Jozef Kiseľák

Sada úloh na precvičenie IV.
20. marec 2014

A. Nakreslite fázový portrét rovnice $\ddot{x} + 3|\dot{x}| + 2x = 0$.

B1. Nakreslite fázové portréty systémov.

1. $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = 1 + x^2 - (1-x)y$
2. $\dot{x} = ye^y, \quad \dot{y} = 1 - x^2$
3. $\dot{x} = 1 - xy, \quad \dot{y} = (x-1)y$
4. $\dot{x} = (1 + x - 2y)x, \quad \dot{y} = (x-1)y$
5. $\dot{x} = -6y + 2xy - 8, \quad \dot{y} = y^2 - x^2$
6. $\dot{x} = \sin y, \quad \dot{y} = -\sin x$
7. $\dot{x} = \sin x \cos y, \quad \dot{y} = \sin y \cos x$
8. $\dot{x} = 4 - 4x^2 - y^2, \quad \dot{y} = 3xy$

B2. Nakreslite fázové portréty a určte región stability (v súradniciach (α, x)) systémov, ak $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\dot{x} = \alpha x + (\alpha - 1)y, \quad \dot{y} = x + \alpha y$
2. $\dot{x} = y, \ \dot{y} = \alpha - e^x$
3. $\dot{x} = y,$
   $\dot{y} = (x-\alpha)(x^2 - \alpha)$
4. $\dot{x} = x^2 + y, \quad \dot{y} = x - y + \alpha$
5. $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - \alpha x^3$
6. $\dot{x} = \alpha x - y + x(x^2 + y^2),$
   $\dot{y} = x + \alpha y + y(x^2 + y^2)$

C1. Ukážte, že nulové riešenie systému

$$\dot{x} = -x - \frac{y}{\ln\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\dot{y} = -y + \frac{x}{\ln\sqrt{x^2+y^2}},$$

je stabilná špirála, aj keď je dikritickým uzlom jeho linearizácie.

Hint: polárne súradnice

C2. Ukážte, že systém

$$\dot{x} = x\left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{1}{2}y\left(\sqrt{x^2+y^2} - x\right),$$

$$\dot{y} = y\left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{1}{2}x\left(\sqrt{x^2+y^2} - x\right)$$

má dve ekvilibriá. Nakreslite fázový portrét.

Hint: polárne súradnice

D. Ukážte, že systém

$$\dot{x} = -x + y, \quad \dot{y} = \frac{4x^2}{1+3x^2} - y$$

má tri ekvilibriá. Nakreslite fázový portrét a región, kde je $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} > 0$.

E.

Vyšetrite stabilitu nelineárnych systémov

13) $x_1' = -x_1 + x_2 + 2x_1x_2$, $x_2' = 2x_1 - 3x_2 + 5x_1^4 + x_2^3$

14) $x_1' = -2x_1 + x_1^2 + x_2^2,$ $x_2' = -x_1 + 3x_2 + 3x_2^2$

15) $x_1' = e^{x_1+2x_2} - \cos 3x_1,$ $x_2' = \sqrt{4+8x_1} - 2e^{x_2}$

16) $x_1' = 2\sqrt{x_1+1} - 2e^{x_1+x_2}$, $x_2' = \sin x_1 + \ln(1-4x_2)$

Pri akých hodnotách parametrov je triviálne riešenie asymptoticky stabilné?

17) $x_1' = ax_1 - 2x_2 + x_1^2$, $x_2' = x_1 + x_2 + x_1x_2$

18) $x_1' = ax_1 + x_2 + x_1^2$, $x_2' = x_1 + ax_2 + x_2^2$

19) $x_1' = x_2 + \sin x_1$, $x_2' = ax_1 + bx_2$

20) $x_1' = x_1 + ax_2 + x_2^2$, $x_2' = bx_1 + -3x_2 - x_1^2$

Vyšetrite stabilitu triviálneho riešenia pomocou Ljapunovovej funkcie

21) $x_1' = x_2 + 2x_1^5$, $x_2' = -3x_1 + x_2^3$

22) $x_1' = x_2$, $x_2' = \sin(x_1 + x_2)$

23) $x_1' = -x_1^5 + 2x_2^3$, $x_2' = -x_1 - x_2^3 + x_2^5$

F. Ukážte, že systémy nemajú periodické riešenia.

1. $\dot{x} = y + x^3, \quad \dot{y} = x + y + y^3$
2. $\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = x + y - 2xy$
3. $\dot{x} = -(1-x)^3 + xy^2, \quad \dot{y} = y + y^3$
4. $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = (1+x^2)y + x^3$
5. $\dot{x} = 2xy + x^3, \quad \dot{y} = -x^2 + y - y^2 + y^3$
6. $\dot{x} = x^2 + y^2, \quad \dot{y} = y^2 + x^2\mathrm{e}^x$

G*. Ukážte, že sa HB problému

$$\ddot{x} + x = -F_0 \operatorname{sgn}(\dot{x}), \quad x(t_0) = x_0 > 0, \quad \dot{x}(t_0) = 0, \quad F_0 > 0$$

otočí práve n-krát okolo ekvilibria kým ho dosiahne, ak $(4n-1)F_0 < x_0 < (4n+1)F_0$**.**