedomosti).

Definícia 4.1.29.

Majme ľubovoľné metrické priestory $(\mathbf{M}_1, \rho_1), (\mathbf{M}_2, \rho_2)$. Bijektívne zobrazenie $f : \mathbf{M}_1 \rightarrow \mathbf{M}_2$ označíme ako **izometrické zobrazenie**, ak pre každé $x, y \in \mathbf{M}_1$ platí $\rho_2(f(x), f(y)) = \rho_1(x, y)$. Ak existuje izometrické zobrazenie priestoru \mathbf{M}_1 na \mathbf{M}_2 , potom sa tieto priestory nazývajú **izometrické**.

Pri izometrickom zobrazení sa teda zachovávajú vzdialenosti. Izometria je aj jednou zo symetrií vo fyzikálnom zmysle.

Príklad 4.1.30.

Rotácia, zrkadlenie, či posunutie sú izometrické zobrazenia v euklidovských priestoroch. Zobrazenie $x \rightarrow |x|$ nie je izometria.

Veta 4.1.31.

Ľubovoľný separabilný, nekonečnorozmerný Hilbertov priestor je izometrický s priestorom l^2 .

Prednáška 5

5.1. Fourierove rady

Základná myšlienka: Nech $\mathbf{x} \in H$ a $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$ je ortonormálny systém v H , dá sa tento prvok rozvinúť do radu $x = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \dots, c_n\phi_n + \dots$? Ako nájdeme $c_i, i = 1, 2, \dots$? Vynásobme obe strany skalárne funkciou ϕ_i , potom

$$\langle \mathbf{x}, \phi_i \rangle = c_1 \langle \phi_1, \phi_i \rangle + c_2 \langle \phi_2, \phi_i \rangle + \dots, c_n \langle \phi_n, \phi_i \rangle + \dots = c_i, i = 1, 2, \dots$$

Pokiaľ nepoviem inak, hovoríme o **konvergencii v priestore H** v klasickom zmysle, tj. o konvergencii v norme $\|*\| = \sqrt{\langle *, * \rangle}$.

Definícia 5.1.1.

Súčet prvých n členov Fourierovho radu prvku \mathbf{x} podľa systému $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nazývame **čiasťový súčet** Fourierovho radu prvku \mathbf{x} a označujeme ho $S_n(\mathbf{x})$. Teda

$$S_n(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{x}_k.$$

Pri konvergencii Fourierovho radu prvku \mathbf{x} budeme teda hovoriť o konvergencii čiastočných súčtov tohto Fourierovho radu (v danej norme, teda $\|S_n(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$).

Veta 5.1.2 (O jednoznačnosti).

Nech $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je ortogonálny systém v H . Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{x}_n$ konverguje k \mathbf{x} , potom koeficienty c_n sú určené vzt'ahom $c_n = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n \rangle}{\|\mathbf{x}_n\|^2}$

Definícia 5.1.3.

Ak $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je ortogonálny systém v H , potom číslo $c_n = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n \rangle}{\|\mathbf{x}_n\|^2}$ nazývame **n -tým Fourierovým koeficientom** prvku \mathbf{x} podľa tohto systému a rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n \rangle}{\|\mathbf{x}_n\|^2} \mathbf{x}_n$$

nazývame **Fourierovým radom** prvku \mathbf{x} .

Poznámka 5.1.4.

Z vety o jednoznačnosti vyplýva, že Fourierov rad ľubovoľného prvku \mathbf{x} konverguje a je zároveň Fourierovým radom svojho súčtu \mathbf{y} . Nedokázali sme ale, že tento Fourierov rad prvku \mathbf{x} konverguje práve k tomuto prvku. Vo všeobecnosti to ani nie je pravda, vid' nasledujúci príklad, kde $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$. Taktiež nie je každý rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{x}_n$ Fourierovým radom nejakého prvku \mathbf{x} .

Príklad 5.1.5.

Systém $\{\sin nx\}$, $n \in \mathbb{N}$ je ortogonálny v $H = \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$, ale Fourierov rad funkcie $f(x) = \cos x$ je podľa tohto systému rad samých núl a teda k f nekonverguje.

Zhrnieme si teda otvorené otázky.

1. Konverguje v H Fourierov rad každého prvku $\mathbf{x} \in H$?
2. Kedy konverguje Fourierov rad prvku $\mathbf{x} \in H$ k tomuto prvku ?
3. Kedy pre každé $\mathbf{x} \in H$ konverguje Fourierov rad prvku $\mathbf{x} \in H$ k tomuto prvku ?

4. Aké musia byť koeficienty c_n , aby rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{x}_n$ konvergoval v H ?

Najpr uvidíme tvrdenie, ktoré hovorí o vyjadrení blízkosti čiastočných súčtov Fourierovho radu daného prvku \mathbf{x} .

Veta 5.1.6 (Besselova identita).

Platí

$$\|S_n(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|\mathbf{x}_k\|^2.$$

Poznámka 5.1.7.

Ortogonalná množina funkcií $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ generuje lineárny podpriestor priestoru H . Funkcia (prvok) \mathbf{x} vo všeobecnosti v tomto podpriestore neleží. Ak uvážime Besselovu identitu, je vidieť, že n -tý čiastočný súčet Fourierovho radu funkcie \mathbf{x} je vlastne jej kolmým priemetom do podpriestoru tvoreného množinou funkcií $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$.

Nasledujúca veta hovorí, že zo všetkých možných čiastočných súčtov má najmenšiu odchýlku od daného prvku \mathbf{x} práve čiastočný súčet jeho Fourierovho radu.

Veta 5.1.8.

Pre ľubovoľné $T_n = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{x}_k$ a pre $S_n(\mathbf{x})$ z platí

$$\|S_n(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| \leq \|T_n - \mathbf{x}\|,$$

pričom rovnosť nastáva práve pre $T_n = S_n(\mathbf{x})$,

Veta 5.1.9 (Besselova nerovnosť).

Pre $\mathbf{x} \in H$ platí

$$(i) \|\mathbf{x}\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|\mathbf{x}_n\|^2,$$

$$(ii) \text{rad } \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|\mathbf{x}_n\|^2 \text{ konverguje, } \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| \|\mathbf{x}_n\| = 0,$$

$$(iii) \text{rad } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{x}_n \text{ konverguje v } H.$$

Z vety o jednoznačnosti okamžite vyplýva nasledujúce tvrdenie.

Veta 5.1.10 (Parsevalova rovnosť).

Fourierov rad prvku \mathbf{x} konverguje k tomuto prvku práve vtedy, ak platí

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|\mathbf{x}_n\|^2.$$

Prečo vlastne neudávame len rovnosť už vo vete 5.1.9? Lebo Besselova nerovnosť platí všeobecnejšie v ľubovoľnom Hilbertovom priestore, kde si zvolíme nejaký ortogonálny systém, podľa ktorého funkciu rozvíjame. V prípade, že tento systém je úplný, dostávame analogickú Parsevalovu rovnosť.

Uvedieme tvrdenie, ktoré nám dáva odpoveď na otázky č. 1,4.

Veta 5.1.11 (Rieszova-Fisherova).

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{x}_n$ konverguje (v H) \Leftrightarrow ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \|\mathbf{x}_n\|^2$. Ak je táto podmienka splnená, potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{x}_n$ Fourierovým radom svojho súčtu.

Odpoveď na otázku 3 súvisí s "bohatosťou" systému $\{\mathbf{x}_n, n \in \mathbb{N}\}$ - hovoríme o úplnosti daného systému. Odpoveď na otázku č. 2 je zrejme tá, že prvok \mathbf{x} musí byť z lineárneho obalu systému $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Veta 5.1.12.

Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- I. $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je úplný.
- II. Pre každé $\mathbf{x} \in H$ platí Parsevalova rovnosť.
- III. Pre každé $\mathbf{x} \in H$ jeho Fourierov rad podľa systému $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konverguje k \mathbf{x} .
- IV. Množina všetkých lineárnych kombinácií konečne veľa prvkov zo systému $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je hustá v H .

Veta 5.1.13.

Nech $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je úplný ortogonálny systém v $\mathcal{L}_w^2(a, b)$ a $\{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je úplný ortogonálny systém v $\mathcal{L}_w^2(c, d)$. Potom $\{\mathbf{x}_n \mathbf{y}_m\}_{n, m \in \mathbb{N}}$ je úplný ortogonálny systém v $\mathcal{L}_w^2((a, b) \times (c, d))$.

5.2. Trigonometrické rady

Myšlienka konštrukcie Fourierových trigonometrických radov je založená na snahe aproximovať reálne funkcie reálnej premennej pomocou trigonometrických funkcií \sin a \cos . Naším cieľom bude vyjasnenie podmienok pre funkciu f , definovanú na intervale $(-\pi, \pi)$, ktoré zaručia jej rozvinutie do radu.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (5.1)$$

kde $a_n, b_n \in \mathbb{C}$. Taktiež nás zaujíma charakter konvergence takejto rady. Ak si označíme čiastočný súčet rozvoja funkcie f ako

$$s_0(x; f) = \frac{a_0}{2}, \quad s_p(x; f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^p (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad p \in \mathbb{N},$$

potom môžeme (pomocou známych vzorcov) čiastočný súčet zapísať pomocou

$$\sum_{n=-p}^p c_n e^{inx}, \quad p \in \mathbb{N}_0,$$

pričom

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rad teda formálne zapisujeme aj v tvare

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \tag{5.2}$$

Poznámka 5.2.1.

V niektorej literatúre sa stretávame s Fourierovým radom (polynómom) v tvare

$$\frac{P_0}{2} + \sum_{k=1}^n P_k \cos(k\omega x + \phi_k),$$

kde $\omega > 0$ a $\phi_k \in (-\pi, \pi]$, $k = 1, \dots, n$. Je to kvôli fyzikálnej interpretácii zložiek, tj. číslo $\frac{P_0}{2}$ je stacionárna a $P_k \cos(k\omega x + \phi_k)$ je k -ta harmonická zložka rozloženého signálu, kde P_k , resp. ϕ_k je amplitúda, resp. počiatočná fáza k -tej harmonickej zložky.

Veta 5.2.2 (O jednoznačnosti).

Nech $f \in L^1(-\pi, \pi)$ a nech rad (5.1) resp. (5.2) konverguje rovnomerne na $[-\pi, \pi]$ k f . Potom platí:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.3)$$

$$\text{resp.} \quad (5.4)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.5)$$

Poznámka 5.2.3.

Keďže pre čísla a_n, b_n a c_n z predchádzajúcej vety platia vzájomné vzťahy, tak čiastočné súčty oboch radov sú rovnaké.

Fourierove koeficienty rozvoja funkcie $f \in L^1(-\pi, \pi)$ nezávisia na hodnotách funkcie f na množine nulovej miery. Keďže systém goniometrických funkcií, podľa ktorého rozvíjame danú funkciu, sú 2π -periodické, sú také aj čiastočné súčty radu a ak existuje aj súčet tohto radu. Preto sa možno obmedziť na skúmanie takýchto funkcií.

Prejdeme k skúmaniu bodovej resp. rovnomernej konvergencie Fourierových radoch. V praxi sa často stretávame s funkciami (a ich deriváciami), ktoré tvoria nasledujúcu triedu funkcií.

Definícia 5.2.4.

Hovoríme, že funkcia f je **po častiach spojitá** na intervale $[a, b]$, ak existujú body $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ tak, že na intervaloch (x_{i-1}, x_i) , $i = 1, \dots, n$ je f spojitá a v týchto bodoch existujú vlastné jednostranné limity. Symbolom $C_{2\pi}^a$ budeme označovať množinu 2π -periodických funkcií (na \mathbb{R}), ktoré sú na intervale $[a, a + 2\pi]$, $a \in \mathbb{R}$ po častiach spojité.

Problém 5.2.5.

Prečo platí, že ak $f, f' \in C_{2\pi}^a$ potom je f aj z $\mathcal{L}^1(a, a + 2\pi) \cap \mathcal{L}^2(a, a + 2\pi)$?

Označme si Fourierov rad funkcie f ako $s(x; f)$ podľa systému goniometrických funkcií. Potom platí nasledujúce tvrdenie o bodovej konvergencii, ktoré hovorí, že pre rozmuné funkcie konverguje Fourierov rad danej funkcie v každom bode a v bodoch spojitosti k funkčnej hodnote tejto funkcie.

Veta 5.2.6.

Nech je $f, f' \in C_{2\pi}^a$, potom pre každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$s(x; f) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow x_0^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow x_0^+} f(t) \right).$$

Navyše je táto konvergencia rovnomerná na uzavretých podintervaloch intervalu, kde je f spojitá a ak je $f \in C(\mathbb{R})$, tak aj na celom \mathbb{R} .

Dôsledok 5.2.7.

Ak je $f, f' \in C_{2\pi}^{-\pi}$ a $f(-\pi) = f(\pi)$, potom jej Fourierov rad konverguje rovnomerne k f na $[-\pi, \pi]$

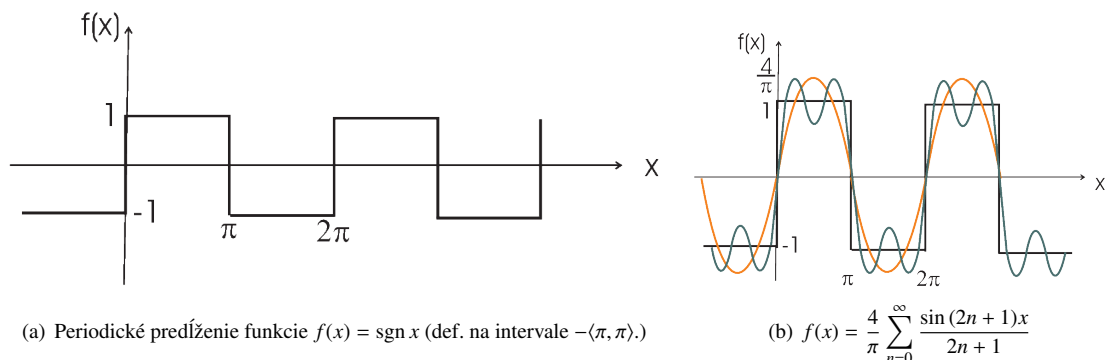
Ak chceme rady derivovať po členoch (napr. pri riešení rovníc matematickej fyziky), potrebujeme vo všeobecnosti rovnomernú konvergenciu a príslušnú hladkosť danej funkcie. V tomto prípade nám stačí hladkosť derivácií funkcie f po častiach.

Veta 5.2.8 (Derivovanie po členoch).

Nech $f^{(k-1)} \in C(\mathbb{R})$ je 2π -periodická a $f^{(k)}, f^{(k+1)} \in C_{2\pi}^a$, $k \geq 0$ na \mathbb{R} , potom pre $s = 0, 1, \dots, k$ rady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^s (|a_n| + |b_n|), \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^s |c_n|,$$

konvergujú. Navyše Fourierov rad funkcie f k nej konverguje rovnomerne na \mathbb{R} a je možné ho k -krát derivovať po členoch, pričom tieto rady konvergujú rovnomerne na \mathbb{R} .



Obr. 5.1: Fourierov rad periodickej funkcie.

Poznámka 5.2.9.

Je dobré si uvedomiť, že rady vytvorené z derivácií členov Fourierovho radu funkcie f sú Fourierovými radmi derivácií tejto funkcie, lebo z periodicnosti f je $c_0 = 0$ pre $f^{(s)}$, $s > 0$.

Veta 5.2.10 (Integrovanie po členoch).

Nech je $f \in C_{2\pi}^{-\pi}$ a $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$, potom je funkcia $F(x) = \int_0^x f(x) dx$ aj jej derivácia z $C_{2\pi}^{-\pi}$ a je spojitá na \mathbb{R} . Navyše Fourierov rad funkcie f k nej konverguje rovnomerne na \mathbb{R} a je rovný radu, ktorý dostaneme integráciou po členoch od 0 do x .

Poznámka 5.2.11.

Podmienka $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ nám zaručí, že aj F je 2π -periodická. Ak nie je splnená táto podmienka, potom $F(x) := \int_0^x f(t) dt - \frac{a_0}{2}x$ už je 2π -periodická.

Definícia 5.2.12.

Periodickým predĺžením funkcie $f \in C_{2\pi}^a$, $a \in \mathbb{R}$ budeme nazývať funkciu

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ak } x \in (a, a + 2\pi), \\ f(x - 2k\pi), & \text{ak } x \in (a + 2k\pi, a + 2(k + 1)\pi), k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow a^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow a^+} f(t) \right), & \text{ak } x = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Podobne sa dá definovať periodické predĺženie na intervale inej dĺžky. Zavedieme si aj nové typy predĺžení, ktoré majú dobré vlastnosti.

Definícia 5.2.13.

(Ne)párnym periodickým predĺžením funkcie $f \in C_{\pi}^0$ budeme nazývať funkciu \tilde{f} , ktorá vznikne tak, že najprv predĺžime f na $[-\pi, \pi]$: $f(-x) = \mp f(x)$, $x \in [-\pi, 0]$, t.j. (ne)párne, a potom túto funkciu rozšírime periodicky na celé \mathbb{R} .

Prednáška 6

6.1. Základné priestory funkcií

Potreby fyziky ale aj iných disciplín vyžadujú zavedenie doplnkových štruktúr do vektorových priestorov, obzvlášť vzhľadom na konvergencie postupností v nich (chceme hovoriť o prvkoch, ktoré sú blízko ostatných). Ide vlastne o zovšeobecnenie priestorov, v ktorých vieme merať vzdialenosť prvkov a ich veľkosť. Pojem normovaného priestoru je spojenie štruktúr metrického a vektorového priestoru. V samotnom metrickom priestore nie je definovaná žiadna operácia medzi prvkami a v lineárnom priestore zasa nemáme definovanú žiadnu metriku (vzdialenosť). Navyše, pojem bázy sa dá ťažko aplikovať na priestory, ktorých dimenzie nie sú konečné. Takýmito priestormi (funkcií) a ich geometriou sa zaoberá matematická disciplína nazývaná funkcionálna analýza.

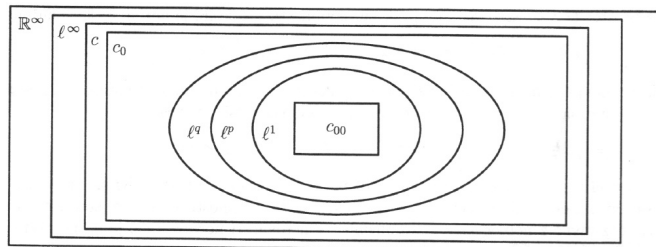
Zavedieme si základné (nekonečno-rozmerné) priestory používané v rôznych oblastiach matematických ale aj fyzikálnych vied. Prirodzeným rozšírením priestoru \mathbb{R}^n je priestor $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$, ktorého prvkami sú vlastne postupnosti reálnych čísel. Začneme teda s vektorovými priestormi postupností, ozn. $\mathbf{x} := \{x_n\}_{n=1}^\infty \in X$, kde X je NLP.

Poznámka 6.1.1.

Na priestore \mathbb{R}^∞ možno napríklad zaviesť metriky

$$\rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i(1 + |x_i - y_i|)},$$

$\rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \arctan(|x_i - y_i|)$. Tie však negenerujú normu, lebo nie sú homogénne.



Obr. 6.1: Inklúzie priestorov postupností.

Zavedieme si pojem nosič funkcie - ide o uzáver časti definičného oboru danej funkcie, na ktorom je nenulová.

Definícia 6.1.2.

Nech Ω je množina a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$, potom $\text{supp } f := \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega : f(\mathbf{x}) \neq 0\}}$.

Priestory postupností:

l^∞ označuje priestor ohraničených postupností s prirodzenou normou $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$

$$l^p := \left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty : \|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, p \in [1, \infty)$$

$$c := \left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| < \infty \right\} \subset l^\infty$$

$$c_0 := \left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \right\} \subset l^\infty$$

$$c_{00} := \{ \{x_n\}_{n=1}^\infty : \text{supp}(\mathbf{x}) \text{ je konečný} \} \subset l^\infty$$

Problém 6.1.3.

Majme priestor $C([0, 1])$ a $0 < m \leq k(x) \leq M$. Potom normy $\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt}$ a $\|f\|_{2,k} := \sqrt{\int_0^1 k(t) f(t)^2 dt}$ sú ekvivalentné.

Veta 6.1.4.

Nech $1 < p < q < \infty$. Potom

1. Normy $\|\cdot\|_p$ nie sú ekvivalentné a $\|\mathbf{x}\|_1 \geq \|\mathbf{x}\|_p \geq \|\mathbf{x}\|_q \geq \|\mathbf{x}\|_\infty$.
2. Platia inklúzie $c_{00} \subset l^1 \subset l^p \subset l^q \subset c_0 \subset c \subset l^\infty \subset \mathbb{R}^\infty$.
3. $\|\cdot\|_p$ je indukovaná skalárnym súčinom iba pre $p = 2$ a ním je $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$.

Problém 6.1.5.

Rozmyslite si, prečo v predchádzajúcej platia ostré inklúzie.

Priestor merateľných funkcií:

Majme priestor s mierou (X, Σ, λ) . Nech $\Omega \in \Sigma$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{L}^0(\Omega) = \mathcal{M}(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ je merateľná}\}$$

$$B(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}, f \in \mathcal{L}^0(\Omega) \text{ je ohraničená}\}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(\mathbf{x})|$$

Veta 6.1.6.

Priestor $(B(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ je úplný, ale nie je separabilný.

Priestory spojitych funkcií sú veľmi dôležité aj z hľadiska aplikácií.

Priestory hladkých funkcií:

Nech Ω je množina v \mathbb{R}^n .

$$C(\Omega, \mathbb{K}) = C^0(\Omega, \mathbb{K}) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ je spojitá na } \Omega\}$$

$$C^n(\Omega, \mathbb{K}) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}, f^{(n)} \text{ je spojitá na } \Omega\}, n \in \mathbb{N}$$

$$C^\infty(\Omega, \mathbb{K}) := \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega, \mathbb{K})$$

$$C_c(\Omega, \mathbb{K}) := \{f \in C(\Omega, \mathbb{K}) : \text{supp } f \text{ je kompaktný}\}$$

$$C_0(\Omega, \mathbb{K}) := \left\{ f \in C(\Omega, \mathbb{K}) : \lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = 0 \right\}$$

$$C_b(\Omega) := B(\Omega) \cap C(\Omega, \mathbb{K})$$

Poznámka 6.1.7.

Na priestoroch hladkých funkcií možno definovať funkcionály

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |f^{(m)}(\mathbf{x})|,$$

ktoré sú však iba tzv. seminormy. Pre funkcie n -krát diferencovateľné sa zvyčajne používa norma

$$\|f\|_{n,\infty} = \sum_{i=0}^n \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |f^{(i)}(\mathbf{x})| = \sum_{i=0}^n \|f^{(i)}\|_\infty.$$

Alebo aj

$$\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=0}^k \int_\Omega |f^{(i)}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

kde pre $p = 2$ ide o normu indukovanú skalárnym súčynom.

Veta 6.1.8.

Priestory $(C^k(\Omega), \|f\|_{k,\infty})$ sú Banachove \Leftrightarrow ak Ω je kompaktný.
Neexistuje norma, tak aby $(C^\infty(\Omega), \|\cdot\|)$ bol Banachov priestor.
Priestor $C_0(\Omega, \mathbb{K})$ je uzavretý podpriestor $C_b(\Omega)$ v $\|\cdot\|_\infty$ norme.
Ak Ω je kompaktný, potom priestor $C(\Omega, \mathbb{K})$ je separabilný.

Poznámka 6.1.9.

Priestor $C_b(\Omega)$ je zrejme Banachov. Čo možno vyvodit' z poslednej časti vety o separabilite ostatných priestorov?

V predchádzajúcej vete netvrdíme, že neexistuje metrika ρ , v ktorej by bol priestor (C^∞, ρ) úplný.

Lebesgueove priestory:

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \{f \in \mathcal{L}^0(\Omega), \|f\|_p < \infty\},$$

kde

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^p d\lambda(\mathbf{x}) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x}) := \inf\{C \geq 0 : |f(\mathbf{x})| \leq C \text{ pre s.v. } \mathbf{x}\} = \\ \inf\{a \in \mathbb{R} : \lambda(\{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) > a\}) = 0\}$$

Prirodzeným zovšeobecnením Lebesgueových priestorov sú priestory, kde pridáme váhy. Takéto priestory sa významne používajú v teórii harmonickej analýzy, kde sa stretávame s reprezentáciou funkcií alebo signálov pomocou superpozície základných vln. Ide o zovšeobecnenie pojmov Fourierovho radu a Fourierovej transformácie, o ktorých s budeme baviť neskôr.

Vážené Lebesgueove priestory:

Nech w je merateľná, s.v. kladná funkcia na Ω a $p \geq 1$. Potom definujeme $\|f\|_{p,w} \equiv \left(\int_{\Omega} w(\mathbf{x})|f(\mathbf{x})|^p d\lambda(\mathbf{x}) \right)^{\frac{1}{p}}$ normu na priestore \mathcal{L}_w^p , tj. na priestore všetkých funkcií s takto definovanou konečnou normou.

Problém 6.1.10.

Čo s definíciou priestoru \mathcal{L}_w^p v prípade, že $p \in (0, 1)$ (ktorá vlastnosť normy nebude splnená)? Pre ktoré p bude norma indukovaná skalárnym súčinom a aký bude mať predpis?

Veta 6.1.11.

- (I) $\mathcal{L}_w^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ sú Banachove priestory.
- (II) Pre $1 \leq p < \infty$ sú $\mathcal{L}_w^p(\Omega)$ separabilné.
- (III) $\mathcal{L}_w^\infty(\Omega)$ separabilný nie je.

Pripomeňme si Hölderovu nerovnosť v tvare noriem, pričom tentokrát uvažujeme aj priestory s váhou w a pripúšťame aj $p = \infty$

Veta 6.1.12 (Hölderova nerovnosť).

Nech $1 \leq p, q \leq \infty : 1/p + 1/q = 1$. Potom platí

$$\|fg\|_{1,w} \leq \|f\|_{p,w} \|g\|_{q,w}.$$

6.2. Stručný úvod do teórie operátorov

Operátory vo fyzike reprezentujú napríklad pozíciu, hybnosť, moment hybnosti alebo celkovou energiu systému.

Automaticky predpokladáme, že X, Y sú vektorové priestory nad rovnakým poľom. **Operátor** nazveme každé zobrazenie medzi dvoma normovanými priestormi (prípadne topologickými vektorovými priestormi), t.j. $T : X \rightarrow Y$. Samozrejme definičný obor operátora nemusí byť celé X , ale môže to byť aj podmnožina $D_T \subset X$. Ak $Y = \mathbb{K}$, potom T voláme **funkcionál**.

Pôsobenie operátora T na prvok (zväčša funkciu) $f \in X$ zapíšeme ako Tf (používa sa aj $T[f]$, či $T(f)$). Ak je výsledok funkcia z Y , potom to môžeme zdôrazniť takto $(Tf)(x)$.

Definícia 6.2.1.

Nech $(X, \|\cdot\|_1)$, $(Y, \|\cdot\|_2)$ sú normované priestory. Operátor $T : X \rightarrow Y$ je **spojitý** v $x_0 \in X$, akk $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : \|x_0 - x\|_1 < \delta \implies \|T(x) - T(x_0)\|_2 < \varepsilon$.

Poznámka 6.2.2.

Povieme, že operátor je spojité, akk je spojité v každom bode v X . Zrejme je spojité, akk zachováva konvergenciu. Spojitosť je veľmi závislá na normách (topológiách) daných priestorov. Ich zmenou sa spojitosť môže stratiť.

Najdôležitejšou triedou operátorov v matematike a fyzike sú tzv. lineárne operátory.

Definícia 6.2.3.

Nech $(X, \|\cdot\|_1)$, $(Y, \|\cdot\|_2)$ sú normované priestory (nad rovnakým poľom \mathbb{K}). Operátor $T : X \rightarrow Y$ je **lineárny (antilineárny)**, akk $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y$ ($\bar{\alpha} T x + \bar{\beta} T y$) $\forall x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Veta 6.2.4.

Nech X je konečnorozmerný NLP a Y je NLP. Potom lineárny operátor $T : X \rightarrow Y$ je spojité.

Definícia 6.2.5.

Nech $(X, \|\cdot\|_1), (Y, \|\cdot\|_2)$ sú normované priestory (nad rovnakým poľom). Lineárny operátor $T : X \rightarrow Y$ je **ohraničený**, akk existuje $M \geq 0$ tak, že $\|Tx\|_2 \leq M\|x\|_1 \quad \forall x \in X$. Najmenšie také M nazveme **operátorovou normou**, teda $\|T\|_{op} = \inf\{c \geq 0 : \|Tx\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in X\}$.

Ak $X \neq \{0\}$ platí ekvivalentný tvar $\|T\|_{op} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$ a teda je to nejaká miera "veľkosti" operátorov.

Príklad 6.2.6.

Operátor $L : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ definovaný ako $L(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, x_2, \dots)$ je zrejme ohraničený.

Poznámka 6.2.7.

Lineárny operátor medzi dvoma normovanými priestormi je ohraničený vtedy a len vtedy, ak je spojitý.

Platí, že na overenie spojitosti lineárneho operátora nám stačí overenie jeho spojitosti v bode 0.

Nie každý lineárny operátor je ohraničený !

Príklad 6.2.8.

Typický lineárny neohraničený (a teda aj nespojitý) operátor je $\frac{d}{dx} : C^1([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$, pričom berieme \mathcal{L}^2 normu (v oboch priestoroch). Zrejme

$$f_n : [0, 1] \rightarrow [-1, 1], f_n(x) = \sin(2\pi nx)$$

spĺňa $\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ale $\left\|\frac{d}{dx}f_n\right\|_2 = \sqrt{2}\pi n \rightarrow \infty$.

Príklad 6.2.9.

Na $X = C([0, 1])$ (su supremovou normou) definujme operátor $T_\phi : X \rightarrow X$ ako

$$f \mapsto \int_0^1 \phi(x, t) f(t) dt,$$

kde $0 \leq \phi \in C([0, 1]^2)$ a $0 \leq \frac{\partial \phi}{\partial x} \in C([0, 1]^2)$. Zrejme $(T_\phi f)(x) \in X$ a T je lineárne. Navyše $(T_\phi f)(x) \geq 0$ a pre $\|f\| \leq 1$ máme $|f(t)| \leq 1$ na $[0, 1]$. Z toho $T_\phi(f + 1) \geq 0$ a teda $-1 \leq T_\phi f$. Podobne $T_\phi \leq 1$. Takže pre $\|f\| \leq 1$ máme $\|T_\phi\| \leq \|T_\phi 1\|$. Platí však aj $\|T_\phi 1\| \leq \|T_\phi\| \|1\| = \|T_\phi\|$, z čoho $\|T_\phi 1\| \leq \|T_\phi\|$ a nakoniec spolu $\|T_\phi 1\| = \|T_\phi\|$. Teraz, zo spojitosti parciálnej derivácie pre $h(x) = \int_0^1 \phi(x, t) dt$ vieme, že $h'(x) = \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) dt$ existuje. Navyše (z nezápornosti parciálnej derivácie) $h'(x) \geq 0$ a teda $\|h\| = h(1) = \int_0^1 \phi(1, t) dt$. Teda konečne $\|T_\phi\| = \int_0^1 \phi(1, t) dt$.

Príklad 6.2.10.

Známa Fourierova transformácia $(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx$ je lineárny operátor z $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ do $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$.

Pozrime sa teraz na operácie s operátormi.

Definícia 6.2.11.

Súčtom operátorov $T_i : X \rightarrow Y$, $i = 1, 2$ je operátor $S = T_1 + T_2$, definovaný ako $Sf = (T_1 + T_2)f = T_1f + T_2f \quad \forall f \in D_{T_1} \cap D_{T_2} \subseteq X$.

Súčin operátorov $T_i : X \rightarrow Y$, $i = 1, 2$ je operátor $S = T_1 T_2$, definovaný ako $Sf = T_1(T_2f) \quad \forall f \in D_{T_2} \subseteq X : T_2f \in D_{T_1}$.

Uvedomme si, že súčin operátorov je vlastne ich kompozícia. Pomocou toho možno definovať aj mocninu operátora ako $T^n f = T(T^{n-1})f$.

Príklad 6.2.12.

Napríklad D'Alembertov operátor (v 1D) $D := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ je súčtom operátorov $O_1 := \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ a $O_2 := -\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, ale aj zložením (súčinom) operátorov prvého rádu $D_1 := \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}$ a $D_2 := \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}$, teda $D := D_1 D_2$.

Poznámka 6.2.13.

V princípe nie je teda problém definovať akúkoľvek slušnú operátorovú funkciu, napr.

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^k.$$

Asi nás neprekvapí, že vo všeobecnosti neplatí komutatívnosť násobenia (skladania) operátorov. Teda násobenie môže závisieť na poradí operátorov (vid' násobenie matic).

Definícia 6.2.14.

Aby sme mohli vyšetrovať komutatívnosť, zavádza sa nový operátor – **komutátor** $[T, S] \equiv TS - ST$.

Problém 6.2.15.

Určte, kedy komutujú operátory $\frac{\partial}{\partial x}$ a $\frac{\partial}{\partial y}$?

Je operátor z príkladu 6.2.12 rozložený na operátory, ktoré komutujú?

Rieszova veta z funkcionálnej analýzy zabezpečuje existenciu dôležitých lineárnych operátorov. Samozdružené operátory reprezentujú veľa operátorov v matematickej fyzike (napr. hamiltoniány v kvantovej mechanike). Dokázať samoadjungovanosť (najmä neohraničeného) zobrazenia však nie je vždy úplne jednoduché. Zvedieme si najprv $D_{T^*} = \{y \in H : x \rightarrow \langle Tx, y \rangle, x \in D_T \text{ je spojitý funkcionál}\}$.

Definícia 6.2.16.

Majme Hilbertov priestor $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ a lineárny operátor $T : H \rightarrow H$ taký, že $\overline{D_T} = H$. Potom **združený (adjungovaný)** operátor T^* nazveme taký operátor, ktorý spĺňa

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \forall x \in D_T, y \in D_{T^*}.$$

Operátor T nazývame **normálny**, ak $TT^* = T^*T$ (teda ak T komutuje so svojim združeným operátorom). Operátor T nazývame **symetrický**, ak

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x, y \in D_T.$$

Operátor T nazývame **samozdružený (samoadjungovaný, Hermitovský)**, ak $T = T^*$. Operátor T nazývame **unitárny**, ak $TT^* = \text{Id}$.

Poznámka 6.2.17.

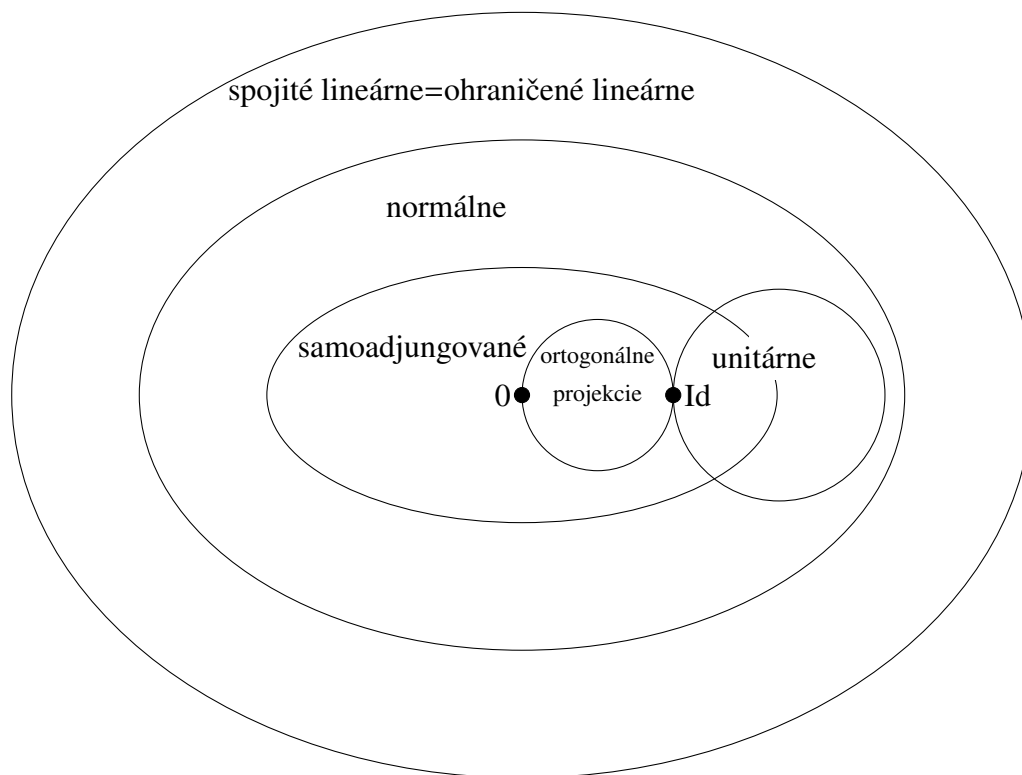
Nájdienie explicitného popisu množiny D_{T^*} je vo všeobecnosti veľmi ťažká úloha.

Príklad 6.2.18.

Príklad unitárneho (a teda aj normálneho) zobrazenia je Fourierova transformácia na $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Problém 6.2.19.

Nájdite normálne zobrazenie, ktoré nie je unitárne.



Obr. 6.2: Operátory z H do H .

Príklad 6.2.20.

Nech x označuje súradnicu častice pohybujúcej v jednom rozmere. Uvažujme operátor hybnosti v kvantovej mechanike $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$, pričom $x \in [a, b]$. Počítajme

$$\langle \hat{p}f, g \rangle = \hbar \int_a^b \overline{(-if'(x))}g(x) dx = i\hbar \left[\overline{f(x)}g(x) \right]_a^b - \int_a^b \overline{f(x)}ig'(x) dx = C + \langle f, \hat{p}g \rangle.$$

To znamená, že ak $D_{\hat{p}} = \{f \in \mathcal{L}^2(a, b) : f' \in \mathcal{L}^2(a, b), f(a) = f(b) = 0\}$, potom operátor \hat{p} je samoadjungovaný.

Problém 6.2.21.

Ukážte, že na $H = \mathcal{L}^2(0, 1)$ adjungovaný operátor k operátoru $(Ax)(t) = \int_0^t x(s) ds$ je daný predpisom $(A^*x)(t) = \int_t^1 \overline{x(s)} ds$.

Ak je $T : H \rightarrow H$ samoadjungovaný, potom platí (Hermiteovská) symetria $\langle x, Ty \rangle = \overline{\langle y, Tx \rangle}$ a teda $\langle Tx, x \rangle$ je reálne číslo.

6.3. Úvod do variačného počtu

Predmetom variačného kalkulu je hľadanie najväčších a najmenších hodnôt všeobecnejších zobrazení, ako sú funkcie jednej, či viacerých premenných - tzv. funkcionálov, ktorých nezávislými premennými sú funkcie, definované na nejakej množine. Funkcionál môžeme chápať ako zobrazenie priradujúce funkciám čísla (skaláry). Jednoduchým príkladom funkcionálu je zobrazenie priradujúce (testovacej) funkcii jej funkčnú hodnotu v počiatku - Diracova delta distribúcia (zovšeobecnená funkcia) : $\delta(f) = f(0)$. Príkladom nelineárneho funkcionálu je dĺžka krivky (graf hladkej funkcie f): $l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2(x)} dx$.

Motivácia - účinok : princíp najmenšej akcie:

Akcia (účinok) je merateľná veličina, ktorá popisuje časový vývoj fyzikálneho systému. Je integrálnou alternatívou k diferenciálnemu tvaru fyzikálnych zákonov. Je to funkcionál

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L[\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t] dt,$$

teda integrál Lagrangeovej funkcie medzi časmi t_1 a t_2 (počiatočný a konečný stav systému), pričom kde \mathbf{q} sú zovšeobecnené súradnice.

Motivácia - Brachistochrona (z gréckeho *brachistos najkratší, chronos čas*):

Úlohou je nájsť tvar spojnice dvoch bodov $A[0, y_A]$ a $B[x_B, 0]$, po ktorej by sa "teleso" pohybujúce sa iba vplyvom gravitačnej sily, dostalo z A do B v najkratšom čase. Predpokladá sa pohyb v homogénnom tiažovom poli a odporové sily sa zanedbávajú. Ak by obe body ležali "pod sebou"(na rovnakej vertikále), tak je zrejme úloha triviálna, hľadanou krivkou je úsečka.

Matematicky chceme vlastne minimalizovať funkcionál

$$T = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g(y_A - y(x))}} dx,$$

kde T vyjadruje celkovú dobu pohybu. Vidíme, že Lagrangeova funkcia (integrand) nezávisí explicitne na x .

Obr. 6.3: Riešenie úlohy o brachistochrone - cykloida.

Definícia 6.3.1.

Nech X je NLP, **funkcionál** na X je zobrazenie $\Phi : X \rightarrow \mathbb{K}$.

My budeme vyšetřovať hlavne funkcionály typu

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (6.1)$$

kde $f \in C^{0,2}(\Omega)$, $\Omega = [a, b] \times \mathbb{R}^2$ a riešenie $y \in C^1([a, b])$.

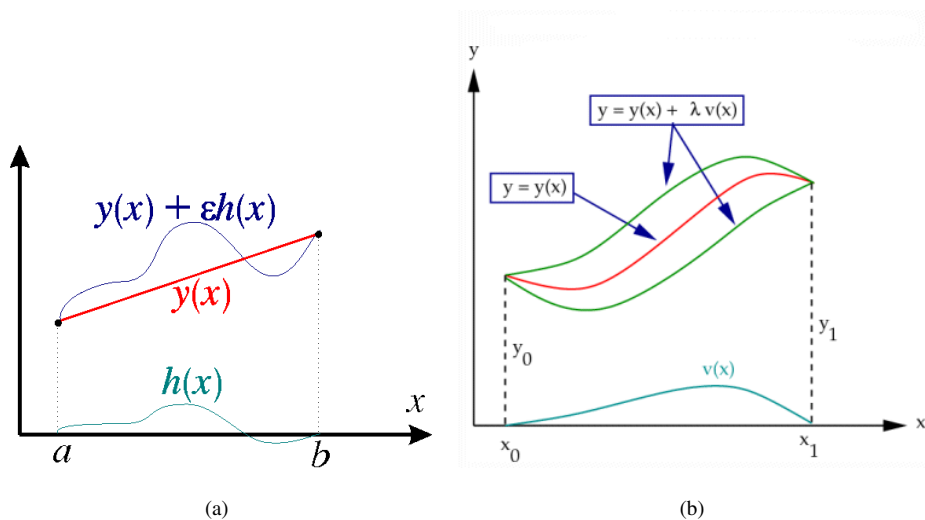
Príklad 6.3.2 (Najkratšia spojnica dvoch bodov).

Nech $\mathcal{M} := \{y \in C^1([a, b]), y(a) = A, y(b) = B\}$. Hľadáme také $y_0 \in \mathcal{M}$, aby funkcionál

$$\Phi(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

nadobúdal v y_0 svoje minimum na \mathcal{M} .

Čo vlastne znamená, že funkcionál Φ z predchádzajúceho príkladu, nadobúda v y_0 svoje minimum na \mathcal{M} ? Keďže hodnoty funkcionálov vieme porovnávať, definícia minima je analógická ako v prípade funkcií, tj. $\Phi(y_0) \leq \Phi(y_0 + h)$ pre $y_0 + h \in \mathcal{M}$. Odkiaľ musí byť h ? Keďže



Obr. 6.4: Diferencie argumentu funkcionálu (6.1).

musí platiť, že $z = y_0 + h \in \mathcal{M}$, máme podmienky $A = z(a) = A + h(a)$, $B = z(b) = B + h(b)$.

Teda

$$h \in C_0^1([a, b]) := \{h \in C^1([a, b]), h(a) = 0, h(b) = 0\}.$$

Pre každé také h zaved' me funkciu

$$\phi_h(t) = \Phi(y_0 + th), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zrejme $th \in C_0^1([a, b])$, a teda $\phi(0) = \Phi(y_0) \leq \Phi(y_0 + th) = \phi_h(t)$, $t \in \mathbb{R}$, tj. $\phi_h(t)$ má v nule lokálne minimum (dokonca globálne). To nás privádza k nasledujúcej definícii.

Definícia 6.3.3.

Nech X, Y sú (reálne) NLP, $\Phi : X \rightarrow Y$ a $y_0 \in U \subseteq X$ (U je otvorená), $h \in X$. Ak existuje

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(y_0 + th) - \Phi(y_0)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \Phi(y_0 + th) \right|_{t=0} = \varphi'_h(0),$$

potom ju nazývame **derivácia zobrazenia (operátora)** Φ v bode y_0 v smere h , označujeme ju $\partial_h \Phi(y_0)$.

Limita sa chápe v zmysle normy na Y a ak $Y = \mathbb{R}$ tak hovoríme o derivácii funkcionálu.

Teda máme zobrazenie $h \mapsto \partial_h \Phi(y_0)$, ktoré nazveme **variáciou** zobrazenia Φ v bode y_0 , označujeme ju symbolom $\delta\Phi(y_0; h)$. Teda $\delta\Phi(y; \cdot) : X \rightarrow Y$, ktoré je homogénne, teda $\forall \alpha \in \mathbb{R} \delta\Phi(y; \alpha h) = \alpha \delta\Phi(y; h)$, ale nemusí byť aditívne.

Ak je $\delta\Phi(y_0; h)$ lineárna a ohraničená, nazýva sa **Gâteauxov diferenciál** (slabá derivácia).

Ak pre dané $h \in X$ existuje variácia $\delta\Phi(y; h)$ v bode y_0 a v smere k , potom ju nazveme **druhou variáciou** a označíme ju $\delta^2\Phi(y_0; h, k)$.

Definícia 6.3.4.

Nech X a Y sú NLP, $y_0 \in U \subseteq X$ (U je otvorená), $h \in X$ a $F : X \rightarrow Y$. Hovoríme, že zobrazenie (operátor) F je **Fréchetovsky diferencovateľné^a** v bode $y_0 \in U$, ak existuje lineárny ohraničený operátor $DF(y_0)$ taký, že

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{F(y_0 + h) - F(y_0) - DF(y_0)h}{\|h\|_X} = 0.$$

^aEkvivalentne

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{\|F(y_0 + h) - F(y_0) - DF(y_0)h\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

V našom prípade máme $Y = \mathbb{R}$, teda hovoríme o F-diferencovateľnosti funkcionálov.

Veta 6.3.5.

Nech X, Y sú NLP a $\Phi : X \rightarrow Y$, potom

- ak existuje Fréchetov diferenciál, potom je rovný Gâteauxovmu;
- ak Φ je G -diferencovateľné a $\delta\Phi$ je spojitý v okolí bodu x_0 , potom je Φ v bode x_0 F -diferencovateľný.

Príklad 6.3.6.

- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ má v bode $(0, 0)$ deriváciu v každom smere, ale nemá tam G a ani F -deriváciu.
- Nech $X = C[0, 1]$ a $F : f \rightarrow \int_0^2 f^2(x) dx$. Zrejme existuje derivácia v smere: $\partial_h F(f) = 2 \int_0^1 f(x)h(x) dx$ a je lineárna. Navyše $|\partial_h F(f)| = 2 \int_0^1 |f(x)h(x)| dx \leq 2\|h\|_\infty \int_0^1 |f(x)| dx$ implikuje spojitosť a teda Gâteauxovskosť. Dokonca

$$0 \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(f+h) - F(f) - \partial_h F(f)}{\|h\|_\infty} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 h(x)^2 dx}{\|h\|_\infty} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \|h\|_\infty^2 = 0.$$

Takže existuje aj silná derivácia a rovná sa $\partial_h F(f)$.

Poznámka 6.3.7.

Podľa vety o derivácii parametrického integrálu a zloženej funkcii dostaneme vyjadrenie derivácie ϕ_h :

$$\begin{aligned}\phi'_h(t) &= \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0(x)+t h(x), y'_0(x)+t h'(x))h(x) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_0(x)+t h(x), y'_0(x)+t h'(x))h'(x) dx,\end{aligned}$$

čo pre $t = 0$ dáva

$$\phi'_h(0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0(x), y'_0(x))h(x) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_0(x), y'_0(x))h'(x) dx,$$

a to musí byť rovné nule pre $h \in C_0^1([a, b])$.

Poznámka 6.3.8.

Vo fyzike sa, namiesto testovacej funkcie, často definuje variácia pomocou Diracovej delta funkcie:

$$\frac{\delta\Phi[y_0(x)]}{\delta y_0(z)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi[y_0(x) + t\delta(x-z)] - \Phi[y_0(x)]}{t}.$$

Tá je však distribúciou a nie funkciou. Rigórozne zavedenie tejto definície si vyžaduje hlbšie znalosti z teórie distribúcií. Navyše táto definícia má iný charakter, keďže táto perturbácia hovorí o variácii y_0 v bode z a nie v ostatných bodoch intervalu (množiny).

Podobne vieme definovať Gateauxové diferenciály a variácie vyšších rádov.

Veta 6.3.9.

Ak je funkcionál Φ 2-krát G-diferencovateľný na X a $\delta^2\Phi(x; h, h) \geq 0 \forall x, h \in X$, potom je konvexný.

Pozor ani pre druhú mocninu normy nemusí G-derivácia existovať.

Príklad 6.3.10.

V $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ je $\|x\|_1 = \|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$. Teda $\|(x_1, x_2)\|_1^2 = x_1^2 + 2|x_1||x_2| + x_2^2$ nemá deriváciu pre $x_2 = 0$ a tak, o.i., $\|\cdot\|_1^2$ nemá parciálnu deriváciu v bodoch $(x_1, 0)$.

Problém 6.3.11.

Ukážte, že každá norma nie je G-diferencovateľná v bode 0 a kvadrát každej normy už áno.

Definícia 6.3.12.

Ak je Φ funkcionál na X , $M \subset X$, potom bod $y_0 \in M$ nazveme bodom

- **(ostrého) lokálneho maxima** funkcionálu Φ vzhľadom k M , ak existuje $O(y_0) : y \in O(y_0) \cap M \Rightarrow \Phi(y) \leq \Phi(y_0)$ ($\Phi(y) < \Phi(y_0), y \neq y_0$)
- **(ostrého) lokálneho minima** funkcionálu Φ vzhľadom k M , ak existuje $O(y_0) : y \in O(y_0) \cap M \Rightarrow \Phi(y) \geq \Phi(y_0)$ ($\Phi(y) > \Phi(y_0), y \neq y_0$)
- **kritickým (stacionárnym)** funkcionálu Φ , ak pre všetky $h \in X$ je $\delta\Phi(y_0; h) = 0$

Ukazuje sa, že v niektorých prípadoch je možné použiť rovnaké úvahy ako pre úlohy funkcií reálnych premenných. Tak ako v prípade hľadania extrémov funkcií, uvedieme si najprv nutnú podmienku existencie lokálneho extrému pre "hladké" funkcionály, ktorú sme vlastne dokázali.

Veta 6.3.13 (Eulerova nutná podmienka).

Ak existuje variácia $\delta\Phi(y_0; h)$ v smere $h \in X$ a Φ má v y_0 lokálny extrém, potom $\delta\Phi(y_0; h) = 0$.

Ak existuje variácia $\delta\Phi(y_0; h)$ v každom smere, potom y_0 je kritickým bodom Φ .

Otázka je, prečo požadujeme nulovosť "derivácie" v každom smere? V nekonečnorozmerných priestoroch nám síce axióma výberu zaručuje existenciu bázy, ale tá nemusí byť ani spočítateľná.

Poznámka 6.3.14.

Poznamenajme, že vo fyzike sú často potrebné nielen extrémálne body, ale aj stacionárne body, ktoré nimi nie sú (napríklad vo variačných princípoch mechaniky).

Veta 6.3.15 (Lagrangeova nutná podmienka).

Ak existuje druhá variácia $\delta^2\Phi(y_0; h, h)$ v smere $h \in X$ a Φ má v y_0 lokálne minimum, potom $\delta^2\Phi(y_0; h, h) \geq 0$.

S postačujúcimi podmienkami lokálnych extrémalov je to trochu zložitejšie ako v prípade funkcií. Nasledujúca podmienka je dosť silná a teda použijeme ju len v malom počte prípadov.

Veta 6.3.16 (Lagrangeova postačujúca podmienka).

Nech je y_0 kritickým bodom Φ a nech existuje jeho okolie, na ktorom je druhá variácia spojitá. Ak existuje $\alpha > 0$: pre všetky $y \in O(y_0)$ a všetky $h \in X$ je

$$\delta^2\Phi(y; h, h) \geq \alpha\|h\|^2.$$

Potom má Φ v y_0 striktné lokálne minimum.

Nutná Eulerova podmienka je pre funkcionál (6.1) ekvivalentná tomu, že kritický bod rieši istú diferenciálnu rovnicu, ktorú nazývame **Eulerova-Lagrangeova** rovnica funkcionálu (6.1).

Uvedieme si lemu, ktorá býva označovaná aj ako fundamentálna lemma variačného počtu.

Lema 6.3.17 (Du Bois-Reymond).

Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ a $\forall \varphi \in C^\infty_0(\Omega)$ $\int_\Omega f\varphi \, d\lambda = 0$. Potom $f = 0$ s.v.

Dôsledok 6.3.18.

Nech $\alpha, \beta \in C([a, b])$. Potom

- platnosť

$$\int_a^b \alpha(x) h'(x) dx = 0$$

pre každú $h \in C_0^1([a, b])$ je ekvivalentná tomu, že $\alpha \equiv c$ na $[a, b]$, kde c je konštanta;

- platnosť

$$\int_a^b [\alpha(x) h(x) + \beta(x) h'(x)] dx = 0$$

pre každú $h \in C_0^1([a, b])$ je ekvivalentná tomu, že $\beta \in C^1([a, b])$ a $\beta' = \alpha$.

Z Du Bois-Reymondovej lemy ihneď vyplýva nasledujúce dôležité tvrdenie.

Veta 6.3.19 (Eulerova-Lagrangeova).

Ak má funkcionál (6.1) lokálny extrém v bode $y_0 \in \mathcal{M}$, potom na intervale $[a, b]$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_0(x), y_0'(x)) \right\} = 0.$$

Skrátene píšeme

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial f}{\partial z} \right\} = 0$$

alebo aj $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y'} \right\}$.

- Ak $f = f(x, y)$ teda $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, potom má EL rovnica tvar $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ a teda riešenie neobahuje voliteľné konštanty. Vo všeobecnosti neexistuje riešenie úlohy s okrajovými podmienkami.
- Ak $f = f(x, z)$ teda $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, potom je EL rovnica $\frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial f}{\partial z} \right\} = 0$, a teda $\frac{\partial f}{\partial z} = c$, $c \in \mathbb{R}$, čo je ODR prvého rádu.

- Ak $f = f(y, z)$ teda $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, potom sa EL rovnica redukuje na **Beltramiho identitu**

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial z} = c,$$

$$c \in \mathbb{R}, \text{ lebo } 0 = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial f}{\partial z} \right\} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} y'' - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} y' = \frac{1}{y'} \frac{d}{dx} \left\{ f - y' \frac{\partial f}{\partial z} \right\}.$$

Problém 6.3.20.

Analyzujte situáciu, keď $f = f(z)$ a $f = M(x, y) + N(x, y)z$.

Príklad 6.3.21.

Fermatov princíp : svetlo sa v priestore šíri z jedného bodu do druhého po takej dráhe ($y = f(x)$), aby čas nadobúdala extrémnu hodnotu (extrémom je vo väčšine prípadov minimum). Máme teda

$$A[f] = \int_{x_0}^{x_1} n(x, f(x)) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx,$$

kde index lomu $n(x, y)$ závisí od materiálu (polohy). Napr. Snellov zákon

$$n(x, y) = \begin{cases} n_{(-)}, & x < 0, \\ n_{(+)}, & x > 0. \end{cases}$$

Z toho má Eulerova–Lagrangeova rovnica tvar

$$-\frac{d}{dx} \left[\frac{n(x, f(x)) f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \right] + \frac{\partial n(x, f(x))}{\partial y} \sqrt{1 + f'(x)^2} = 0.$$

Poznamenajme, že splnenie Eulerovej-Lagrangeovej rovnice je nutnou a postačujúcou podmienkou na to, aby variácia funkcionálu (6.1) bola nulová pre $h \in C_0^1([a, b])$. Uvedieme si ešte nutnú podmienku špeciálne pre funkcionál (6.1).

Veta 6.3.22 (Legendreova nutná podmienka).

Ak má funkcionál (6.1) lokálne minimum v bode $y_0 \in \mathcal{M}$, potom na intervale $[a, b]$ platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) \geq 0.$$

V prípade funkcionálu (6.1), vieme použiť analogickú úvahu ako v prípade funkcií. Pamätáme sa, že pre funkcie stačilo aby kvadratická forma druhého diferenciálu bola pozitívne (negatívne) definitná v stacionárnom bode a ten bol potom bodom ostrého lokálneho minima (maxima).

Poznámka 6.3.23.

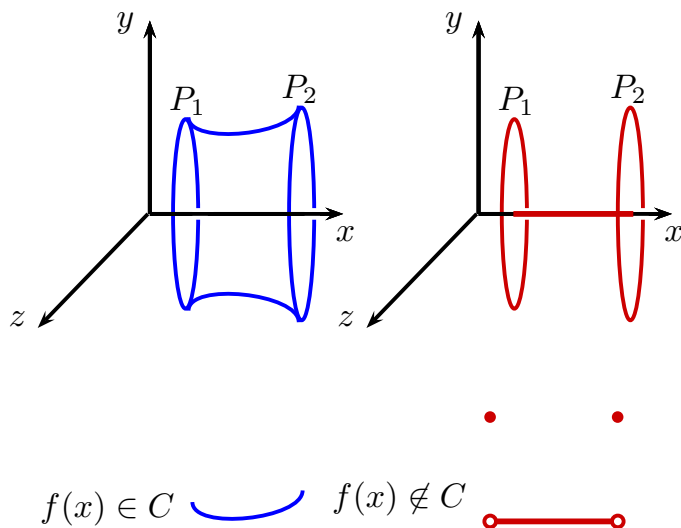
Ak uvažujeme problém s jedným ($h \in C^1([a, b]), h(a) = 0$) alebo oboma voľnými koncami (iba $h \in C^1([a, b])$), potom sa nám zrejme mení množina \mathcal{M} . Tým pádom sa nám pridávajú podmienky, ktoré musí riešenie spĺňať. V prvom prípade musí byť splnené

$$\frac{\partial f}{\partial z}(b, y_0(b), y_0'(b)) = 0$$

a v druhom ešte navyše aj

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a, y_0(a), y_0'(a)) = 0.$$

Nasledujúci príklad poukazuje na fakt, že nie je jedno v akom priestore funkcií minimalizujeme daný funkcionál.



Obr. 6.5: Spojité (katenoid) vs. nespojité riešenie problému minimálnj plochy.

Poznámka 6.3.24 (Dôležitosť priestoru, kde pracujeme).

Lavrentievov jav.

Uvažujme funkcionál

$$I(y) = \int_0^1 (y^3 - x^2)^2 (y')^2 dx,$$

ktorý chceme minimalizovať, pričom sú splnené podmienky $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. Dá sa ukázať, že po častiach diferencovateľná krivka je lepšie riešenie ako ľubovoľná hladká krivka. Navyše zvyšovanie počtu bodov, ktoré "kazia" hladkosť, znižuje hodnotu funkcionálu.

Goldschmidtove riešenie.

Minimamalizácia povrchu rotačnej plochy vytvorenej krivkou spájajúcou body $P_1 = [x_1, y_1]$, $P_2 = [x_2, y_2]$ v rovine xy (rotácia okolo osi Ox):

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Ak P_1, P_2 nie sú veľmi ďaleko (pomery k $x_2 - x_1$), tak riešením je katenoid, v opačnom prípade môže byť riešením útvar vytvorený rotáciou nespojitej krivky.

V prípade funkcionálov je možné zovšeobecniť (dokonca aj pre Banachove priestory) metódu Lagrangeových multiplikátorov pre riešenie extrémálnych úloh s väzbou. Označme mno-

žinu $\tilde{\mathcal{M}} := \left\{ y \in \mathcal{M} : \int_a^b g(x, y(x), y_0'(x)) dx = L \right\}$, kde $A, B, L \in \mathbb{R}$, $g(x, y, z) \in C^1(\Omega)$ sú dané.

Veta 6.3.25 (Ljusternikova (Lagrangeove multiplikátory)).

Nech $a \in X$, $\Phi, g_1, \dots, g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ sú v okolí bodu a spojité, existujú $\Phi'(a), g'(a), g'_1(a), \dots, g'_n(a)$ sú LN^a a f má v bode a lokálny extrém vzhľadom k množine väzieb

$$M := \{x \in X : g_j(x) = g_j(a), j = 1, \dots, n\}.$$

Potom $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : \Phi'(a) = \sum_{j=1}^n \lambda_j g'_j(a)$.

“Teda g' je surjektívne a tak a je regulárny bod zobrazenia g .”

Poznámka 6.3.26.

Pre nekonečne veľa väzieb ($g : X \rightarrow Y$, Y je Banachov priestor) stále platí, ak a je regulárny bod variety $g = 0$, pričom $(\Phi - F \circ g)'(a) = 0$ pre nejaké $F \in Y^*$.

6.3.27. Všeobecnejšie úlohy variačného počtu

- Uvažujme funkcionál

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y', \dots, y^{(k)}) dx.$$

Analogicky dostaneme tzv. **Eulerovu-Poissonovu** rovnicu rádu $2k$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) - \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \right) = 0$$

Príklad 6.3.28 (Prehnutá os pružného valcového nosníka upevneného na koncoch).

V tomto prípade je potrebné minimalizovať $\int_{-l}^l \rho y - \frac{\mu (y'')^2}{2} d\lambda$, pričom $y(\pm l) = 0$ a $y'(\pm l) = 0$. Premenná μ označuje tuhosť v ohybe ($\mu = EI$, E je Youngov modul, teda pružnosť v ťahu a I je kvadratický modul prierezu, teda druhý moment) a ρ zasa spojité externé priečne zaťaženie nosníka.

EL rovnica sa nayýva **Eulerova-Bernoulliho** DR: $\rho = \frac{d^2}{dx^2} \{ \mu y'' \}$

- Uvažujme funkcionál

$$\Phi(\mathbf{y}) = \int_a^b f(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') dx,$$

pre $\mathbf{y} \in [C^1([a, b])]^n$. Analogicky vytvoríme pre $\mathbf{h} \in [C^1([a, b])]^n$ funkciu

$$\varphi_h(t) = \Phi(\mathbf{y}^0 + t\mathbf{h})$$

a jej deriváciu v nule

$$\varphi'_h(0) = \int_a^b \langle \nabla_{\mathbf{y}} f(x, \mathbf{y}^0(x), (\mathbf{y}^0)'(x)), \mathbf{h}(x) \rangle + \langle \nabla_{\mathbf{z}} f(x, \mathbf{y}^0(x), (\mathbf{y}^0)'(x)), \mathbf{h}'(x) \rangle dx$$

je variácia $\delta\Phi(\mathbf{y}^0; \mathbf{h})$.

Podobne ako v skalárnom prípade pre bude nutnou podmienkou lokálneho extrémumu sústava EL rovníc - **Euler-Weierstrass**:

$$\nabla_{\mathbf{y}} f - \frac{d}{dx} (\nabla_{\mathbf{z}} f) = \mathbf{0}$$

Teraz je však možné uvažovať viacero úloh, keďže je väčšia variabilita voľby okrajových podmienok. Ak volíme prírastky h tak, že $h_j \in C_0^1([a, b])$ a ostatné komponenty berieme identicky nulové, dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}(x, \mathbf{y}^0(x), (\mathbf{y}^0)'(x)) - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial f}{\partial z_i}(x, \mathbf{y}^0(x), (\mathbf{y}^0)'(x)) \right\} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

K týmto rovniciam potom eventuálne dostaneme príslušné podmienky v krajných bodoch intervalu $[a, b]$:

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(a, \mathbf{y}^0(a), (\mathbf{y}^0)'(a)) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z_j}(b, \mathbf{y}^0(b), (\mathbf{y}^0)'(b)) = 0$$

pre nejaké i, j .

Problém 6.3.29.

Nájdite EL rovnice pre funkcionál $\frac{1}{2} \int_0^1 \langle \mathbf{x}(t), J\dot{\mathbf{x}}(t) \rangle dt$ pre $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

- Uvažujme teraz funkcionál

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, y, \nabla y) d\mathbf{x} \quad (6.2)$$

pre $y \in C^1(\bar{\Omega})$, kde Ω je ohraničená oblasť v \mathbb{R}^n . Majme na hranici $\delta\Omega$ dané hodnoty funkcie y . Ideme hľadať minimum funkcionálu Φ na

$$M = \{y \in C^1(\bar{\Omega}) : y = g \text{ na } \delta\Omega\}.$$

Analogicky pre $h \in C_0^1(\bar{\Omega})$ je $\varphi_h(t) = \Phi(y_0 + th)$ a jej derivácia v nule

$$\varphi'_h(0) = \int_{\Omega} \left[f_y(\mathbf{x}, y_0(\mathbf{x}), \nabla y_0(\mathbf{x})) h(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n f_{z_i}(\mathbf{x}, y_0(\mathbf{x}), \nabla y_0(\mathbf{x})) h_{z_i}(\mathbf{x}) \right] d\mathbf{x}$$

z čoho pre $z_j := \frac{\partial y}{\partial x_j}$ dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \operatorname{div}(\nabla_z f) = 0,$$

$$\text{teda } \frac{\partial f}{\partial y} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial z_j} \right) = 0.$$

Pre $k = 1$ sa táto rovnica nazýva **Ostrogradského DR**:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial z_2} \right) = 0$$

Príklad 6.3.30 (Minimálna plocha ohraničená krivkou).

Chceme minimalizovať funkcionál $S(F) = \iint_D \sqrt{1 + \|\nabla F\|^2} d\lambda$, pričom $C = \partial D$ a krivka je lokálne daná $x = x, y = y, z = G(x, y)$. Potom Ostrogradského rovnica má tvar

$$(1 + F_x^2) F_{yy} - 2F_x F_y F_{xy} + (1 + F_y^2) F_{xx} = 0,$$

čo predstavuje čitateľ v rovnici minimálnej strednej krivosti.

- Nech Dy je Jacobiho matica vektorového zobrazenia y . Uvažujme funkcionál

$$\Psi(y) = \int_{\Omega} f(x, y, Dy) dx \tag{6.3}$$

Ak označíme $z_{i,j} := \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$, tak EL sústava rovníc vo vektorovom tvare je:

$$\nabla_y f - \operatorname{div}(D_z f) = \mathbf{0},$$

kde divergencia matice je počítaná po riadkoch. Potom rovnice v skalárnom tvare sú:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y_1} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial z_{1,j}} \right) &= 0_1 \\ \frac{\partial f}{\partial z_2} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial z_{2,j}} \right) &= 0_2 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial z_m} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial z_{m,j}} \right) &= 0_m. \end{aligned}$$

- Uvažujme funkcionál (teraz $Dy = \nabla y$)

$$\Phi(y) = \int_{\Omega} f(x, y, Dy, \dots, D^k y) dx \tag{6.4}$$

EL sústava rovníc je:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{j=1}^k \sum_{\mu_1 \leq \dots \leq \mu_j} (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial x_{\mu_1} \dots \partial x_{\mu_j}} \left(\frac{\partial f}{\partial z_{\mu_1 \dots \mu_j}} \right) = 0$$

kde $z_{\mu_1} := \frac{\partial y}{\partial x_{\mu_1}}$, $z_{\mu_1 \mu_2} := \frac{\partial^2 y}{\partial x_{\mu_1} \partial x_{\mu_2}}$, ... a $\mu_1 \dots \mu_j$ sú indexy, ktoré zahŕňajú počet premenných, to znamená od 1 do n .

Prednáška 7

7.1. Fourierova transformácia

Fourierova transformácia (FT), podobne ako iné integrálne transformácie (Laplaceova, Hankelova, Mellinova), má veľké použitie ako v matematike, tak aj vo fyzike. V matematike hlavne pri riešení diferenciálnych rovníc a vo fyzike napríklad v kvantovej mechanike: ak f má význam vlnovej funkcie častice, potom jej FT sa nazýva vlnová funkcia v impulzovej reprezentácii a $|f(\mathbf{x})|^2$, resp. $|\hat{f}(\mathbf{x})|^2$ majú význam hustoty pravdepodobnostného rozloženia súradnice častice resp. jej impulzu. V tejto kapitole budeme ako pravidlo uvažovať komplexné funkcie a k nim komplexne združené funkcie \bar{f} budú definované ako $\overline{\hat{f}(\mathbf{x})} = \widehat{\bar{f}(\mathbf{x})}$. Pokiaľ nebude povedané inak, budeme predpokladať, že funkcie sú z $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Definícia 7.1.1.

Pre komplexnú funkciu $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ definujeme jej **FT** predpisom

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f} := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi \langle \mathbf{x}, \xi \rangle} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

a **opačnú (inverznú) FT** predpisom

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) = \check{f} := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i2\pi \langle \mathbf{x}, \xi \rangle} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Poznámka 7.1.2.

Používajú sa aj iné varianty FT, ktoré je možné jednotne charakterizovať:

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = A^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \langle \mathbf{x}, \xi \rangle} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

a

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) = B^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik \langle \mathbf{x}, \xi \rangle} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

kde čísla $A, B, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sú zviazané vzťahom $AB = \frac{|k|}{2\pi}$. Okrem prípadu $A = B = 1, k = 2\pi$ sa väčšinou používajú prípady $A = 1, B = \frac{1}{2\pi}, k = 1$ a $A = B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, k = 1$.

Otázka je, kedy platí (inverzný) vzťah $\widetilde{\widetilde{f}} = \widetilde{f} = f$? Ako ukazuje nasledujúci príklad priestor $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ nie je na to úplne vhodný.

Príklad 7.1.3.

Nech f je charakteristická funkcia ohraničeného intervalu s koncovými bodmi $a < b$. Potom je

$$\hat{f}(\xi) = \int_a^b e^{-i2\pi x\xi} \, dx = \begin{cases} b - a, & \text{ak } \xi = 0, \\ \frac{e^{-i2\pi a\xi} - e^{-i2\pi b\xi}}{i2\pi\xi}, & \text{ak } \xi \neq 0. \end{cases}$$

Dá sa ukázať, že $\hat{f} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Špeciálne pre $a = -l, b = l, l > 0$ je to tzv. sinc funkcia

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} 2l, & \text{ak } \xi = 0, \\ \frac{\sin(2\pi l\xi)}{\pi\xi}, & \text{ak } \xi \neq 0. \end{cases}$$

Problém 7.1.4.

Ukážte, že sinc funkcia z predchádzajúceho príkladu naozaj nepatrí do $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (použite odhad $|\sin x| \geq \frac{1}{2}$ pre $x \in [(j + 1/6)\pi, (j + 5/6)\pi], j \in \mathbb{Z}$.)

Problém 7.1.5.

Ukážte, že platí

$$(\mathcal{F} e^{-\beta\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle})(\xi) = \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi^2 \langle \xi, \xi \rangle}{\beta}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Lema 7.1.6.

Ak je $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ párna (nepárna) v premennej x_j , potom je jej FT párna (nepárna) v premennej ξ_j . Špeciálne pre $n = 1$ je

$$(\mathcal{F} f)(\xi) = \begin{cases} 2A \int_0^\infty \cos(kx\xi) f(x) dx, & \text{ak } f \text{ je párna,} \\ -2iA \int_0^\infty \sin(kx\xi) f(x) dx, & \text{ak } f \text{ je nepárna.} \end{cases}$$

Lema 7.1.7.

Ak je $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ radiálna, tj. $f(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x}\|)$, je taká aj jej FT a dá sa vyjadriť pomocou jednorozmerného integrálu. Pre $n = 3$ má tvar

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2}{\|\xi\|} \int_0^\infty \phi(r) r \sin(2\pi r \|\xi\|) dr, \quad \xi \neq 0.$$

(pre $n \neq 3$ obsahuje integrand tzv. Besselove funkcie)

Poznámka 7.1.8.

FT funkcie $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ odpovedá Fourierovým koeficientom l -periodickej funkcie podľa systému $e^{i\frac{2\pi}{l}x}$, $n \in \mathbb{N}$ pri rozklade funkcie do Fourierovho radu (formálne pre $l \rightarrow \infty$). Pre periodickú funkciu nám stačilo brať iba frekvencie $\frac{2\pi n}{l}$, $n \in \mathbb{N}$, zatiaľ čo pre FT musíme brať všetky $k\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$ a rad nahradiť integrálom.

Veta 7.1.9 (Základné vlastnosti FT).

1. $\check{f}(\xi) = (B/A)^n \hat{f}(-\xi)$
2. $\overline{\check{f}(\xi)} = (B/A)^n \widehat{f}(-\xi)$
3. $\check{\check{f}}(\xi) = (B/A)^n \overline{\widehat{f}(-\xi)}$
4. $f(\widehat{\mathbf{x} - \mathbf{z}})(\xi) = e^{-ik \langle \xi, \mathbf{z} \rangle} \hat{f}(\xi), \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$
5. $\hat{f}(\xi - \mathbf{z}) = e^{-ik \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle} f(\mathbf{x})(\xi), \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$
6. $\widehat{f(\varepsilon \mathbf{x})}(\xi) = |\varepsilon|^{-n} \hat{f}(\xi/\varepsilon), \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Definícia 7.1.10.

Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ nazývame usporiadanú n -ticu čísel $\alpha_i \in \mathbb{N}_0, i = 1, 2, \dots, n$. **Rádom (stupňom)** multiindexu α nazývame číslo $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Pre funkciu n -reálnych premenných $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ a multiindex α znamená $f^{(\alpha)}$ deriváciu funkcie f rádu $|\alpha|$, pričom sa derivuje α_j -krát podľa premennej $x_j, j = 1, \dots, n$ s konvenciou, že pre $|\alpha| = 0$ ide o samotnú funkciu f . Taktiež definujeme mocninu \mathbf{x}^α ako $\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ s konvenciou $z^0 = 1$ pre $z \in \mathbb{R}$.

Veta 7.1.11.

\mathcal{F} aj \mathcal{F}^{-1} sú spojité lineárne zobrazenia $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ do $C_b(\mathbb{R}^n)$ a pre $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ platí

1. $\|\hat{f}\|_{C_b} \leq |A|^n \|f\|_{\mathcal{L}^1}, \|\check{f}\|_{C_b} \leq |B|^n \|f\|_{\mathcal{L}^1}$
2. $\lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = \lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \check{f}(\xi) = 0$
3. \hat{f}, \check{f} sú rovnomerne spojité na \mathbb{R}^n

Veta 7.1.12.

Pre $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \hat{g} \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g \, d\mathbf{x}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} f \check{g} \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \check{f} g \, d\mathbf{x}.$$

Veta 7.1.13 (Vzt'ah k derivácii a násobeniu).

(I) Nech $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ a $f^{(m)} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ pre $|m| \leq k$. Potom pre $m \leq k$

$$\widehat{f^{(m)}}(\xi) = (ik\xi)^m \hat{f}(\xi), \quad |(k\xi)^m| |\hat{f}(\xi)| \leq |A|^n \|f^{(m)}\|_{\mathcal{L}^1}$$

pre $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(II) Nech $f, \mathbf{x}^m f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ pre $|m| \leq k$. Potom $\hat{f}^{(i)} \in C_b(\mathbb{R}^n), i = 1, \dots, k$ pre $|m| \leq k$ a

$$\hat{f}^{(m)}(\xi) = (-ik\xi)^m \widehat{f(\mathbf{x})}(\xi), \quad |\hat{f}^{(m)}(\xi)| \leq |A|^n \|(k\mathbf{x})^m f\|_{\mathcal{L}^1}$$

pre $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Príklad 7.1.14.

Riešme Airyho rovnicu $y'' - xy = 0$. Platí $\mathcal{F}\{y'' - xy\} = 0$ a teda máme ODR $-\xi^2 \hat{y} - i \frac{d}{d\xi} \hat{y} = 0$. Z toho je $\hat{y} = ce^{i\xi^3/3}$ a tak z inverzie

$$y(x) = \frac{c}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi x + \xi^3/3)} d\xi = \frac{c}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \cos(\xi x + \xi^3/3) d\xi$$

Veta 7.1.15 (O FT konvolúcie).

Nech $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, potom platí

$$(\mathcal{F} f * g)(\xi) = (1/A)^n (\mathcal{F} f)(\xi) \cdot (\mathcal{F} g)(\xi)$$

a

$$(\mathcal{F}^{-1} f * g)(\xi) = (1/B)^n (\mathcal{F}^{-1} f)(\xi) \cdot (\mathcal{F}^{-1} g)(\xi).$$

Nedá sa ľahko charakterizovať priestor Fourierových obrazov všetkých funkcií z $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ a naopak veľa rozumných funkcií nie je Fourierovým obrazom žiadnej funkcie z $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Zavedieme si preto priestor, ktorý nie je jednoducho popísateľný. Bude to však podpriestor priestoru $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, ktorý FT zobrazuje proste na seba a inverziou k nej bude inverzná FT. Tento priestor hraje významnú úlohu v teórii distribúcií (akési zovšeobecnenia funkcií ich derivácií).

Ide vlastne o priestor rýchlo klesajúcich funkcií a ich derivácií ("v nekonečne") - \mathcal{S} . Z istého dôvodu sa nazýva aj priestor testovacích funkcií.

Schwartzov priestor:

Označme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ množinu všetkých $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ takých, že pre každé dva multiindexy α, β platí

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha f^{(\beta)}(\mathbf{x})| := \|f\|_{\alpha\beta} < \infty.$$

Konvergenciu zavádzame predpisom $f_n \rightarrow f$ v $\mathcal{S} \Leftrightarrow x^\alpha f_n^{(\beta)}(\mathbf{x}) \rightrightarrows x^\alpha f^{(\beta)}(\mathbf{x})$ v \mathbb{R}^n pre každé dva multiindexy α, β , keďže je to ekvivalentné konvergencii v norme $\|f\|_{\alpha\beta}$.

Príklad 7.1.16.

Typický príklad funkcie z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je funkcia $e^{-\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Príkladom funkcie z $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ je funkcia

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}}, & \text{ak } \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 1, \\ 0, & \text{ak } \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 1. \end{cases}$$

Zrejme platí, že ak $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, potom je rovnomerne spojitá na \mathbb{R} .

Veta 7.1.17 (O inverzii).

\mathcal{F} aj \mathcal{F}^{-1} zobrazujú prosto \mathcal{S} na \mathcal{S} a sú navzájom k sebe inverzné, tj.

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}f) = f, f \in \mathcal{S}.$$

Pomocou predchádzajúcej vety a vety o FT konvolúcie dostaneme nasledujúcu vetu o FT súčiny dvoch funkcií zo Schwartzovho priestoru.

Veta 7.1.18 (O FT súčiny).

Nech $f, g \in \mathcal{S}$, potom platí

$$(\mathcal{F}fg)(\xi) = B^n (\mathcal{F}f)(\xi) * (\mathcal{F}g)(\xi)$$

a

$$(\mathcal{F}^{-1}fg)(\xi) = A^n (\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) * (\mathcal{F}^{-1}g)(\xi).$$

Ešte si uvedieme vetu, ktorá zovšeobecňuje vetu o inverzii.

Veta 7.1.19.

Nech $f, \hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, potom platí

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}f) = f \text{ s.v. na } \mathbb{R}^n.$$

Dôsledok 7.1.20.

Ak je $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ a $\hat{f} = 0$ s.v. na \mathbb{R}^n , potom je $f = 0$ s.v. na \mathbb{R}^n . \mathcal{F} a \mathcal{F}^{-1} sú teda na $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ prosté zobrazenia.

Už vieme, že funkcie z $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ nepatria do $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Preto vo všeobecnosti funkcie z $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ nemajú FT v zmysle našej definície. Zavedieme si novú definíciu, ktorá pre funkcie z $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ bude dávať to isté ako pôvodná definícia a navyše bude "nová" FT zobrazovať $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ prosto na $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Základom pre túto definíciu je nasledujúca rovnosť.

Veta 7.1.21 (Parsevalova rovnosť).

Pre $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} \, d\mathbf{x} = (B/A)^n \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(\xi) \overline{(\mathcal{F}g)(\xi)} \, d\xi$$

a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} \, d\mathbf{x} = (A/B)^n \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) \overline{(\mathcal{F}^{-1}g)(\xi)} \, d\xi.$$

Keďže je $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ hustá v $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ je možné rozšíriť Fourierov operátor spojitým spôsobom z \mathcal{S} na \mathcal{L}^2 takto: pre $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ zoberme postupnosť $f_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ takú, že $f_n \rightarrow f$ v \mathcal{L}^2 . Z predchádzajúcej vety vieme, že postupnosť $\mathcal{F}f_n$ je Cauchyovská v \mathcal{L}^2 . Ale tento priestor je úplný a teda postupnosť $\mathcal{F}f_n$ konverguje nejakému $\phi \in \mathcal{L}^2$. Otázka je, či tento prvok závisí na zvolenej postupnosti f_n . Odpoveď je nie, lebo ak by iná postupnosť \tilde{f}_n konvergovala k f , potom k f konverguje aj postupnosť $f_1, \tilde{f}_1, f_2, \tilde{f}_2, \dots$ a príslušná postupnosť FT k nejakému $\tilde{\phi}$. Ale potom aj podpostupnosti z nej vybrané musí konvergovať k $\tilde{\phi}$ a teda musí byť $\tilde{\phi} = \phi$. Podobne je to v prípade inverznej FT. Teraz je jasné, že nasledujúca definícia je korektná, pričom všetky limity sú myslené v \mathcal{L}^2 norme.

Definícia 7.1.22.

Pre $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ definujeme

$$\mathcal{F}f := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}f_n, \quad \mathcal{F}^{-1}f := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}^{-1}f_n,$$

kde $f_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$.

Už sme spomínali, že platí:

Veta 7.1.23.

Pre $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ obe definície dávajú s.v. na \mathbb{R}^n to isté.

Dôležitým výsledkom je nájdenie ďalšej množiny, ktorú FT (s pozmenenou definíciou) zobrazuje proste na seba. V teórii distribúcií existuje ešte jedna - množina tzv. temperovaných

distribúcií.

Veta 7.1.24.

FT a inverzná FT z definície 7.1.22 sú prosté, spojité lineárne zobrazenia z $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ na $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, pričom sú navzájom k sebe inverzné. Navyše pre $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ platí Parsevalova rovnosť

$$(B/A)^n \langle \mathcal{F} f, \mathcal{F} g \rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2} = (A/B)^n \langle \mathcal{F}^{-1} f, \mathcal{F}^{-1} g \rangle_{\mathcal{L}^2}.$$

Dôsledok 7.1.25.

Pre $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ je

$$\mathcal{F} f = \lim_{N \rightarrow \infty} A^n \int_{\|\mathbf{x}\| \leq N} e^{-ik\langle \mathbf{x}, \xi \rangle} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Matematická analýza pre fyzikov IV.

JOZEF KISELÁK

Rýchle odkazy

Matematická analýza pre fyzikov IV.

JOZEF KISELÁK

Rýchle odkazy

Dodatky

8.1. Niektoré diferenciálne operátory

Lineárne diferenciálne operátory možno naraz zapísať takto:

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ je tzv. multi-index, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $a_\alpha(x)$ sú funkcie a

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n}, D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

operátor (funkcionál)	popis	def. obor
$J[y] = y^{[-1]}$	inverzná funkcia	bijekcie
$Z[y] = f \circ y$	kompozícia s f	
$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$	operátor hybnosti	C^1
$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$	operátor energie	C^1
$LT[y] = t y'^{[-1]} - y \circ y'^{[-1]}$	Legendreova transf.	konvex., C^1
$\frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d^2}{dx^2})$	op. ohybu nosníka	C^4

$$L_n[y] = y^{(n)}$$

n -tá derivácia

C^n

$\nabla = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$	gradient	C^1
$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$	divergencia	C^1
$\Theta = \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$	operátor homogenity	C^1
$\Delta = \nabla^2 = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$	laplacián	C^2
$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$	D'Alembertov op.	C^2
$H[F] = -\frac{1}{2} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla F}{ \nabla F } \right)$	stredná krivosť plochy $F = 0$	C^2
$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$	rotácia	C^1
$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$	Wirtingerove der.	C^1

Matematická analýza pre fyzikov IV.

JOZEF KISELÁK

Rýchle odkazy

8.2. Niektoré integrálne operátory

operátor (funkcionál)	popis	def. obor
$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X \, dP = \int_{\mathbb{R}} t f_X(t) \, dt$	str. hodnota n.v. X	$L^1(\Omega)$
$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$	rozptyl n.v. X	$L^2(\Omega)$
$\text{TV}[y] = \int_a^t y'(s) \, ds$	totálna variácia	AC
$\text{AM}[y] = \frac{1}{t-a} \int_a^t y(s) \, ds$	arit. priemer	L^1
$\text{GM}[y] = \exp\left(\frac{1}{t-a} \int_a^t \ln y(s) \, ds\right)$	geom. priemer	L^1
$\text{Ent}[X] = - \int_{\mathbb{R}} f_X(t) \ln f_X(t) \, dt$	entropia n.v. X	$f \ln f \in L^1$
$C[y] = y * f = \int_{\mathbb{R}} f(s)y(t-s) \, ds$	konvolúcia s $f \in L^1$	L^p
$\ f\ _p \equiv \left(\int_S f ^p \, d\mu \right)^{1/p}$	p -norma	L^p
$\text{Arc}[y] = \int_a^t \sqrt{1 + [y'(s)]^2} \, ds$	dĺžka oblúka	
$(Tf)(u) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) K(t, u) \, dt$	Hilbertov–Schmidtov op.	L^2
$(Rf)(\alpha, s) = \int_{\mathbb{R}} f(z \sin \alpha + s \cos \alpha, s \sin \alpha - z \cos \alpha) \, dz$	Radonova trans.	
$\frac{1}{\omega_{n-1}(r)} \int_{\partial B(x,r)} u(y) \, dS(y)$	sférický priemer	

8.3. Niektoré integrálne transformácie

$$(Tf)(u) = \int_X f(t) K_1(t, u) dt, \quad X = (a, b)$$

$$(T^{-1}g)(t) = \int_{\tilde{X}} g(u) K_2(t, u) du, \quad \tilde{X} = (c, d)$$

popis	symbol	kernel	X	ker. inv.	\tilde{X}
Abel	\mathcal{A}	$\frac{2t}{\sqrt{t^2-u^2}}$	(u, ∞)	$-\frac{1}{\pi\sqrt{u^2-t^2}} \frac{d}{du}$	(t, ∞)
Fourier	\mathcal{F}	$e^{-2\pi iut}$	\mathbb{R}	$e^{2\pi iut}$	\mathbb{R}
Hankel	$\mathcal{H}a$	$t J_\nu(ut)$	$(0, \infty)$	$u J_\nu(ut)$	$(0, \infty)$
Hartley	\mathcal{H}	$\frac{\cos(ut)+\sin(ut)}{\sqrt{2\pi}}$	\mathbb{R}	$\frac{\cos(ut)+\sin(ut)}{\sqrt{2\pi}}$	\mathbb{R}
Hermite	H	$e^{-t^2} H_n(t)$	\mathbb{R}	$\frac{H_n(u)}{\sqrt{\pi} 2^n n!}$	$\sum_{n=0}^{\infty}$
Hilbert	$\mathcal{H}il$	$\frac{1}{\pi} \frac{1}{u-t}$	\mathbb{R}	$\frac{1}{\pi} \frac{1}{u-t}$	\mathbb{R}
Jacobi	J	$(1-t)^\alpha (1+t)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(t)$	$(-1, 1)$		$\sum_{n=0}^{\infty}$
Kontorovič-Lebedev	K_{iu}	$K_{iu}(t)$	$(0, \infty)$	$\frac{2u \sinh(\pi u) K_{iu}(t)}{\pi^2 t}$	$(0, \infty)$
Laguerre	L	$e^{-t} t^\alpha L_n^\alpha(t)$	$(0, \infty)$	$\binom{n+\alpha}{n}^{-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} L_n^\alpha(u)$	$\sum_{n=0}^{\infty}$

Laplace	\mathcal{L}	e^{-ut}	$(0, \infty)$	$\frac{e^{ut}}{2\pi i}$	$(c - i\infty, c + i\infty)$
Legendre	\mathcal{J}	$P_n(t)$	$(-1, 1)$	$\frac{2n+1}{2}P_n(u)$	$\sum_{n=0}^{\infty}$
Mellin	\mathcal{M}	t^{u-1}	$(0, \infty)$	$\frac{t^{-u}}{2\pi i}$	$(c - i\infty, c + i\infty)$
Stieltjes	\mathcal{S}	$\frac{\Gamma(p)}{(u+t)^p}$	$(0, \infty)$		
Weierstrass	\mathcal{W}	$\frac{e^{-\frac{(u-t)^2}{4}}}{\sqrt{4\pi}}$	\mathbb{R}	$\frac{e^{\frac{(u-t)^2}{4}}}{i\sqrt{4\pi}}$	$(c - i\infty, c + i\infty)$

8.4. Klasické riešenia PDR

Príklady parciálnych diferenciálnych rovníc:

- Laplaceova rovnica $\Delta u = 0$
- Helmholtzova rovnica $-\Delta u = \lambda u$
- Lineárna transportná rovnica $u_t + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} = 0$
- Liouvilleova rovnica $u_t + \sum_{i=1}^n (b^i u)_{x_i} = 0$
- Rovnica vedenia tepla (difúzie) $u_t - \Delta u = 0$
- Schrödingerova rovnica $iu_t + \Delta u = 0$
- Kolmogorova rovnica $u_t + \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} = 0$
- Fokkerova–Planckova $u_t + \sum_{i,j=1}^n (a^{ij} u)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n (b^i u)_{x_i} = 0$
- Vlnová rovnica $u_{tt} - \Delta u = 0$
- Telegrafná rovnica $u_{tt} + d u_t - u_{xx} = 0$
- Airyho rovnica $u_t + u_{xxx} = 0$
- Nelineárna Poissonova rovnica $-\Delta u = f(u)$
- Rovnica minimálnej plochy $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) = 0$
- Burgerova rovnica $u_t + uu_x = 0$
- Maxwellove rovnice $\mathbf{E}_t = \operatorname{rot} \mathbf{B}$, $\mathbf{B}_t = -\operatorname{rot} \mathbf{E}$, $\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$

8.4.1. Transportná rovnica Je to jedna z najjednoduchších rovníc. Jednorozmerný model popisuje napríklad unášanie nečistoty v trubici s prúdiacou tekutinou, kde u predstavuje koncentráciu unášanej nečistoty a parameter b konštantnú rýchlosť tekutiny. Predpokladajme preto, že koeficienty \mathbf{b} sú konštantné. Vo všeobecnosti majme teda rovnicu

$$u_t + \mathbf{b} \cdot \nabla u = 0, \quad \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad (8.1)$$

kde $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ a $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, \infty), \mathbb{R})$ je neznáma funkcia. Rovnica nám vlastne dáva informáciu, že konkrétna smerová derivácia funkcie u je nulová. Túto informáciu využijeme a definujeme funkciu $z(s) := u(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s)$, $s \in \mathbb{R}$ pre fixný bod $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Potom platí

$$\dot{z}(s) = \nabla u(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s) + u_t(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s) = 0.$$

Teda z je konštantná funkcia premennej s a tým pádom pre každý bod (\mathbf{x}, t) je u konštantná na priamke prechádzajúcej týmto bodom v smere $(\mathbf{b}, 1)$. Zrejme nám stačí vedieť hodnotu u v jednom bode. Majme teraz Cauchyho úlohu

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{b} \cdot \nabla u = 0, & \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, & \text{na } \Gamma := \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases}$$

Priamka prechádzajúca bodom (\mathbf{x}, t) v smere $(\mathbf{b}, 1)$ je daná $(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s)$, $s \in \mathbb{R}$. Pre $t = -s$ sa dotkne plochy Γ v bode $(\mathbf{x} - t\mathbf{b}, 0)$. Tam platí $u(\mathbf{x} - t\mathbf{b}, 0) = g(\mathbf{x} - t\mathbf{b})$. Z toho usudzujeme, že $u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x} - t\mathbf{b})$ na $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ a aj to, že $g \in C^1$.

Poznámka 8.4.2.

Ak by $g \notin C^1$, zrejme ani riešenie nebude hladké. V takomto prípade je možné hovoriť o slabých riešeniach, ktoré sú hladké s.v. a takisto rovnica je splnená s.v. na danej množine.

V prípade nehomogénneho problému môžeme postupovať obdobne.

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{b} \cdot \nabla u = f, & \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, & \text{na } \Gamma := \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases}$$

Platí

$$\dot{z}(s) = \nabla u(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s) + u_t(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s) = f(\mathbf{x} + s\mathbf{b}, t + s).$$

Tým pádom

$$u(\mathbf{x}, t) - g(\mathbf{x} - t\mathbf{b}) = z(0) - z(-t) = \int_{-t}^0 \dot{z}(s) \, ds = \int_0^t f(\mathbf{x} + (s - t)\mathbf{b}, s) \, ds,$$

takže

$$u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x} - t\mathbf{b}) + \int_0^t f(\mathbf{x} + (s - t)\mathbf{b}, s) \, ds, \quad \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$$

je riešením nehomogénnej Cauchyho úlohy.

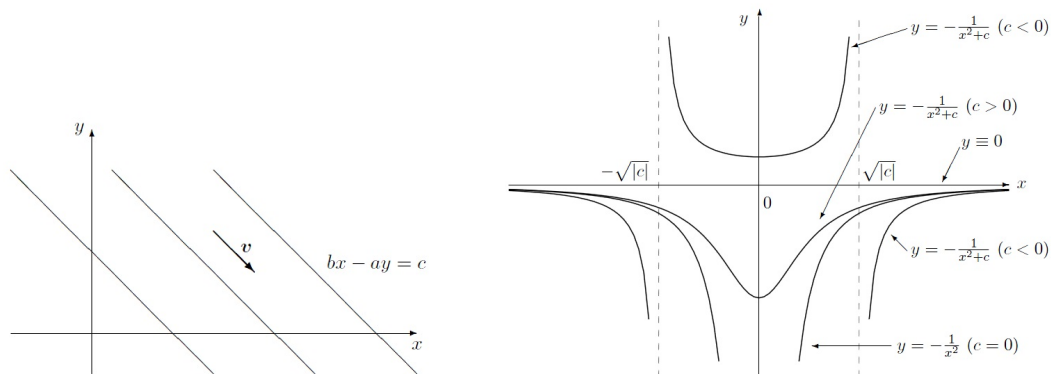
8.4.3. Riešenie metódou charakteristík Uvedieme si zovšeobecnenie metódy riešenia z predchádzajúcej úlohy. Predpokladajme najprv lineárnu homogénnu PDR prvého rádu dvoch nezávislých premenných s konštantnými koeficientami. Majme teda rovnicu v tvare

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (8.2)$$

kde $a^2 + b^2 > 0$. Geometrická interpretácia: rovnica sa dá zapísať v tvare $\langle \mathbf{v}, \nabla u \rangle = 0$ a teda derivácia funkcie u v smere \mathbf{v} je nulová. Funkcia u sa nemení v tomto smere, tj. je konštantná na každej priamke, ktorej smerový vektor je \mathbf{v} (pozor konštanta môže byť na týchto priamkach rôzna). Platí teda $u(x, y) = f(c) = f(bx - ay)$, kde $f \in C^1$. Tieto priamky tvoria tzv. charakteristiky rovnice. Tento tvar je všeobecným (aj generickým) riešením danej rovnice, ide o postupnú vlnu hýbajúcu sa pozdĺž charakteristík. Funkciu f si vyjadríme z počiatočnej, alebo okrajovej podmienky. Podobne postupujeme aj v prípade nekonštantných koeficientov. Rozdiel je v tom, že charakteristiky nemusia byť vo všeobecnosti priamky, ale nejaké krivky. Majme rovnicu

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (8.3)$$

kde $a(x, y)^2 + b(x, y)^2 > 0$, $(x, y) \in G$ a $a, b \in C(G)$. Máme zaručené, že iba jedna charakteristika prechádza každým bodom množiny G . Teraz je $\mathbf{v} = (a(x, y), b(x, y))$ a charakteristiky sú dané



(a) Charakteristické priamky rovnice $au_x + bu_y = 0$, $\mathbf{v} = (a, b)$.

(b) Charakteristiky rovnice $u_x + 2xy^2u_y = 0$.

Obr. 8.1: Príklady charakteristík.

rovniciou

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)}.$$

Nech existuje (hlavný prvý integrál) riešenie a má tvar $h(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, potom hľadaným riešením je funkcia $u(x, y) = F(c) = F(h(x, y))$, $F \in C^1$.

Nevýhodou takejto metódy je, že ju nemôžeme použiť k riešeniu všeobecnejších rovníc. Dá sa to však využiť čiastočne. Majme rovnicu

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y). \quad (8.4)$$

- Metóda charakteristických súradníc - zaved' me súradnice $\xi = bx - ay$, $\tau = y$, z toho máme

$$u_x = b\tilde{u}_\xi, \quad u_y = -a\tilde{u}_\xi + \tilde{u}_\tau.$$

Potom dostaneme rovnicu

$$b\tilde{u}_\tau + \tilde{c}(\xi, \tau)\tilde{u} = \tilde{f}(\xi, \tau),$$

na ktorú sa môžeme pozerat' ako na ODR s parametrom a riešiť ju štandardnými metódami.

Obdobne môžeme postupovať pre nekonštantné koeficienty:

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y), \quad (8.5)$$

pričom zavedieme súradnice $\xi = h(x, y)$, $\tau = y$ (h je prvý integrál). Platí totiž, že $a(x, y)h_x + b(x, y)h_y = 0$ v ľubovoľnom bode (x, y) . Odtiaľ máme ODR s parametrom $\tilde{b}(\xi, \tau)\tilde{u}_\tau + \tilde{c}(\xi, \tau)\tilde{u} = \tilde{f}(\xi, \tau)$.

Príklad 8.4.4.

Rovnica $u_x + yu_y = ye^y$ má všeobecné riešenie $u(x, y) = e^y + g(ye^{-x})$, kde $g \in C^1$.

Uvažujme teraz 3 podienky:

- $u(0, y) = \sin y \Rightarrow g(y) = \sin y - e^y$ - práve jedno riešenie
- $u(x, 0) = \sin(x) \Rightarrow \sin(x) = u(x, 0) = 1 + g(0)$ - žiadne riešenie
- $u(x, 0) = 10 \Rightarrow 10 = u(x, 0) = 1 + g(0)$ - nekonečne veľa riešení ($g \in C^1 : g(0) = 9$)

Všimnime si, že v prvom prípade bola podmienka zadaná na osi y , ktorá pretína všetky charakteristiky rovnice práve raz a pod nenulovým uhlom. V ďalších dvoch prípadoch bola podmienka daná na osi x , ktorá je priamo jednou z charakteristík !

Veta 8.4.5 (Lokálna o existencii).

Nech v rovnici (8.5) sú $a, b, c, f \in C^1(G)$, kde $G \subset \mathbb{R}^2$ je oblasť. Nech aj okrajová podmienka $u = u_0 \in C^1$ je zadaná na regulárnej krivke $\gamma : (x_0(s), y_0(s))$, $s \in I$. Potom ak je splnená podmienka

$$b(x_0(s), y_0(s)) \frac{dx_0}{ds} - a(x_0(s), y_0(s)) \frac{dy_0}{ds} \neq 0, \quad \forall s \in I,$$

tak existuje jediné riešenie danej rovnice na okolí krivky γ , ktorá spĺňa $u_0(s) = u(x_0(s), y_0(s))$.

Poznámka 8.4.6.

Daná podmienka len hovorí, že vektor (a, b) nie je dotykovým vektorom krivky γ v žiadnom z bodov (x_0, y_0) , tj. krivka γ pretína charakteristiky transversálne.

8.4.7. Rovnica vedenia tepla

Budeme študovať rovnicu

$$u_t - \Delta u = f, \quad \text{na } U \times (0, \infty), \quad (8.6)$$

s príslušnými počiatočnými a okrajovými podmienkami, kde $u : \bar{U} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je neznáma funkcia. Fyzikálne popisuje stav ("vývoj") hustoty u v čase nejakej kvantitatívnej veličiny (teplo, chemická koncentrácia, atď.). Štandardne platí, že zmena celkovej veľkosti veličiny v oblasti $V \subset U$ (v čase t) je rovná zápornej hodnote toku (s hustotou \mathbf{F}) cez hranicu ∂V , tj.

$$\frac{d}{dt} \int_V u \, d\mathbf{x} = - \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Z toho máme $u_t = -\operatorname{div} \mathbf{F}$, kde V bola ľubovoľná. Často je \mathbf{F} priamoúmerná gradientu u , tj. $\mathbf{F} = -a\nabla u$, $a > 0$. Pre $a = 1$ máme štandardný tvar tejto rovnice. Táto rovnica sa objavuje aj pri štúdiu Brownovho pohybu. Nájdeme fundamentálne riešenie. Z tvaru rovnice (rádu derivácii podľa časovej a priestorových premenných) dostaneme invariatnosť pri škálovaní. Teda ak u rieši rovnicu, tak aj $u(\lambda \mathbf{x}, \lambda^2 t)$. To indikuje fakt, že podiel $\frac{\|\mathbf{x}\|}{t}$ je dôležitý a zrejme je možné hľadať riešenie v tvare $u(\mathbf{x}, t) = v\left(\frac{\|\mathbf{x}\|}{t}\right)$. V podstate je to špeciálny prípad sebapodobných tvarov riešení

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{\mathbf{x}}{t^\beta}\right).$$

Dosadením tohto výrazu do (8.6) dostaneme

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v + \beta t^{-(\alpha+1)} \mathbf{x} \cdot \nabla v + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v = 0,$$

pričom volíme $\beta = \frac{1}{2}$. Ak navyše predpokladáme, že riešenie je radiálne symetrické $v(\mathbf{x}) = w(\|\mathbf{x}\|) = w(r)$, tak dostaneme rovnicu

$$\alpha w + \left(\frac{1}{2}r + \frac{n-1}{r} \right) w' + w'' = 0. \quad (8.7)$$

Ďalšou voľbou parametra $\alpha = \frac{n}{2}$ dostaneme rovnicu, ktorá má po redukcii tvare

$$r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w = \text{konšt.}, \quad (8.8)$$

pričom navyše predpokladáme, že $\lim_{r \rightarrow \infty} w = \lim_{r \rightarrow \infty} w' = 0$. Z toho máme riešenie v tvare $w = be^{-\frac{r^2}{4}}$. To nás privádza k nasledujúcej definícii.

Definícia 8.4.8.

Funkcia

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4t}}, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0, \end{cases}$$

nazývame **fundamentálne riešenie rovnice vedenia tepla**.

Poznámka 8.4.9.

Všimnime si, že Φ má singularitu v bode $(0, 0)$. Konštanta b je volená z normalizácie $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = 1$.

V prípade Cauchyho úlohy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, & \text{na } \Gamma := \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases} \quad (8.9)$$

je jasné, že pre fixné \mathbf{y} aj $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t)$ je riešením rovnice vedenia tepla (okrem bodu $(0, 0)$).

Potom však riešenie v tvare konvolúcie je riešením (8.10). Dostávame tak vetu:

Veta 8.4.10.

Nech $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ a u je dané $u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$. Potom

- (I) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$,
- (II) $u_t - \Delta u = 0$, na $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$,
- (III) $\lim_{(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{x}^0, 0), t > 0} u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}^0)$, $\forall \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka 8.4.11.

Všimnime si, že ak $g \in C_b$, nezáporná a $g \not\equiv 0$, potom riešenie u je kladné na $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Teda teplota je vždy a všade nenulová (môže nadobúdať malé hodnoty), ak počiatočný impulz je nezáporný a niekde kladný.

V prípade nehomogénnej Cauchyho úlohy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{na } \Gamma := \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases} \quad (8.10)$$

použijeme Duhamelov princíp. Už vieme, že problém

$$\begin{cases} u_t(\cdot; s) - \Delta u(\cdot; s) = 0, & \text{na } \mathbb{R}^n \times (s, \infty), \\ u(\cdot; s) = f(\cdot; s), & \text{na } \Gamma := \mathbb{R}^n \times \{s\}. \end{cases} \quad (8.11)$$

má riešenie v tvare $u(\mathbf{x}, t; s) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y}$. Uvažujme riešenie nehomogénneho problému v tvare

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t u(\mathbf{x}, t; s) ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds, \quad \mathbb{R}^n \times [0, \infty).$$

Dostávame tak vetu:

Veta 8.4.12.

Nech u je dané $u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) dy ds$. Potom

(I) $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$,

(II) $u_t(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t)$, na $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$,

(III) $\lim_{(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{x}^0, 0), t > 0} u(\mathbf{x}, t) = 0, \forall \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Problém 8.4.13.

Ako by vyzeralo riešenie nehomogénneho problému s nenulovou počiatočnou podmienkou?

8.4.14. Laplaceova a Poissonova rovnica Budeme študovať rovnicu

$$\Delta u = f, \text{ na } U, \tag{8.12}$$

s príslušnými počiatočnými a okrajovými podmienkami, kde $u : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ je neznáma funkcia. Metódou sebapodobných radiálne symetrických riešení dostaneme fundamentálne riešenie v prípade $f = 0$ (takéto funkcie sa nazývajú aj **harmonické** na U).

Definícia 8.4.15.

Funkcia

$$\Phi(\mathbf{x}) := \begin{cases} -\frac{\ln \|\mathbf{x}\|}{2\pi}, & n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)V(n)\|\mathbf{x}\|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases}$$

definované pre $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, kde $V(n)$ je objem jednotkovej guli v \mathbb{R}^n , nazývame **fundamentálne riešenie Laplaceovej rovnice**.

Ak pravá strana nie je nulová, nájdeme riešenie opäť v tvare konvolúcie, treba byť však opatrný kvôli singularite fundamentálneho riešenia.

Dostávame tak vetu:

Veta 8.4.16.

Nech u je dané $u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$. Potom

(I) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$,

(II) $\Delta u = f$, na \mathbb{R}^n .

8.4.17. Vlnová rovnica Rovnica popisuje zjednodušený model kmitania struny, membrány či plastického telesa, pričom u udáva vychýlenie v nejakom smere a čase.

$$\square u := u_{tt} - \Delta u = f, \text{ na } U \times (0, \infty), \quad (8.13)$$

s príslušnými počiatočnými a okrajovými podmienkami, kde $u : \bar{U} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je neznáma funkcia.

Pozrime sa na d'Alembertovo riešenie pre $n = 1$. Máme teda Cauchyho úlohu

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \text{na } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = g, u_t = h, & \text{na } \Gamma := \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases} \quad (8.14)$$

kde g, h sú dané funkcie. Všimnime si, že rovnica sa dá faktorizovať (reps. jej diferenciálny operátor) a má tvar

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0.$$

Ak si označíme $v := \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u$, potom dostaneme homogénnu transportnú rovnicu pre v s konštantnými koeficientami. Vieme teda, že $v(x, t) = a(x - t)$, pre $a(x) = v(x, 0)$. Potom však

dostaneme rovnicu pre u :

$$u_t - u_x = a(x - t), \text{ na } \mathbb{R} \times (0, \infty). \quad (8.15)$$

To je zasa nehomogénna transportná rovnica, ktorá implikuje riešenie v tvare

$$u(x, t) = \int_0^t a(x + (t - s) - s) ds + b(x + t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(y) dy + b(x + t),$$

kde $b(x) = u(x, 0)$. Využívajúc počiatkových podmienok máme hneď $b(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ a $a(x) = v(x, 0) = u_t(x, 0) - u_x(x, 0) = h(x) - g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Po dosadení dostaneme riešenie a nasledujúcu vetu.

Veta 8.4.18.

Nech $g \in C^2$, $h \in C^1$ a u je dané

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [g(x + t) - g(x - t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+.$$

Potom

- (I) $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$,
- (II) $u_{tt} - u_{xx} = 0$, na $\mathbb{R} \times (0, \infty)$,
- (III) $\lim_{(x,t) \rightarrow (x^0, 0), t > 0} u(x, t) = g(x^0)$
 $\lim_{(x,t) \rightarrow (x^0, 0), t > 0} u_t(x, t) = h(x^0)$, $\forall x^0 \in \mathbb{R}$.

Poznámka 8.4.19.

Riešenie má vlastne tvar $u(x, t) = F(x + t) + G(x - t)$, čo je dôsledoko faktorizácie. Je zrejmé, že ak $g \in C^k$ a $h \in C^{k-1}$, tak $u \in C^k$, ale nemôže byť hladšie. Takže na rozdiel od rovnice vedenia tepla, táto rovnica nezhladzuje počiatkové dáta. Pre dimenzie $n = 2, 3$ sa formuly riešení nazývajú Poissonova, resp. Kirchhoffova. Pre nehomogénny problém možno opäť použiť Duhamelov princíp.

8.5. Čo sa nevošlo

Pozrieme sa ešte na metódu neurčitých koeficientov pre nehomogénne rovnice s konštantnými koeficientami.

Veta 8.5.1.

Nech $\mathbf{b}(t)$ je stĺpec, ktorého zložky sú polynómy stupňa najviac m . Nech nula je k -násobný koreň charakteristickej rovnice matice A . Potom existuje partikulárne riešenie systému $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$, ktorého zložky sú polynómy stupňa najviac $m + k$.

Poznámka 8.5.2.

Platí, že $k = 0$, práve vtedy, keď $\det A \neq 0$. Veta platí, aj keď prvky A a popríklad koeficienty polynómu v zložkách $\mathbf{b}(t)$ sú komplexné čísla.

Veta 8.5.3.

Nech $\mathbf{b}(t)$ je stĺpec tvaru $e^{\alpha t} \mathbf{P}_m(t)$, kde $\alpha \in \mathbb{C}$ a zložky stĺpca \mathbf{P}_m sú polynómy stupňa najviac m . Potom substitúcia $\mathbf{y} = e^{\alpha t} \mathbf{u}$ prevedie systém $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + e^{\alpha t} \mathbf{P}_m(t)$ na nehomogénny systém, kde zložky stĺpca pravých strán sú polynómy stupňa najviac m .

Veta 8.5.4.

Nech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ak je $\mathbf{y} = \mathbf{y}^1 + i\mathbf{y}^2$ riešením sústavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + e^{(\alpha+\beta i)t} \mathbf{P}_m(t)$, potom je \mathbf{y}^1 riešením sústavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + e^{\alpha t} \cos \beta t \mathbf{P}_m(t)$ a \mathbf{y}^2 riešením sústavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + e^{\alpha t} \sin \beta t \mathbf{P}_m(t)$.

Príklad 8.5.5.

Hľadáme partikulárne riešenie sústavy $y_1' = 2y_1 - y_2$, $y_2' = -y_1 + 2y_2 - 5e^t \sin t$. Zrejme $\alpha = 1$, $\beta = 1$ a upravená pravá strana $(0, -5e^{(1+i)t})$. Zavedením substitúcie $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{u}e^{(1+i)t}$ dostaneme (komplexný) systém

$$u_1' = (1 - i)u_1 - u_2, \quad u_2' = -u_1 + (1 - i)u_2 - 5.$$

Tu použijeme vetu 8.5.1 a dostaneme tak partikulárne riešenie $\mathbf{u}_p = (2i - 1, 3i + 1)^T$. Spätnou transformáciou dostaneme partikulárne riešenie pôvodnej sústavy v (komplexnom) tvare

$$\tilde{y}_1 = (2i - 1)e^x(\cos x + i \sin x), \quad \tilde{y}_2 = (3i + 1)e^x(\cos x + i \sin x).$$

Takže nakoniec hľadané reálne riešenie:

$$y_1 = e^x(2 \cos x - \sin x), \quad y_2 = e^x(3 \cos x + \sin x).$$

Ukážeme si ďalšiu metódu výpočtu pomocou tzv. exponenty matice \mathbf{A} . Vieme, že riešenie rovnice $y' = ay$ tvoria funkcie tvaru $y(t) = ce^{at}$, $y(t_0) = c$. Analogicky by mohlo platiť, že riešenie systému rovníc, ktorý môžeme zapísať v maticovom tvare $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$, bude $Y(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{C}$. Exponenciálu matice môžeme definovať analogicky ako

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}.$$

Najprv je potreba povedať, že takýto nekonečný rad konverguje pre každú štvorcovú maticu \mathbf{A} . Zaved' me normu matice takto

$$\|\mathbf{A}\| = \max \{ \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1 \} = \max \left\{ \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \neq 0 \right\}, \quad (8.16)$$

kde $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Zrejme pre ňu platí $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|$ a teda $\|\mathbf{A}^m\| \leq \|\mathbf{A}\|^m$. Z toho ale máme

$$\left\| \sum_{m=k}^l \frac{\mathbf{A}^m}{m!} \right\| \leq \sum_{m=k}^l \frac{\|\mathbf{A}\|^m}{m!} \leq \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\|\mathbf{A}\|^m}{m!} \rightarrow 0,$$

pre $k \rightarrow \infty$, tj. postupnosť čiastočných súčtov spĺňa Bolzanovu-Cauchyovu podmienku (je fundamentálna).

Poznámka 8.5.6.

Ak \mathbf{A} a \mathbf{B} sú komutatívne, potom $e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$. Ak \mathbf{O} je nulová matica, potom $e^{\mathbf{O}} = \mathbf{I}$.

Veta 8.5.7.

Matica $\mathbf{A} \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, kde \mathbb{K} je algebraicky uzavreté pole je podobná s maticou $J_{\mathbf{A}}$ v Jordanovom normálnom (kanonickom) tvare. Pritom matica $J_{\mathbf{A}}$ je určená jednoznačne až na poradie Jordanových blokov.

Problém 8.5.8.

Majme maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ukážte, že matica má dva dvojnásobné (algebraická násobnosť je 2) korene $1, -1$, pričom prvý z nich má geometrickú násobnosť 1 a druhý 2. Teda

$$J_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Majme $A = V J_A V^{-1}$, potom pre výpočet exponenciály matice platí

$$e^A = e^{V J_A V^{-1}} = V e^{J_A} V^{-1} = V \operatorname{diag}(e^{J_1}, \dots, e^{J_k}) V^{-1},$$

kde

$$e^{\mathbf{J}_i} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i} & \frac{e^{\lambda_i}}{1!} & \frac{e^{\lambda_i}}{2!} & \cdots & \frac{e^{\lambda_i}}{(r-1)!} \\ 0 & e^{\lambda_i} & \frac{e^{\lambda_i}}{1!} & \cdots & \frac{e^{\lambda_i}}{(r-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_i} & \frac{e^{\lambda_i}}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_i} \end{bmatrix},$$

pričom r je veľkosť danej bunky. A teda pre maticu $\mathbf{A}(t)$ konečne máme

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{V}\mathbf{J}_{\mathbf{A}(t)}\mathbf{V}^{-1}} = \mathbf{V}e^{\mathbf{J}_{\mathbf{A}(t)}}\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V} \operatorname{diag}(e^{\mathbf{J}_1(t)}, \dots, e^{\mathbf{J}_k(t)})\mathbf{V}^{-1},$$

kde

$$e^{\mathbf{J}_i(t)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & \frac{te^{\lambda_i t}}{1!} & \frac{t^2 e^{\lambda_i t}}{2!} & \cdots & \frac{t^{r-1} e^{\lambda_i t}}{(r-1)!} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & \frac{te^{\lambda_i t}}{1!} & \cdots & \frac{t^{r-2} e^{\lambda_i t}}{(r-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_i t} & \frac{te^{\lambda_i t}}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}.$$

Ak spravíme lineárnu transformáciu $\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, kde $\mathbf{T} \in M_{n \times n}$ je regulárna matica, potom dostaneme systém $\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}$, pričom $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$. Hovoríme, že takéto systémy sú **ekvivalentné**.

Lema 8.5.9.

Pre všetky $i = 1, \dots, n$ je \mathbf{T}^i vlastný vektor matice \mathbf{A} zodpovedajúci vlastnému číslu λ_i .

Veta 8.5.10.

Systém (2.4) je ekvivalentný so systémom $\mathbf{x}' = \mathbf{B} \mathbf{x}$, kde \mathbf{B} je Jordanova forma matice \mathbf{A} , tj.

$$\mathbf{B} = J_{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{S}_k \end{bmatrix} = \text{diag}(\mathbf{D}, \mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_k),$$

kde

$$\mathbf{S}_j = \begin{bmatrix} \lambda_{m_j} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{m_j} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_j} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{m_j} \end{bmatrix},$$

kde m_j je veľkosť danej Jordanovej bunky, $m + m_1 + \dots + m_k = n$ a $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, λ_i sú vlastné hodnoty matice \mathbf{A} .

Poznámka 8.5.11.

Riešme Cauchyho úlohu (2.4), $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0$ a predpokladajme, že platí predchádzajúca veta. Potom $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{B}t} \mathbf{x}^0$, kde $\mathbf{x}^0 = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{y}^0$. Takže riešenie pôvodnej úlohy má tvar $\mathbf{y}(t) = \mathbf{T} \mathbf{x}(t) = \mathbf{T} e^{\mathbf{B}t} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{y}^0$.

Príklad 8.5.12.

Majme problém

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \mathbf{y}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Potom $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$ a k nim prislúchajúce vlastné vektory sú $\mathbf{T}^1 = (1, 1)^T, \mathbf{T}^2 = (3, 4)^T$. Z toho máme

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

, teda riešenie má tvar

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{T} \operatorname{diag}(e^{-2t}, e^{-3t}) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{y}^0$$

Definícia 8.5.13.

Ohraničená oblasť je ***k*-násobne súvislá**, ak jej hranicu tvorí *k* uzavretých kriviek bez spoločných bodov.

Skúmanie stability riešenia systému (1.6) môže byť redukované na skúmanie stability nulového riešenia nového systému rovníc, získaného pomocou lineárnej transformácie. Pojednáva o tom nasledujúca veta.

Veta 8.5.14.

Riešenie $\psi(t, t_0, \xi)$ rovnice (1.6) je stabilné (asymptoticky stabilné, nestabilné) \Leftrightarrow triviálne riešenie $\psi(t, t_0, 0) = 0$ rovnice $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$, kde $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x} + \psi(t, t_0, \xi)) - \mathbf{f}(t, \psi(t, t_0, \xi))$ je stabilné (asymptoticky stabilné, nestabilné).

Veta 8.5.15.

Rovnica (2.1) (\mathbf{A}, \mathbf{b} sú spojité) je stabilná (asymptoticky stabilná, nestabilná) \Leftrightarrow homogénna rovnica k nej prislúchajúca je stabilná (asymptoticky stabilná, nestabilná).

Veta 8.5.16.

Nech D je dvojnásobne súvislá oblasť fázového priestoru systému $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$ a $\rho(x, y)$ je taká funkcia, že $\rho f, \rho g \in C^1$. Potom, ak $\operatorname{div}(\rho f, \rho g)$ nemení znamienko na D s.v., tento systém nemá viac ako jednu periodickú trajektóriu v D .

Veta 8.5.17.

Nech pravá strana $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ sústavy (1.6) spojitě diferencovateľná na $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Potom

- (I) ku $\forall (t_0, \mathbf{y}^0) \in \Omega \exists$ v nejakom jeho okolí n nezávislých prvých integrálov, ak navyše uvažujeme autonómny systém, potom ku $\forall \mathbf{y}^0 : \mathbf{f}(\mathbf{y}^0) \neq 0$, \exists v nejakom jeho okolí $(n - 1)$ nezávislých prvých integrálov nezávisiacich na t .
- (II) Ak sú $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ nezávislé v (t_0, \mathbf{y}^0) prvé integrály sústavy (1.6), potom v nejakom jeho okolí sa dá každý prvý integrál tejto sústavy napísať v tvare $\Psi(\Theta_1(t, \mathbf{y}), \Theta_2(t, \mathbf{y}), \dots, \Theta_n(t, \mathbf{y}))$, pričom Ψ je vhodná spojitě diferencovateľná funkcia. Navyše, existuje najviac $(n - 1)$ nezávislých v bode (t_0, \mathbf{y}^0) prvých integrálov sústavy (1.6) nezávisiacich explicitne na t , okrem prípadu, kedy $f(t, \mathbf{y})$ je identicky nula na nejakom okolí bodu (t_0, \mathbf{y}^0) . Ak je $f(t_0, \mathbf{y}^0) \neq 0$ a $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{n-1}$ sú nezávisiace na t prvé integrály, ktoré sú nezávislé v bode (t_0, \mathbf{y}^0) , potom každý nezávisiaci na t prvý integrál sa v nejakom okolí bodu \mathbf{y}^0 dá zapísať v tvare $\Psi(\Theta_1(\mathbf{y}), \Theta_2(\mathbf{y}), \dots, \Theta_{n-1}(\mathbf{y}))$, pričom Ψ je vhodná spojitě diferencovateľná funkcia.

8.6. Približné metódy riešenia diferenciálnych rovníc

Picardova metóda postupných aproximácií:

Majme systém (1.6), ktorý spĺňa podmienku $\mathbf{y}(t_0) = \tilde{\mathbf{y}}^0$, pričom predpokladáme, že riešenie spĺňa predpoklady zaručujúce existenciu a jednoznačnosť. Nech prvá aproximácia riešenia tejto začiatočnej úlohy je $\mathbf{y}^0(t)$. Väčšinou berieme za prvú aproximáciu začiatočnú podmienku (teda konštantnú funkciu), tj. $\mathbf{y}^0(t) = \tilde{\mathbf{y}}^0$. Následné aproximácie definujeme ako

$$\mathbf{y}^k(t) = \tilde{\mathbf{y}}^0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}^{k-1}(s)) ds, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (8.17)$$

Takže máme postupnosť funkcií, ktorá konverguje rovnomerne k riešeniu Cauchyho úlohy, tj. $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{y}^m(t) = \mathbf{y}(t)$. Táto metóda je zahrnutá aj v dôkaze Picardovej-Lidelöfovej vety, ktorá využíva vetu o pevnom bode (uvedenú na prednáške). Ak sa rozhodneme pre určité m , dostaneme približné riešenie, pričom chybu tejto aproximácie možno odhadnúť nerovnosťou

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^m(t)\| \leq \frac{M(hL)^m}{L m!},$$

kde $M = \max_G \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\|$ a $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ Uvedieme si príklad.

Príklad 8.6.1.

Majme Cauchyho úlohu $x' = tx$, $y' = xy$, $x(0) = y(0) = 1$. Prvá aproximácia má tvar

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t f_1(s, x_0, y_0) ds = 1 + \int_0^t s ds = 1 + \frac{t^2}{2},$$

$$y_1(t) = 1 + \int_0^t f_2(s, x_0, y_0) ds = 1 + \int_0^t ds = 1 + t.$$

Druhá aproximácia má tvar

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t f_1(s, x_1, y_1) ds = 1 + \int_0^t s(1+s) ds = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3},$$

$$y_2(t) = 1 + \int_0^t f_2(s, x_1, y_1) ds = 1 + \int_0^t \left(1 + \frac{s^2}{2}\right)(1+s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{8}.$$

A tretia

$$x_3(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^5}{30} + \frac{t^6}{48},$$

$$y_3(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \frac{17t^5}{120} + \frac{t^6}{24} + \frac{17t^7}{1008} + \frac{t^8}{192}.$$

Metóda využívajúca rozvoje do mocninných radov:

Ďalšou metódou približných riešení je využitie mocninných radov. My sa pozrieme iba na najjednoduchšiu z nich. Zopakujeme si niektoré fakty z teórie Taylorových radov.

Poznámka 8.6.2.

1. Ak Taylorov rad $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ konverguje na intervale $I : |x - x_0| < R$, kde $R > 0$, potom tento rad definuje funkciu $f(x)$, ktorá je spojitá v každom $x \in I$.
2. Ak f je definovaná Taylorovým radom, tj. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$, $|x - x_0| < R$, tak $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{(k-1)}$, $|x - x_0| < R$.
3. Ak $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$, $|x - x_0| < R$ a $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$, $|x - x_0| < R$, potom $f = g \Leftrightarrow a_k = b_k$, $k = 0, 1, \dots, \infty$.
4. Ak $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$, $|x - x_0| < R$, potom $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = 0, 1, \dots$.
5. Ak $f \in C^\infty(I)$, $I : |x - x_0| < h$, potom $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$, kde R_n je zvyšok. Ak navyše $R_n \rightarrow 0$ pre $n \rightarrow \infty$, potom $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$, $I : |x - x_0| < h$

Pripomeňme, že pre rovnicu vyššieho rádu

$$y^{(n)} + f_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + f_1(t)y' + f_0 y = Q(t) \quad (8.18)$$

platí nasledujúce tvrdenie:

Veta 8.6.3.

If Q, f_i , $i = 0, 1, \dots, n - 1$ sú analytické v bode t_0 (majú Taylorov rad na okolí tohto bodu), potom existuje jediné riešenie y rovnice (8.18), ktoré je analytické v bode t_0 a spĺňa počiatočné podmienky $y^{(k)}(t_0) = a_k$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Analogicky chceme riešiť aj systémy diferenciálnych rovníc. Pre ne platí obdobné tvrdenie.

Veta 8.6.4.

Ak \mathbf{f} je analytická v bode (t_0, \mathbf{a}) , tj. každá f_k má Taylorov rad na intervale $I \subset \mathbb{R}^{n+1}$:
 $|t - t_0| < r$, $|y_k - a_k| < r$, $k = 1, 2, \dots, n$, a ak pre každý bod $(t, \mathbf{y}) \in I$ platí

$$|f_k(t, \mathbf{y})| \leq M, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

kde $M > 0$. Potom existuje interval $J \subset \mathbb{R}$, na ktorom existuje práve jedna funkcia \mathbf{y} , ktorá je analytická v bode t_0 a rieši Cauchyho úlohu (1.11). Tj. každá y_k má Taylorov rad na okolí bodu t_0 a koeficienty sú dané hodnotami $\frac{y_i^{(j)}(t_0)}{j!}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Navyše interval J je aspoň $\tilde{J} : |t - t_0| < \min\left(r, \frac{r}{(n+2)M}\right)$.

Príklad 8.6.5 (Metóda postupných derivácií).

Majme systém $(x_1', x_2') = (tx_2, x_1x_2)$ s podmienkou $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 1)$. Pravá strana je analytická na \mathbb{R}^3 a teda hľadáme riešenie v tvare

$$x_i(t) = x_i(0) + x_i'(0)t + \frac{x_i''(0)}{2}t^2 + \dots, \quad i = 1, 2.$$

Zrejme platí

$$x_1' = tx_2, \quad x_2' = x_1x_2,$$

$$x_1'' = x_2 + tx_2', \quad x_2'' = x_1x_2' + x_2x_1',$$

$$x_1''' = 2x_2' + tx_2'', \quad x_2''' = x_1x_2'' + 2x_2'x_1' + x_2x_1'',$$

atď. Z toho dostaneme, že koeficienty sa rovnajú $x_1(0)' = 0$, $x_2(0)' = 1$, $x_1(0)'' = 1$, $x_2(0)'' = 1$, $x_1(0)''' = 2$, $x_2(0)''' = 2$, atď. Takýmto spôsobom dostaneme požadované riešenie (alebo skôr aproximáciu)

$$x_1(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{8} + \dots,$$

$$x_2(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{7t^4}{24} + \dots$$

Príklad 8.6.6 (Metóda neurčitých koeficientov).

Majme systém $(x_1', x_2') = (tx_2, x_1x_2)$ s podmienkou $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 1)$. Pravá strana je analytická na \mathbb{R}^3 a teda hľadáme riešenie v tvare

$$x_1(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots,$$

$$x_2(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots$$

Derivovaním dostaneme

$$a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + \dots = t(b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots),$$

$$b_1 + 2b_2t + 3b_3t^2 + \dots = (a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots)(b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots).$$

Z toho dostaneme rovnice

$$a_1 = 0, \quad b_1 = a_0b_0,$$

$$2a_2 = b_0, \quad 2b_2 = a_0b_1 + a_1b_0,$$

$$3a_3 = b_1, \quad 3b_3 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0,$$

atď. Hodnoty a_0, b_0 určíme zo začiatkových podmienok a zvyšné koeficienty z týchto rovníc. A tak opäť dostaneme riešenie v tvare Taylorovho radu.

Newtonova-Kantorovičova metóda:

Je to známa metóda riešenia veľmi všeobecných nelineárnych úloh. Vychádza z Newtonovej metódy dotyčníc na riešenie algebraických rovníc.

Diferenciálna rovnica prvého rádu $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$:

Nech nejaká funkcia (prvá aproximácia) $y_0(x)$ splňa počiatkovú podmienku $y_0(x_0) = y_0$.

Nasledujúcu aproximáciu zostrojíme ako riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice

$$y_1'(x) - \frac{\partial f(x, y_0(x))}{\partial y} y_1(x) = f(x, y_0(x)) - \frac{\partial f(x, y_0(x))}{\partial y} y_0(x),$$

ktoré spĺňa počiatocnú podmienku $y_1(x_0) = y_0$. Podobne postupujeme ďalej tak, že aproximáciu y_{n+1} zostrojíme ako riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice

$$y_{n+1}'(x) - \frac{\partial f(x, y_n(x))}{\partial y} y_{n+1}(x) = f(x, y_n(x)) - \frac{\partial f(x, y_n(x))}{\partial y} y_n(x),$$

ktoré spĺňa počiatocnú podmienku $y_{n+1}(x_0) = y_0$. Táto rovnica je riešiteľná pre ľubovoľné koeficienty $p_n(x) := f_y'(x, y_n(x))$, $q_n(x) := f(x, y_n(x)) - f_y'(x, y_n(x)) y_n(x)$. Platí

$$y_{n+1}(x) = e^{\int_{x_0}^x p_n(x) dx} \left(y_0 + \int_{x_0}^x q_n(z) e^{-\int_{x_0}^z p_n(x) dx} dz \right).$$

Uved' me podmienky konvergencie a odhad chyby približného riešenia. Označme

$$\rho := \max_Q \left| y_0(x) - y_0 - \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt \right|, \quad \gamma := a \rho M_2 e^{2M_1 a},$$

kde $|f_y'(x, y)| \leq M_1$, $|f_{yy}''(x, y)| \leq M_2$. Ak sú splnené nerovnosti

$$\gamma \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{2\rho}{1 + \sqrt{1 - 2\gamma}} \leq b,$$

tak postupné aproximácie spĺňajú nerovnosť $|y_n(x) - y_0| \leq b$ a rovnomerne konvergujú k skutočnému riešeniu na intervale $|x - x_0| \leq a$. Navyše platí $|y_n(x) - y(x)| \leq \frac{(2\gamma)^{2^{n-1}} \rho}{2^{n-1}}$

m -rozmerný diferenciálny systém rovníc prvého rádu $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$, $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$:

Nech nejaká funkcia (prvá aproximácia) $\mathbf{y}^0(x)$ spĺňa počiatocnú podmienku $\mathbf{y}^0(x_0) = \mathbf{y}_0$. Nasledujúcu aproximáciu zostrojíme ako riešenie systému lineárnych diferenciálnych rovníc

$$(y_j^1)'(x) - \langle \nabla_{\mathbf{y}} f_j(x, \mathbf{y}^0(x)), \mathbf{y}^1(x) \rangle = f_j(x, \mathbf{y}^0(x)) - \langle \nabla_{\mathbf{y}} f_j(x, \mathbf{y}^0(x)), \mathbf{y}^0(x) \rangle, \quad j = 1, \dots, m$$

ktoré spĺňa počiatocnú podmienku $\mathbf{y}^1(x_0) = \mathbf{y}_0$. Podobne postupujeme ďalej tak, že aproximá-

ciu \mathbf{y}^{n+1} zostrojíme ako riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice

$$(\mathbf{y}_j^{n+1})'(x) - \langle \nabla_{\mathbf{y}} f_j(x, \mathbf{y}^n(x)), \mathbf{y}^{n+1}(x) \rangle = f_j(x, \mathbf{y}^n(x)) - \langle \nabla_{\mathbf{y}} f_j(x, \mathbf{y}^n(x)), \mathbf{y}^n(x) \rangle, \quad j = 1, \dots, m$$

ktoré spĺňa počiatočnú podmienku $\mathbf{y}_{n+1}(x_0) = \mathbf{y}_0$. Koefficienty tohto systému sú vo všeobecnosti premenné, a teda integrovanie tohto systému je úloha dosť pracná. Navyše komplikáciou je aj fakt, že sa menia v každom kroku. Dá sa však použiť modifikácia tejto metódy:

$$(\mathbf{y}_j^{n+1})'(x) - \langle \nabla_{\mathbf{y}} f_j(x, \mathbf{y}^0(x)), \mathbf{y}^{n+1}(x) \rangle = f_j(x, \mathbf{y}^n(x)) - \langle \nabla_{\mathbf{y}} f_j(x, \mathbf{y}^0(x)), \mathbf{y}^n(x) \rangle, \quad j = 1, \dots, m$$

ktoré spĺňa počiatočnú podmienku $\mathbf{y}_{n+1}(x_0) = \mathbf{y}_0$.

Veta 8.6.7 (Vlastnosti ortogonálneho doplnku).

Nech H je Hilbertov priestor. Pre ľubovoľnú $A \subseteq H$ je A^\perp uzavretý podpriestor a $A \subseteq A^{\perp\perp}$. Pre $A \subseteq B \subseteq H$ je $B^\perp \subseteq A^\perp$. Navyše $A^{\perp\perp\perp} = A^\perp$.

Veta 8.6.8 (O úplnosti priestorov postupností).

- (I) Pre $p \in [1, \infty]$ sú priestory l^p úplné (Banachove).
- (II) Priestory c, c_0 sú uzavreté v l^∞ a sú teda úplné (v norme l^∞).
- (III) Priestor c_{00} nie je úplný.

Príklad 8.6.9.

Uvažujme postupnosť $z_n = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\} \in c_{00}$, $n \in \mathbb{N}$. Zrejme pre $n > m$ je $z_n - z_m = \{0, 0, \dots, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\}$ a teda $\|z_n - z_m\|_\infty = \sup\{\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+2}, \dots, \frac{1}{n}\} = \frac{1}{m+1} \rightarrow 0$. Ale $z_n \rightarrow z = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\} \notin c_{00}$ ($\in c_0 \setminus c_{00}$).

Veta 8.6.10 (O separabilnosti priestorov postupností).

- (I) Pre $p \in [1, \infty)$ sú priestory l^p separabilné.
- (II) Priestory c, c_0 sú separabilné.
- (III) Priestor l^∞ nie je separabilný.

Problém 8.6.11.

Ako je to s priestorom c_{00} ?

Hölderove priestory:

Majme $\lambda \in (0, 1]$ a normu

$$\|f\|_{k,\lambda} := \max_k \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |f^{(k)}(\mathbf{x})| + \max_k \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}} \frac{\|f^{(k)}(\mathbf{x}) - f^{(k)}(\mathbf{y})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\lambda}$$

$$C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}, \mathbb{K}) := \{f \in C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{K}) : \|f\|_{\alpha,\lambda} < \infty, \forall \alpha : |\alpha| = k\}$$

Priestor $C^{0,\lambda}$ tvoria hölderovsky spojité funkcie, tj. funkcie spĺňajúce $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq c \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\lambda$, $c > 0$. Špeciálne pre $\lambda = 1$ hovoríme o lipschitzovsky spojitých funkciách.

Veta 8.6.12.

Ak Ω je otvorená a ohraničená, potom $(C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{k,\lambda})$ je Banachov priestor. Tieto priestory nie sú separabilné.

8.6.13. Spektrum operátora

Pri štúdiu lineárneho zobrazenia nám často pomôže, ak vieme toto zobrazenie rozložiť na jednoduchšie zobrazenia (pomocou projekcie na príslušné priestory) (reprezentácia matice v Jordanovom kanonickom tvare nám poskytuje rozklad na zobrazenia príslušné jednotlivým Jordanovým bunkám súvisiac s vlastnými číslami). Tento rozklad umožňuje tiež jednoduchý funkčný kalkulus pre dané zobrazenie (napr. mocnina operátora). V tejto kapitole chceme určiť spektrum operátora v nekonečnorozmernom prípade. Ukážeme, že spektrálny rozklad možno urobiť napr. pre normálne zobrazenia.

Majme Banachov priestor $(X, \|\cdot\|)$ nad \mathbb{C} a lineárny operátor $T : X \rightarrow X$ s definičným oborom D_T a oborom hodnôt H_T . Podobne ako pre matice, skalár λ ku ktorému existuje $0 \neq x \in D_T : Tx = \lambda x$ sa nazýva **vlastnou hodnotou operátora T** a nulový priestor (kernel) $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ sa nazýva **priestorom vlastných vektorov (funkcií)**. Mohlo by sa zdať, že aj v prípade nekonečnej dimenzie stačí na geometrickú analýzu poznať vlastné hodnoty a vektory operátora.

Nasledujúci príklad ukazuje, že to tak nie je.

Príklad 8.6.14.

Nech $H = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ a $(Tf)(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)} f(s) ds$. Zrejme $D_T = H$ a $H_T \subset H$. Keď že $(Te^{i\omega s})(t) = \frac{e^{i\omega t}}{1+i\omega}$, zdalo by sa, že je vlastným vektorom operátora T zodpovedajúcim vlastnej hodnote $\lambda = \frac{1}{1+i\omega}$. Ale $e^{i\omega s} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, takže táto úvaha nie je správna.

Potrebuje poznať tzv. spektrum operátora T . Zopakujme si čo vieme pre matice M , λ je vlastnou hodnotou práve vtedy, keď $\lambda I - M$ nie je prostá (nemá inverziu), čiže keď $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ je netriviálny. Pre operátory sa ukazuje, že kľúčové je štúdium tých λ , pre ktoré $\lambda I - T$ nemá spojitú inverznú zobrazenie (spektrum). V prípade spojitých lineárnych operátorov existencia inverzie implikuje jej spojitosť. Keď že uvažujeme aj nespojité lineárne operátory potrebujeme pridať podmienku **uzavretosti** operátora T (operátor je uzavretý, ak je jeho graf uzavretý v $X \oplus Y$ a množina uzavretých lineárnych operátorov obsahuje spojitú lineárne operátory). Príklad nespojitého uzavretého operátora je derivácia.

Definícia 8.6.15.

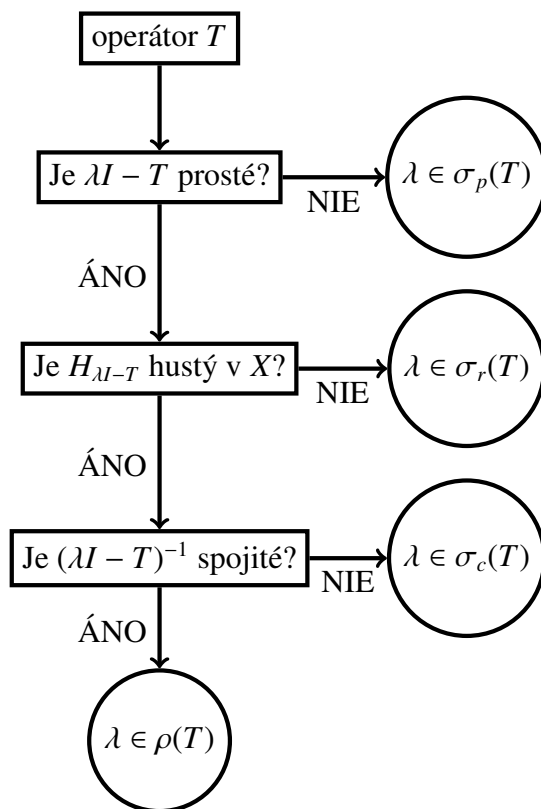
Povieme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ patrí do **rezolventnej množiny** (doplnok k spektru) $\rho(T)$, ak je $\lambda I - T$ prosté, $H_{\lambda I - T}$ je hustý v X a $(\lambda I - T)^{-1}$ je spojitý. Ďalej $\lambda \in \mathbb{C}$ patrí do **spektra** $\sigma(T)$, ak nepatrí do rezolventnej množiny.

Keď že existuje viacero možných príčin, pre ktoré sa λ nedostane do rezolventnej množiny, musíme spektrum rozdeliť.

Definícia 8.6.16.

- **bodové spektrum** (vlastné čísla) $\sigma_p(T)$ je množina $\lambda \in \mathbb{C}$, pre ktoré $\lambda I - T$ nie je prosté;
- **spojité spektrum** $\sigma_c(T)$ je množina $\lambda \in \mathbb{C}$, pre ktoré $\lambda I - T$ je prosté, $H_{\lambda I - T}$ je hustý v X , ale $(\lambda I - T)^{-1}$ nie je spojitý;
- **residuálne (zbytkové) spektrum** $\sigma_r(T)$ je množina $\lambda \in \mathbb{C}$, pre ktoré $\lambda I - T$ je prosté, ale $H_{\lambda I - T}$ nie je hustý v X .

Zrejme $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$. Existuje aj podrobnejšie členenie spektra (napr.



Obr. 8.2: Algoritmus na zistenie spektra.

existuje diskrétna a esenciálne spektrum, aproximatívne bodové spektrum a pod.). Spektrum $\sigma(T)$ je uzavretá množina v \mathbb{C} a ρ je teda otvorená.

Príklad 8.6.17.

Nech $\dim X$ je konečná, potom platí $\dim X = \dim \mathcal{N}(\lambda I - T) + H_{\lambda I - T}$ a $\lambda I - T$ je prostá práve vtedy, keď $\dim \mathcal{N}(\lambda I - T) = 0$. Teda $\sigma_r(T) = \emptyset$. Navyše z prostosti máme existenciu inverzie a aj jej spojitost' (konečná dimenzia). Teda aj $\sigma_c(T) = \emptyset$.

Veta 8.6.18.

- Spektrum $\sigma(T)$ je uzavretá množina v \mathbb{C} . (ρ je teda otvorená)
- Ak je T navyše spojitý, potom $\sigma(T) \neq \emptyset$ je kompaktný a leží v kruhu $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|T\|\}$.
- Pre tzv. spektrálny polomer $r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T\|$ a ak X je Hilbertov priestor a T je normálne, tak $r(T) = \|T\|$.

Veta 8.6.19.

- Reziduálne spektrum $\sigma_r(T)$ normálneho operátora T je \emptyset .
- Pre samoadjungovaný operátor platí $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|] \subset \mathbb{R}$ a $\sigma_r(T) = \emptyset$. Navyše, vlastné vektory tvoria ortogonálny systém (separovateľnosť implikuje spočítateľnosť).
- Pre pozitívny operátor platí $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.
- Pre unitárny operátor platí $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Ďalšia dôležitá trieda operátorov sú **kompaktné** operátory, t.j. také, pre ktoré platí, že pre každú ohraničenú postupnosť $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v X , postupnosť $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obsahuje konvergentnú podpostupnosť.

Veta 8.6.20 (Spektrálny rozklad).

Nech T je kompaktný normálny operátor na Hilbertovom priestore. Potom existuje ortonormálna báza vlastných vektorov $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a postupnosť zodpovedajúcich vlastných hodnôt $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tak, že ak $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n$ je Fourierov rozvoj prvku x , tak $T(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$.

8.6.21. Ďalšie vlastnosti operátorov

Definícia 8.6.22.

Samoadjungovaný operátor $T : H \rightarrow H$ je **zdola ohraničený**, ak existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $\langle Tx, x \rangle \geq c\|x\|^2 \quad \forall x \in D_T$. Ak $c > 0$, potom T je **koercívny** a ak $c = 0$ potom T nazveme **pozitívny**.

Koercivita (ako aj ostatné vlastnosti operátorov) môže byť zavedená aj na priestoroch s normou. My si však vystačíme v priestoroch so skalárnym súčinom. Tam platí, že samoadjungovaný operátor T je koercívny práve vtedy keď $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\langle Tx, x \rangle}{\|x\|^2} = \infty$. Napríklad funkcia $f(x) = \sqrt{|x|}$ je koercívna na \mathbb{R} , keď že $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|\sqrt{|x|}|^2}{|x|} = \infty$.

Problém 8.6.23.

Zrejme koercivita implikuje pozitivitu. Ukážte, že na $H = \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$ operátor $(Tf)(x) = |x|f(x)$ je pozitívny, ale nie je koercívny.

Príklad 8.6.24.

Majme (spojitý lineárny) operátor $A : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ definovaný ako $A\mathbf{x} = (0, 0, x_3, x_4, \dots)$. Zrejme $\forall \mathbf{x} \in \ell^2 : \sum_{n=3}^{\infty} x_n^2 = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle$ a navyše $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$.

Problém 8.6.25.

Rozmyslite si, že ako definovať koercivitu pre normy, hint: $\|Tx\| \cdot \|x\| = \langle Tx, x \rangle \quad \forall x \in D_T$.

Koercivita je často jednou z podmienok, ktoré spolu zaručujú existenciu riešenia abstraktnej operátorovej rovnice $Tx = y$.

Problém 8.6.26.

- Zrejme $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ je pozitívny operátor.
- Operátor $A : \ell^2 \rightarrow \ell^2$, $A\mathbf{x} = (0, 0, x_3, x_4, \dots)$ je pozitívny.

Majme abstraktnú Cauchyho úlohu

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U = TU \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

a zvol' me priestor $(H, \|\cdot\|_H)$ tak, aby bola energia systému bola $E(t) = \|U(t)\|_H^2 = \langle U(t), U(t) \rangle_H$.

Potom

$$\frac{d}{dt}E(t) = \left\langle \frac{d}{dt}U(t), U(t) \right\rangle_H + \left\langle U(t), \frac{d}{dt}U(t) \right\rangle_H = 2\operatorname{Re}(\langle TU(t), U(t) \rangle_H).$$

Definícia 8.6.27.

Operátor $T : H \rightarrow H$ nazveme **disipatívny**^a, ak $\operatorname{Re}\langle Tx, x \rangle \leq 0 \quad \forall x \in D_T$.

^aOperátor T je **akretívny**, ak $-T$ je disipatívny.

Ak je operátor disipatívny znamená to, že energia systému je nerastúca v čase (Disipácia (z lat. dissipatio, rozptyľovanie) označuje nevratnú zmenu energie na inú.). Mieru disipácie možno označiť ako podiel stratenej energie na celkovej energii (je to teda účinnosť využitia energie). Príklad je šírenie tepla prúdením.

Príklad 8.6.28.

Majme $H = \mathcal{L}^2(0, 1)$ a $Au = u'$ tak, že $D_A = \{f \in \mathcal{L}^2(0, 1) : f' \in \mathcal{L}^2(0, 1), f(1) = 0\}$.

Potom per-partes dáva

$$\langle Au, u \rangle = \int_0^1 u(x)u'(x) dx = -\frac{1}{2}u(0)^2 \leq 0.$$

(POZOR tento operátor nie je vo všeobecnosti samoadjungovaný).

8.6.29. Laplaceova transformácia

Laplaceova transformácia (LT) je v istom zmysle modifikáciou FT, a preto podobnosť rôznych vzorčekov pre obe transformácie nie je náhodná. Základný rozdiel je v definičnom obore funkcií, na ktoré ich aplikujeme. U LT je to napríklad interval $[0, \infty)$ v prípade funkcií jednej premennej (na intervale $(-\infty, 0)$ si ju môžeme dodefinovať 0). To umožňuje definovať ju aj pre funkcie, ktoré nie sú z $\mathcal{L}^1(0, \infty)$, stačí iba aby nerástli pre $t \rightarrow \infty$ rýchlejšie ako nejaká exponenciálna funkcia $e^{\gamma t}$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Navyše je možno definovať aj pre komplexné hodnoty parametra p v nejakej polrovine $\Re(p) > c$, $c \in \mathbb{R}$ (na rozdiel od reálnej premennej ξ u FT).

Definícia 8.6.30.

Množina \mathcal{L}_+^1 obsahuje všetky komplexné funkcie f jednej reálnej premennej s vlastnosťami:

1. f je definovaná s.v. na $[0, \infty)$
2. $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$, $[a, b] \subset [0, \infty)$
3. existuje $c_f \in \mathbb{R}$: $f e^{-c_f t} \in \mathcal{L}([0, \infty))$

Poznámka 8.6.31.

Je zrejmé, že ak je pre $f \in \mathcal{L}_+^1$ c_f také, že $f e^{-c_f t} \in \mathcal{L}([0, \infty))$, potom pre každé $c > c_f$ je aj $f e^{-c t} \in \mathcal{L}([0, \infty))$. Dá sa dokonca ukázať, že existuje také $c_f^* \in [-\infty, \infty)$, že $f e^{-c_f t} \notin \mathcal{L}([0, \infty))$ pre $c < c_f^*$ a $f e^{-c_f t} \in \mathcal{L}([0, \infty))$ pre $c > c_f^*$. My ale nepotrebujeme nájsť také najmenšie možné c_f^* .

Definícia 8.6.32.

Pre $f \in \mathcal{L}_+^1$ definujeme jej **Laplaceovu transformáciu** predpisom

$$(\mathcal{L}f)(p) := \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad p \in \mathbb{C}, \quad \Re(p) \geq c_f,$$

kde c_f je z definície množiny \mathcal{L}_+^1 .

Príklad 8.6.33.

1. $(\mathcal{L}1)(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p}, \quad \Re(p) > 0$
2. $(\mathcal{L}e^{\alpha t})(p) = \int_0^{\infty} e^{(\alpha-p)t} dt = \left[\frac{e^{(\alpha-p)t}}{\alpha-p} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha}, \quad \Re(p) > \Re(\alpha)$
3. $(\mathcal{L}t^\nu)(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^\nu dt = \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^\nu p^{-\nu-1} d\tau = \frac{1}{p-\alpha} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}, \quad \Re(p) > 0$

Veta 8.6.34 (Základné vlastnosti LT).

Pre $f, \tilde{f} \in \mathcal{L}_+^1$

- 1) $\mathcal{L}f$ je spojitá a ohraničená v polrovine $\Re(p) \geq c_f$
- 2) $(\mathcal{L}f)(p) \rightarrow 0$ pre $\Re(p) \rightarrow +\infty$, aj pre $\Im(p) \rightarrow \pm\infty$ pri každom pevnom $\Re(p) \geq c_f$

3) Je to lineárny operátor.

4) $[\mathcal{L}f(\alpha t)](p) = \frac{1}{\alpha}[\mathcal{L}f(t)](\frac{p}{\alpha})$, $\alpha > 0$, $\Re(p) \geq c_f$

5) $(\mathcal{L}f_\tau)(p) = e^{-p\tau}(\mathcal{L}f)(p)$, pre $\Re(p) \geq c_f$, $\tau > 0$, $f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ f(t - \tau), & t \geq \tau. \end{cases}$

6) $[\mathcal{L}(e^{\sigma t} f(t))](p) = (\mathcal{L}f)(p - \sigma)$, $\Re(p) \geq c_f + \Re(\sigma)$

7) Ak $f \in C^k(\mathbb{R}_0^+)$, $f^{(j)} \in \mathcal{L}_+^1$, $j = 1, 2, \dots, k$, potom pre $n = 1, 2, \dots, k$ platí

$$[\mathcal{L}(f^{(n)})](p) = p^n(\mathcal{L}f)(p) - \sum_{j=0}^{n-1} p^j f^{(n-j-1)}(0^+), \quad \Re(p) \geq c,$$

kde c je najväčšia z konštánt odpovedajúcich deriváciám funkcie f

8) $\mathcal{L}f$ je holomorfná v polrovine $\Re(p) \geq c_f$ a platí

$$\frac{d^n}{dp^n} (\mathcal{L}f)(p) = [\mathcal{L}((-1)^n f)](p), \quad n \in \mathbb{N}.$$

9) Ak $f * \tilde{f}$ existuje s.v. pre t , potom $f * \tilde{f} \in \mathcal{L}_+^1$ a platí

$$[\mathcal{L}(f * \tilde{f})](p) = (\mathcal{L}f)(p) (\mathcal{L}\tilde{f})(p), \quad \Re(p) \geq \max\{c_f, c_{\tilde{f}}\}.$$