Jozef Kiseľák

Sada úloh na precvičenie I.-II.
27/02/2020

A. Ktoré z nasledujúcich Cauchyho úloh majú riešenie na I ?

1. $|\dot{y}|+1=0,\ y(0)=0,\ I=[0,1]$
2. $\dot{y}=1+y^2,\ y(0)=0,\ I=[0,\pi)$
3. $\dot{x}=-y(x^2+y^2),\ x(0)=1$
   $\dot{y}=x(x^2+y^2),\ y(0)=1,\ I=[0,10]$
4. $x\dot{y}=1,\ y(0)=0,\ I=[0,1]$
5. $\dot{x}=2-xy-y^2,\ x(0)=-1$
   $\dot{y}=2-x^2-xy,\ y(0)=1,\ I=[0,\delta]$[a]
6. $\dot{y}=\sqrt{|y|},\ y(0)=0,\ I=[0,10]$

[a]

[a] Pre nejaké $0<\delta<<1$.

B. Nech $f(x)=\begin{cases}0, & \text{ak } x\neq 0\\ 1, & \text{ak } x=0\end{cases}$**, ukážte, že úloha** $\dot{x}=f(x),\ x(0)=0$ **nemá riešenie na žiadnom intervale** $[-\delta,\delta],\ \delta>0$.

C. Ukážte, že úloha $\dot{y}=\frac{2y-2}{t},\ x(0)=C$ **má nekonečne veľa riešení ak** $C=1$ **a nemá riešenie ak** $C\neq 1$**.**

D. Ktoré z nasledujúcich Cauchyho úloh majú jediné riešenie (lokálne)?

1. $\dot{y}=(1+y)^{\frac{3}{2}},\ y(0)\geq 0$
2. $\dot{y}=\begin{cases}y^{\frac{3}{2}}\sin\frac{1}{y}, & \text{ak } y\neq 0\\ 0, & \text{inak}\end{cases},\ y(0)\geq 0$
3. $\dot{y}=\frac{1}{1+|y|},\ y(0)=y_0\in\mathbb{R}$
4. $\dot{x}=y+\sqrt{t},\ x(0)\geq 0$
   $\dot{y}=t(1-|x|)y-x,\ y(0)\geq 0$
5. $\dot{y}=\sqrt{y}+y^{\frac{3}{2}},\ y(0)\geq 0$
6. $\ddot{y}=\sqrt{y-1}(1+y)^2,\ y(0)\geq 1$
7. $\dot{y}=\begin{cases}e^{x-y}, & \text{ak } y>0\\ e^{x}, & \text{inak}\end{cases},\ y(0)=0$
8. $\dot{x}=\sqrt{x-y},\ x(0)\geq 0$
   $\dot{y}=t^2+tx,\ y(0)\geq 0$

E. Ktoré z nasledujúcich Cauchyho úloh majú globálne riešenie (predĺžiteľné riešenie na $[t_0, \infty)$) ?

1. $\dot{y} = -y^4, \;\; y(1) = 1$
2. $\dot{x} = -x, \;\; x(0) \in \mathbb{R}$
   $\dot{y} = 2y + x^2, \;\; y(0) \in \mathbb{R}$
3. $\dot{x} = -y + x(1 - x^2 + y^2), \;\; x(0) \in \mathbb{R}$
   $\dot{y} = x + y(1 - x^2 + y^2), \;\; y(0) \in \mathbb{R}$
4. $\dot{y} = \arctan y + t, \;\; y(0) \geq 0$
5. $\dot{x} =, \;\; x(0) = 1$
6. $\dot{y} = ay^3 + bz, \;\; y(0) \in \mathbb{R}$
   $\dot{z} = cz^5 - by, \;\; z(0) \in \mathbb{R}$
   $a < 0, \; c < 0, \; b \in \mathbb{R}$

F. Zistite, ktoré zobrazenia sú kontrakciami.

1. $T : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \; x \mapsto \sqrt{x}$
2. $T : [0,1] \to [0,1], \; x \mapsto x^2 - x + 1$
3. $T : [0, \frac{1}{3}] \to [0, \frac{1}{3}], \; x \mapsto x^2$
4. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x + \frac{e^x}{1+e^x}$
5. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \cos(\cos x)$
6. $T : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \; x \mapsto e^{-x} + x$
7. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \sin(\sin x)$
8. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto |x| + \frac{1}{1+|x|}$
9. $T : (0,1) \to (0,1), \; x \mapsto x^n, \; n \in \mathbb{N}$
10. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; (a-1)^2 + c^2 \neq 0,$
    $(x_1, x_2) \mapsto (ax_1 - cx_2, cx_1 + ax_2)$
11. $T(\mathbf{x}) = (2 + \alpha \sin x_1, \alpha \cos x_2), \; |\alpha| < 1$

G. Nech $x_0 > 0$, zistite, či postupnosť $\{x_n\} : \; x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ konverguje v $\mathbb{R}$. (Banachova veta)

H. Určte podmienky matice A, tak aby $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \;\; T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ bolo kontraktívne zobrazenie, ak

1. $d_\infty(x,y) = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$
2. $d_2(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$
3. $d_1(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$

je príslušná metrika v $\mathbb{R}^n$.

I. Pomocou Banachovej vety zistite, či rovnice majú jediné riešenie.

(a) $5x^3 - 20x = -3$ na $[0,1]$

(b) $x = \frac{1}{9}\sin(3x) + \sqrt{x}$ pre $x \geqslant \frac{8}{9}$

(c) $x^2 + 4xy = 1,\ x^2 + 3y^2 = 9$ na $[0,1] \times [1,2]$

(d) $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(1 + f(x)^2\right) + \sin(\ln(x+2))$ na $C([-1,1])$

(e) $f(x) = \frac{x}{2}\sin f(x) + \sin\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right) + 1$ na $C\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)$

(f) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}f(3x) + \frac{1}{2}, & 0 \le x \le 1/3 \\ g(x), & 1/3 < t \le 2/3 \\ \frac{1}{2}f(3x-2) - \frac{1}{2}, & 2/3 < x \le 1 \end{cases}$ na $C([0,1])$, pričom graf g je úsečka spájajúca body $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{2}\right)$

(g) $f(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-sx}\cos(\alpha f(s))\,\mathrm{d}s,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le \alpha \le 1$ na $C([0,1])$

(h) $f(u) = 1 + \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{f(v)\,\mathrm{d}v}{(u-v)^2+1},\ 0 < a < \infty$ na $C([-a,a])$

(i) $f(x) = \frac{3}{(b^3-a^3)}\int_a^x t^3 f(t)\,\mathrm{d}t,\ 0 < a < b$ na $C([a,b])$

(j) $u(x) = f(x) + \lambda\int_X K(x,y)u(y)dy$ na $\mathcal{L}^2(X)$, X je ohraničená, otvorená v $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{L}^2(X)$, $K \in \mathcal{L}^2(X \times X)$

J. Stanovte prvé 3 členy Picardovej aproximácie riešenia DR

(a) $y' = x - y^2,\ y(0) = 0$

(b) $y' = y^2 - 3x^2 - 1,\ y(0) = 1$

(c) $y' = x^3 - y^3,\ y(1) = 1$

(d) $y' = x^2 + xy^2,\ y(0) = y(t_0) = 0$

(e) $y_1' = y_2y_3, y_2' = -y_1y_3, y_3' = y_1y_2,$
$\mathbf{y}(0) = (0,1,0)$

K.

Systémy diferenciálnych rovníc

1. Nájdite lineárny homogénny diferenciálny systém, ak je daný jeho fundamentálny systém riešení (udajte aj nejaký interval I, na ktorom daný systém existuje !).

a) $Y_1 = (\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^x)$, $Y_2 = \left(3\mathrm{e}^{-x}, 5\mathrm{e}^{-x}\right)$ ... $y_1' = 4y_1 - 3y_2$, $y_2' = 5y_1 - 4y_2$

b) $Y_1 = (1, -x)$, $Y_2 = (x, 1)$ ... $y_1' = \dfrac{x}{1+x^2}y_1 + \dfrac{1}{1+x^2}y_2$, $y_2' = -\dfrac{1}{1+x^2}y_1 + \dfrac{x}{1+x^2}y_2$

c) $Y_1 = (\cos 2x, -\sin 2x)$, $Y_2 = (\sin 2x, \cos 2x)$ ... $y_1' = 2y_2$, $y_2' = -2y_1$

d) $Y_1 = \left(1+x^2, x\right)$, $Y_2 = \left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{2}{1+x^2}\right)$ ... $y_1' = \dfrac{1+5x^2}{x(1+x^2)}y_1 - \dfrac{1+3x^2}{x^2}y_2$, $y_2' = \dfrac{2+6x^2}{(1+x^2)^2}y_1 - \dfrac{1+5x^2}{x(1+x^2})y_2$

e) $Y_1 = (3, 1, 2)$, $Y_2 = (4\sin x + 9\cos x, \sin x + 3\cos x, 2\sin x + 7\cos x)$, $Y_3 = (9\sin x - 4\cos x, 3\sin x - \cos x, 7\sin x - 2\cos x)$ ... $y_1' = -9y_1 + 19y_2 + 4y_3$, $y_2' = -3y_1 + 7y_2 + y_3$, $y_3' = -7y_1 + 17y_2 + 2y_3$

2. Nájdite všeobecné riešenie lineárnych homogénnych diferenciálnych systémov (**bez použitia eliminačnej metódy !**).

a) $y_1' = -y_2$, $y_2' = y_1 + 2y_2$ ... $y_1 = c_1\mathrm{e}^x + c_2 x\mathrm{e}^x$, $y_2 = -c_1\mathrm{e}^x - c_2(x+1)\mathrm{e}^x$

b) $y_1' = y_1 + y_2$, $y_2' = -5y_1 - y_2$ ... $y_1 = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$, $y_2 = (-c_1 + 2c_2)\cos 2x - (2c_1 + c_2)\sin 2x$

c) $y_1' = 2y_1 + y_2$, $y_2' = 3y_1 + 4y_2$ ... $y_1 = c_1\mathrm{e}^{5x} + c_2\mathrm{e}^x$, $y_2 = 3c_1\mathrm{e}^{5x} - c_2\mathrm{e}^x$

d) $y_1' = -5y_1 + 2y_2$, $y_2' = y_1 - 6y_2$ ... $y_1 = 2c_1\mathrm{e}^{-4x} - c_2\mathrm{e}^{-7x}$, $y_2 = c_1\mathrm{e}^{-4x} + c_2\mathrm{e}^{-7x}$

e) $y_1' = 2y_1 - y_2$, $y_2' = y_1 + 2y_2$ ... $y_1 = \mathrm{e}^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$, $y_2 = \mathrm{e}^{2x}(c_1\sin x - c_2\cos x)$

f) $y_1' = 3y_1 - y_2$, $y_2' = y_1 + y_2$ ... $y_1 = \mathrm{e}^{2x}(c_1 + c_2 x)$, $y_2 = \mathrm{e}^{2x}(c_1 - c_2 + c_2 x)$

g) $y_1' = -3y_1 + y_2$, $y_2' = -y_1 - y_2$ ... $y_1 = c_1\mathrm{e}^{-2x} + c_2\mathrm{e}^{-2x}(x-1)$, $y_2 = c_1\mathrm{e}^{-2x} + c_2 x\mathrm{e}^{-2x}$

h) $y_1' = y_1 - 2y_2$, $y_2' = 2y_1 + y_2$ ... $y_1 = c_1\mathrm{e}^x\cos 2x + c_2\mathrm{e}^x\sin 2x$, $y_2 = c_1\mathrm{e}^x\sin 2x - c_2\mathrm{e}^x\cos 2x$

i) $y_1' = 2y_1 + 4y_2$, $y_2' = y_1 - y_2$ ... $y_1 = 4c_1\mathrm{e}^{3x} - c_2\mathrm{e}^{-2x}$, $y_2 = c_1\mathrm{e}^{3x} + c_2\mathrm{e}^{-2x}$

j) $y_1' = 2y_1 + y_2$ ... $y_1 = c_1 e^{2x} - c_2 e^{3x} \cos x - c_3 e^{3x} \sin x$
$y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3$ $\quad y_2 = c_2 e^{3x}(\sin x - \cos x) - c_3 e^{3x}(\sin x + \cos x)$
$y_3' = -y_1 + 2y_2 + 3y_3$ $\quad y_3 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}(-2\cos x - \sin x) + c_3 e^{3x}(-2\sin x + \cos x)$

k) $y_1' = y_2$ ... $y_1 = c_1 + e^x(2c_2 - c_3 + 2c_3 x)$
$y_2' = 4y_1 + 3y_2 - 4y_3$ $\quad y_2 = e^x(2c_2 + c_3 + 2c_3 x)$
$y_3' = y_1 + 2y_2 - y_3$ $\quad y_3 = c_1 + e^x(3c_2 - c_3 + 3c_3 x)$

l) $y_1' = -y_1 + y_2$ ... $y_1 = 4c_1 + c_2 e^{-3x} + c_3(x+1)e^{-3x}$
$y_2' = -y_2 + 4y_3$ $\quad y_2 = 4c_1 - 2c_2 e^{-3x} + c_3(-2x-1)e^{-3x}$
$y_3' = -4y_3 + y_1$ $\quad y_3 = c_1 + c_2 e^{-3x} + c_3 x e^{-3x}$

m) $y_1' = 6y_1 - 12y_2 - y_3$ ... $y_1 = 8c_1 e^x + 7c_2 e^{2x} + 3c_3 e^{3x}$
$y_2' = y_1 - 3y_2 - y_3$ $\quad y_2 = 4c_1 e^x + 3c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$
$y_3' = -4y_1 + 12y_2 + 3y_3$ $\quad y_3 = -8c_1 e^x - 8c_2 e^{2x} - 3c_3 e^{3x}$

n) $y_1' = 2y_1 + y_2 - 2y_3$ ... $y_1 = c_1 e^x + c_2 \sin x - c_3 \cos x$
$y_2' = -y_1$ $\quad y_2 = -c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x$
$y_3' = y_1 + y_2 - y_3$ $\quad y_3 = c_2 \sin x - c_3 \cos x$

3. Nájdite partikulárne riešenie lineárnych homogénnych diferenciálnych systémov, ktoré vyhovuje daným počiatočným podmienkam (**bez použitia eliminačnej metódy !**).

a) $y_1' = -3y_1 - y_2$ ... $y_1 = (1-2x)e^{-2x}$
$y_2' = y_1 - y_2$ $\quad y_2 = (2x+1)e^{-2x}$
$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 1$

b) $y_1' = 2y_1 + y_2$ ... $y_1 = 2e^{3x} - e^x$
$y_2' = y_1 + 2y_2$ $\quad y_2 = 2e^{3x} + e^x$
$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 3$

c) $y_1' = 2y_1 - 3y_2$ ... $y_1 = e^{2x}(\cos 3x + \sin 3x)$
$y_2' = 3y_1 + 2y_2$ $\quad y_2 = e^{2x}(\sin 3x - \cos 3x)$
$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = -1$

d) $y_1' = y_2 + y_3$ ... $y_1 = 0$
$y_2' = y_1 + y_3$ $\quad y_2 = -e^{-x}$
$y_3' = y_1 + y_2$ $\quad y_2 = e^{-x}$
$y_1(0) = 0,\ y_2(0) = -1,\ y_3(0) = 1$

4. Nájdite všeobecné riešenie lineárnych nehomogénnych diferenciálnych systémov (**bez použitia eliminačnej metódy !**).

a) $y_1' = 2y_2 - y_1$ ... $y_1 = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} - e^x \ln(e^{2x}+1) + 2e^{2x} \operatorname{arctg} e^x$
$y_2' = 4y_2 - 3y_1 + \dfrac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$ $\quad y_2 = c_1 e^x + 3c_2 e^{2x} - e^x \ln(e^{2x}+1) + 3e^{2x} \operatorname{arctg} e^x$

b) $y_1' = y_1 - 4y_2$ ... $y_1 = 2c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x}(2x+1) - 2e^{-x} - 4xe^{-x} - 4x^2 e^{-x}$
$y_2' = y_1 - 3y_2 + 2e^{-x}$ $\quad y_2 = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - 2x^2 e^{-x}$

c) $y_1' = -4y_1 - 2y_2 + \dfrac{2}{e^x - 1}$ na intervale $I = (0, \infty)$ ... $y_1 = c_1 + 2c_2 e^{-x} + 2e^{-x}\ln(e^x - 1)$

$y_2' = 6y_1 + 3y_2 - \dfrac{3}{e^x - 1}$ $\quad y_2 = -2c_1 - 3c_2 e^{-x} - 3e^{-x}\ln(e^x - 1)$

d) $y_1' = 4y_1 - y_2 - 5x + 1$ ... $y_1 = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + x$

$y_2' = y_1 + 2y_2 + x - 1$ $\quad y_2 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{3x}(x - 1) - x$

e) $y_1' = 2y_1 - y_2$ ... $y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + e^x(2\cos x - \sin x)$

$y_2' = -y_1 + 2y_2 - 5e^x \sin x$ $\quad y_2 = c_1 e^x - c_2 e^{3x} + e^x(3\cos x + \sin x)$

f) $y_1' = y_2 + \sin x$ ... $y_1 = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \sin x$

$y_2' = -y_1 + \cos x$ $\quad y_2 = -c_1 \sin x + c_2 \cos x + x \cos x$

g) $y_1' = -y_1 + 5y_2$ ... $y_1 = c_1(\cos 2x + 2\sin 2x) + c_2(2\cos 2x - \sin 2x) + 10x$

$y_2' = -y_1 + y_2 + 8x$ $\quad y_2 = c_1 \cos 2x - c_2 \sin 2x + 2x + 2$

h) $y_1' = 2y_1 + 3y_2 + 8e^x$ ... $y_1 = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} + e^x - 3x + \dfrac{12}{5}$

$y_2' = 3y_1 + 2y_2 + 5x$ $\quad y_2 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} - 3e^x + 2x - \dfrac{13}{5}$

i) $y_1' = y_2 + x^2$ ... $y_1 = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + (x - 0,5)e^x - 2x$

$y_2' = y_1 + 2e^x$ $\quad y_2 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + xe^x + 0,5e^x - x^2 - 1$

j) $y_1' = 2y_1 + 4y_2 + \cos x$ ... $y_1 = c_1(1 + 2x) - 2c_2 - 2\cos x - 3\sin x$

$y_2' = -y_1 - 2y_2 + \sin x$ $\quad y_2 = -c_1 x + c_2 + 2\sin x$

k) $y_1' = -y_2 + \operatorname{tg} x$ na intervale $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ... $y_1 = -c_1 \sin x + c_2 \cos x + 2$

$y_2' = y_1 + \operatorname{tg}^2 x - 1$ $\quad y_2 = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \operatorname{tg} x$

5. Nájdite partikulárne riešenie lineárnych nehomogénnych diferenciálnych systémov, ktoré vyhovuje daným počiatočným podmienkam (**bez použitia eliminačnej metódy !**).

a) $y_1' = y_1 + y_2 - \cos x$ ... $y_1 = (1 - x)\cos x - \sin x$

$y_2' = -2y_1 - y_2 + \sin x + \cos x$ $\quad y_2 = (x - 2)\cos x + x \sin x$

$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = -2$

b) $y_1' = -y_1 - 2y_2 + 2e^{-x}$ ... $y_1 = e^x + 2e^{2x} - 2e^{-x}$

$y_2' = 3y_1 + 4y_2 + e^{-x}$ $\quad y_2 = -e^{-x} - 3e^{2x} + e^{-x}$

$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = -3$

6. Nájdite všeobecné riešenie lineárneho nehomogénneho diferenciálneho systému na intervale I, ak poznáte fundamentálny systém riešení príslušného homogénneho diferenciálneho systému.

a) $y_1' = \dfrac{3}{x}y_1 - \dfrac{2}{x}y_2 + \dfrac{2e^x - 3}{x}$ na intervale $I = (0, \infty)$ ... $y_1 = c_1 x + \dfrac{c_2}{2x} + 1$

$y_2' = \dfrac{4}{x}y_1 - \dfrac{3}{x}y_2 + \dfrac{3e^x - 4 + xe^x}{x}$ $\quad y_2 = c_1 x + \dfrac{c_2}{x} + e^x$

FSR príslušného homogénneho DS: $Y_1 = (x, x)$, $Y_2 = \left(\dfrac{1}{2x}, \dfrac{1}{x}\right)$

b) $y_1' = \dfrac{1}{2x}y_1 - \dfrac{1}{2x^2}y_2 + x^2$ na intervale $I = (0, \infty)$ ... $y_1 = c_1 - c_2 x + \dfrac{5}{12}x^3 - \dfrac{5}{2}x + \dfrac{5}{2}x\ln x$

$y_2' = -\dfrac{1}{2}y_1 + \dfrac{3}{2x}y_2 - 5x$ $\qquad y_2 = c_1 x + c_2 x^2 - \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{5}{2}x^2 - \dfrac{5}{2}x^2\ln x$

FSR príslušného homogénneho DS: $Y_1 = (1, x)$, $Y_2 = (-x, x^2)$

c) $y_1' = \dfrac{e^{-x} + xe^x}{x(e^x + e^{-x})}y_1 + \dfrac{e^x(x-1)}{x(e^x + e^{-x})}y_2 + e^x$ na $I = (0, \infty)$ ... $y_1 = c_1 x + c_2 e^x + xe^x$

$y_2' = -\dfrac{e^{-x}(x+1)}{x(e^x + e^{-x})}y_1 + \dfrac{e^x - xe^{-x}}{x(e^x + e^{-x})}y_2 + e^{-x}$ $\qquad y_2 = -c_1 x + c_2 e^{-x} + xe^{-x}$

FSR príslušného homogénneho DS: $Y_1 = (x, -x)$, $Y_2 = (e^x, e^{-x})$

7. **Eliminačnou metódou** nájdite všeobecné riešenie lineárnych diferenciálnych systémov.

a) $y_1' = 2y_1 + 4y_2 + \cos x$ ... $y_1 = -2c_1 + c_2(-2x - 1) - 2\cos x - 3\sin x$
$y_2' = -y_1 - 2y_2 + \sin x$ $\qquad y_2 = c_1 + c_2 x + 2\sin x$

b) $y_1' = y_1 - 2y_2$ ... $y_1 = -2c_1 e^{2x} - c_2 e^{3x}$
$y_2' = y_1 + 4y_2$ $\qquad y_2 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

c) $y_1' = -7y_1 + y_2$ ... $y_1 = c_1 e^{-6x}\cos x + c_2 e^{-6x}\sin x$
$y_2' = -2y_1 - 5y_2$ $\qquad y_2 = (c_1 + c_2)e^{-6x}\cos x + (c_2 - c_1)e^{-6x}\sin x$

d) $y_1' = 3y_1 - 2y_2$ ... $y_1 = c_1 e^x + c_2 xe^x$
$y_2' = 2y_1 - y_2$ $\qquad y_2 = c_1 e^x + c_2(x - 0,5)e^x$

e) $y_1' = 2y_1 + y_2 + 2e^x$ ... $y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + xe^x - e^{4x}$
$y_2' = y_1 + 2y_2 - 3e^{4x}$ $\qquad y_2 = -c_1 e^x + c_2 e^{3x} - e^x(x+1) - 2e^{4x}$

f) $y_1' = 2y_1 - 3y_2 + x$ ... $y_1 = 3c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 3x^2 - 2x - 7$
$y_2' = y_1 - 2y_2 - x^2$ $\qquad y_2 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 2x^2 + x - 4$

g) $y_1' = 4y_1 - y_2$ ... $y_1 = e^{2x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2)$
$y_2' = 3y_1 + y_2 - y_3$ $\qquad y_2 = e^{2x}(2c_1 + c_2(2x - 1) + c_3(2x^2 - 2x))$
$y_3' = y_1 + y_3$ $\qquad y_3 = e^{2x}(c_1 + c_2(x - 1) + c_3(x^2 - 2x + 2))$

h) $y_1' = \dfrac{3}{x}y_1 - \dfrac{2}{x}y_2$ na intervale $I = (0, \infty)$ ... $y_1 = c_1 x + c_2\dfrac{1}{2x}$

$y_2' = \dfrac{4}{x}y_1 - \dfrac{3}{x}y_2$ $\qquad y_2 = c_1 x + c_2\dfrac{1}{x}$

i) $y_1' = y_2$ na intervale $I = (0, \infty)$ ... $y_1 = c_1\cos\ln x + c_2\sin\ln x$

$y_2' = -\dfrac{1}{x^2}y_1 - \dfrac{1}{x}y_2$ $\qquad y_2 = -\dfrac{c_1\sin\ln x}{x} + \dfrac{c_2\cos\ln x}{x}$

j) $y_1' = y_1 - y_2$ ... $y_1 = c_1 e^x + c_2\cos x + c_3\sin x$
$y_2' = y_1 - y_3$ $\qquad y_2 = c_2(\cos x + \sin x) + c_3(\sin x - \cos x)$
$y_3' = y_1$ $\qquad y_3 = c_1 e^x + c_2\sin x - c_3\cos x$

8. Nájdite všeobecné riešenie lineárnych nehomogénnych diferenciálnych systémov na intervale I (**Návod:** všeobecné riešenie príslušného homogénneho diferenciálneho systému nájdite **elimi-**

načnou metódou a potom použite **metódu variácie konštánt** na nájdenie partikulárneho riešenia nehomogénneho diferenciálneho systému).

a) $y_1' = \dfrac{x}{x+1}y_1 - \dfrac{1}{x+1}y_2 + \dfrac{1}{x}$ na intervale $I = (0,\infty)$ ... $y_1 = c_1 + c_2\dfrac{1}{1+x} + \ln x$

$y_2' = (x+1)y_1 - y_2 + 1$ $\qquad$ $y_2 = c_1 x + c_2 + x\ln x$

b) $y_1' = -y_2 + 1$ na intervale $I = (0,\infty)$ ... $y_1 = c_1x^2 + c_2\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}$

$y_2' = -\dfrac{2}{x^2}y_1 + \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad$ $y_2 = -2c_1x + c_2\dfrac{1}{x^2} + 1$

10. Daný je systém rovníc vo vektorovom zápise $y' = f(t,y)$ vyhovujúci v každom bode $(t,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ podmienkam vety o lokálnej existencii a jednoznačnosti. Predpokladajme, že existuje $b > 0$ také, že všetky vektory y s veľkosťou väčšou než b vyhovujú nerovnosti

$$(y, f(t,y)) \le k(t)(y,y), \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $(\cdot,\cdot)$ označuje skalárny súčin v $\mathbb{R}^n$ a $k(\cdot)$ je spojitá reálna funkcia. Dokážte, že riešenie s ľubovoľnou počiatočnou podmienkou $y(t_0) = y_0$ existuje pre všetky $t \in [t_0, +\infty)$. (*)

11. Dokážte, že rovnica pohybu kyvadla $y'' + \sin y = 0$ má riešenie $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ktoré sa blíži k π, keď $t \to +\infty$. (**)

12. Riešte sústavy lineárnych homogénnych rovníc prvého rádu

1.	$x' = 2y - 3x$	$y' = y - 2x$	
2.	$x' = 5x + 3y$	$y' = -3x - y$	
3.	$x' = x + z - y$	$y' = x + y - z$	$z' = 2x - y$
4.	$x' = x - 2y - z$	$y' = y - x + z$	$z' = x - z$
5.	$x' = 2x - y + z$	$y' = x + 2y - z$	$z' = x - y + 2z$
6.	$x' = 3x - y + z$	$y' = x + y + z$	$z' = 4x - y + 4z$
7.	$x' = 4y - 2z - 3x$	$y' = z + x$	$z' = 6x - 6y + 5z$
8.	$x' = x - y - z$	$y' = x + y$	$z' = 3x + z$
9.	$x' = 2x + y$	$y' = x + 3y - z$	$z' = 2y + 3z - x$
10.	$x' = 2x + 2z - y$	$y' = x + 2z$	$z' = y - 2x - z$
11.	$x' = 4x - y - z$	$y' = x + 2y - z$	$z' = x - y + 2z$
12.	$x' = 2x - y - z$	$y' = 3x - 2y - 3z$	$z' = 2z - x + y$
13.	$x' = y - 2x - 2z$	$y' = x - 2y + 2z$	$z' = 3x - 3y + 5z$
14.	$x' = 3x - 2y - z$	$y' = 3x - 4y - 3z$	$z' = 2x - 4y$
15.	$x' = x - y + z$	$y' = x + y - z$	$z' = 2z - y$
16.	$x' = y - 2z - x$	$y' = 4x + y$	$z' = 2x + y - z$
17.	$x' = 2x + y$	$y' = 2y + 4z$	$z' = x - z$
18.	$x' = 2x - y - z$	$y' = 2x - y - 2z$	$z' = 2z - x + y$
19.	$x' = 4x - y$	$y' = 3x + y -$	$z' = x + z$

13. Riešte sústavy lineárnych homogénnych rovníc druhého rádu

1. $x'' = 2x - 3y$ $\quad y'' = x - 2y$
2. $x'' = 3x + 4y$ $\quad y'' = -x - y$
3. $x'' = 2y$ $\quad y'' = -2x$
4. $x'' = 3x - y - z$ $\quad y'' = -x + 3y - z$ $\quad z'' = -x - y + 3z$
5. $2x' - 5y' = 4y - x$ $\quad 3x' - 4y' = 2x - y$
6. $x'' + x' + y' - 2y = 0$ $\quad x' - y' + x = 0$
7. $x'' - 2y'' + y' + x - 3y = 0$ $\quad 4y'' - 2x'' - x' - 2x + 5y = 0$
8. $x'' - x + 2y'' - 2y = 0$ $\quad x' - x + y' + y = 0$

14. Riešte sústavy lineárnych nehomogénnych rovníc prvého rádu

1. $x' = 4x + y - e^{2t}$ $\quad y' = y - 2x$
2. $x' = 2y - x + 1$ $\quad y' = 3y - 2x$
3. $x' = x + 2y$ $\quad y' = x - 5\sin t$
4. $x' = x + 2y + 16te^t$ $\quad y' = 2x - 2y$
5. $x' = 4x - 3y + \sin t$ $\quad y' = 2x - y - 2\cos t$
6. $x' = 2x + y + 2e^t$ $\quad y' = x + 2y - 3e^{4t}$

15. Riešte sústavy lineárnych nehomogénnych rovníc metódou variácie konštánt

1. $x' = y + tg^2\, t - 1$ $\quad y' = -x + tg\, t$
2. $x' = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}$ $\quad y' = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}$
3. $x' = x - y + \dfrac{1}{\cos t}$ $\quad y' = 2x - y$

16. Daná je rovnica $y'' + ay' + by = f(t)$, pričom $|f(t)| \leq M$ pre všetky $t \in \mathbb{R}$, a korene charakteristickej rovnice $\lambda_1,\ \lambda_2$ spĺňajú $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Nájdite riešenie ohraničené na $\mathbb{R}$. Ukážte tiež, že všetky ostatné riešenia sa blížia k tomuto riešeniu pre $t \to +\infty$; a ak f je periodická funkcia ukážte, že toto ohraničené riešenie je tiež periodické. (*)

17. Uvažujme dva body A, B v polrovine s rozličnými vzdialenosťami od hranice polroviny-priamky p. Predpokladajme, že bodové teleso o hmotnosti m je priťahované k hranici polroviny silou o veľkosti mgh, kde h je vzdialenosť bodu od priamky p a g kladná konštanta, pričom táto sila má v každom bode polroviny konštantný smer kolmý na p. Vypočítajte najkratší možný čas, za ktorý teleso o hmotnosti m prejde z bodu A do bodu B. (***)