Jozef Kiseľák

Sada úloh na precvičenie III.
March 26, 2015

A. Nájdite prvý integrál a načrtnite fázový portrét sústavy dvoch diferenciálnych rovníc.

1. $x' = x + y^2, \quad y' = 2y$
2. $x' = x(x^2 + y^2), \quad y' = y(x^2 + y^2)$
3. $x' = y, \quad y' = x - x^3$
4. $x' = x^2 y, \quad y' = x(1 + y)$
5. $x' = -3x + 5y, \quad y' = -2x + 3y$
6. $x' = -x - y, \quad y' = x - y$

B. Nájdite aspoň dva nezávislé prvé integrály sústavy troch diferenciálnych rovníc.

1. $x' = y - z, \quad y' = z - x, \quad z' = x - y$
2. $x' = y + z, \quad y' = z + x, \quad z' = x + y$
3. $x' = y - x, \quad y' = y + z + x, \quad z' = x - y$
4. $x' = y(1 + z), \quad y' = -x(z + 1), \quad z' = -2xy$
5. $x' = y(z - 1), \quad y' = -x(1 + z), \quad z' = -2xy$
6. $x' = y + 2zy + y^2 + 2zy^2, \quad y' = -2x(1 + 2z), \quad z' = -2x(1 + 2y)$
7. $Ap' = (B - C)qr, \quad Bq' = (C - A)rp, \quad Cr' = (A - B)pq, \quad A \geq B \geq C > 0$
8. $x' = z^2 - y^2, \quad y' = z, \quad z' = -y$
9. $x' = xz, \quad y' = yz, \quad z' = xy\sqrt{z^2 + 1}$
10. $x' = x + z^2 + y^2, \quad y' = y, \quad z' = z$
11. $x' = x^3 + 3xy^2, \quad y' = 2y^3, \quad z' = 2y^2 z$
12. $x' = xy, \quad y' = -y\sqrt{1 - y^2}, \quad z' = z\sqrt{1 - y^2} - ax^2$

C1. Zistite, ktoré zo systémov sú gradientné/Hamiltonove a nájdite potenciál/Hamiltonián.

1. $\dot{x} = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$
   $\dot{y} = -2y\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$
2. $\dot{x} = y + x^2 y$
   $\dot{y} = -x + 2xy$
3. $\dot{x} = y$
   $\dot{y} = y^3$
4. $\dot{x} = y$
   $\dot{y} = -y - x^3$
5. $\dot{x} = \sin y$
   $\dot{y} = x\cos y$
6. $\dot{x} = y + 2xy$
   $\dot{y} = x + x^2 - y^2$
7. $\dot{x} = -x + 2y^3 - 2y^4$
   $\dot{y} = -x - y + xy$
8. $\dot{x} = 3x^2 - 1 - \mathrm{e}^{2y}$
   $\dot{y} = -2x\mathrm{e}^{2y}$

C2. Ukážte, že systém je Hamiltonov, nájdite Hamiltonián a načrtnite fázový portrét.

1. $x' = -3x + 5y, \quad y' = -2x + 3y$
2. $x' = y, \quad y' = -x^3 + x$
3. $x' = x^2 - 2xy, \quad y' = y^2 - 2xy$
4. $x' = x^2 y, \quad y' = -x(1 + y^2)$
5. $x' = 3y^2 - 3x, \quad y' = -3x^2 + 3y$
6. $x' = y + x^2 - y^2, \quad y' = -x - 2xy$
7. $x' = x\cos y, \quad y' = -\sin y$
8. $\omega' = \phi, \quad \phi' = -\frac{g}{l}\sin\omega, \quad g, l > 0$

D. Ukážte, že pre netlmenú Duffingovu rovnicu $x'' + x' + \beta x^3 = \gamma\cos\omega t$ existuje Hamiltonián.

[Hint: $H = H(x, x', t)$]

E. Ukážte, že je splnená nutná podmienka a nájdite Hamiltonián.

1. $x_1' = \sin x_2 + 2x_3x_4, \quad x_2' = 1, \quad x_3' = x_4^2 + 2x_3x_2, \quad x_4' = 1 - 2x_2x_4$
2. $q_1'' = -2q_1 + q_2, \quad q_2'' = q_1 - 2q_2$
3. $q_1'' = -\frac{q_1}{||\mathbf{q}||^3}, \quad q_2'' = -\frac{q_2}{||\mathbf{q}||^3}$
4. $x' = u, \quad y' = v, \quad u' = -Ax + 2xy, \quad v' = -By + \epsilon y^2 + x^2, \quad A, B, \epsilon \in \mathbb{R}, A, B > 0$
5. $q_1'' = -q_1(q_1^2 + aq_2^2), \quad q_2'' = -q_2(q_2^2 + aq_1^2), \ a \in \mathbb{R}$
6. $q_1'' = q_1 - q_1(q_1^2 + q_2^2), \quad q_2'' = q_2 - q_2(q_2^2 + q_1^2)$
7. $q_1'' = -\nu q_1 + aq_1^2, \quad q_2'' = -\nu q_2 - aq_2^2, \ a, \nu \in \mathbb{R}$

F. Vyšetrite stabilitu a načrtnite fázový portrét sústavy dvoch lineárnych diferenciálnych rovníc.

1. $x' = 3x + y, \quad y' = x + 3y$
2. $x' = -2x + 5y, \quad y' = -4x + 6y$
3. $x' = 3x + 5y, \quad y' = -2x - 2y$
4. $x' = 3x - 2y, \quad y' = 5x - 2y$
5. $x' = -x + y, \quad y' = x - y$
6. $x' = -x + 2y, \quad y' = x - 2y$

G. Nájdite riešenie systému

$$x' = tx + (1-t)y + \mathrm{e}^t, \quad y' = (1-t)x + ty - \mathrm{e}^t.$$

[Hint: Jedno riešenie homogénnej rovnice sa dá uhádnuť a druhé dopočítať pomocou Liouvilleovej formuly.]

H. Využite Routheove-Stodolove-Hurwitzove kritérium na určenie regiónu asymptotickej stability systémov.

1. $x' = px - y, \quad y' = x + py$
2. $x' = px - y, \quad y' = rx + py$
3. $x' = px - y, \quad y' = x + py, \quad z' = px + y + z$
4. $x' = -ax + y + bz, \quad y' = x - 2y + bz, \quad z' = -by + az$
5. $x''' + abx'' + ax' + bx = 0$
6. $x^{(4)} + 2ax''' + bx'' + 7x' + bx = 0$