Jozef Kiseľák

Sada úloh na precvičenie V.
March 13, 2020

A1. Ukážte, že daný priestor nie je unitárny.

1. $\mathbb{R}^2$, kde $\langle x, y\rangle := x_1y_1 - x_2y_2$
2. $l^p,\ p \in [1, \infty] \setminus \{2\}$
3. $\mathcal{L}^p(\Omega),\ p \in [1, \infty] \setminus \{2\}$
4. priestor postupností, ktoré majú ohraničenú variáciu, tj. normu
$$\|x\|_{bv} = |x_1| + \sum_{i=1}^{\infty} |x_{i+1} - x_i| < \infty$$
5. $C^1([a, b])$, kde $\langle f, g\rangle := \int_a^b f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$ (čo v prípade funkcií ktoré majú nulovú hodnotu v bode a?)

A2. Zistite, či daný priestor je unitárny.

1. $\mathbb{R}^2$, kde $\langle u, v\rangle := 4u_1v_1 + 5u_2v_2$
2. $\mathbb{R}^2$, kde $\langle x, y\rangle := x\mathbf{A}y^{\mathrm{T}}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\mathbb{R}^2$, kde $\langle u, v\rangle := u_1v_1 - u_2v_1 - u_1v_2 + 4u_2v_2$
4. $\mathbb{R}^2$, kde $\langle u, v\rangle := u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 2u_2v_2$
5. $\mathbb{R}^2$, kde $\langle u, v\rangle := au_1v_1 + u_2(bv_1 + cv_2) + du_1v_2$
6. $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$, kde $\langle p, q\rangle := \sum\limits_{i,j=1}^{2} p_i\overline{q}_j$
7. $C([0,1])$, kde$\langle f, g\rangle := \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$
8. $H_1 \times H_2$, kde $\langle u, v\rangle := \langle u_1, v_1\rangle_1 + \langle u_2, v_2\rangle_2$, kde H_i je unitárny so skal. súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$
9. $C^2([-\pi, \pi])$, kde $\langle f, g\rangle = f(-\pi)g(-\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)g''(x)dx$
10. $C_{\mathbb{C}}([0,1])$, kde $\langle f, g\rangle = \int_0^1 |f(t) + g(t)|\,\mathrm{d}t$
11. $C_{\mathbb{C}}([0,1])$, kde $\langle f, g\rangle = f(1)\overline{g(1)} + \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$
12. $\mathrm{span}\{1, \mathrm{t}, \mathrm{t}^2\} \subset \mathrm{C}_{\mathbb{C}}([0,1])$, kde $\langle f, g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + f'(0)\overline{g'(0)} + f'(1)\overline{g'(1)}$

B1. Nech $l_0^2 := \{(x_n)_{n\in\mathcal{N}} \subseteq \mathbb{C} : x_n \neq 0$ **pre konečne veľa** $n\}$. Ukážte, že je to unitárny priestor (so zdedeným skalárnym súčinom.)

B2. Ukážte, že Sobolevov priestor $H^1(\Omega) := \{f \in \mathcal{L}^2(\Omega) : f' \in \mathcal{L}^2(\Omega)\}$ **s normou** $||u||_{H^1}^2 = ||u||_2^2 + ||u'||_2^2$ **je unitárny priestor.**

B3. Nech $M_{n,n}(\mathbb{C})$ **označuje priestor štvorcových matíc nad** $\mathbb{C}$**. Ukážte, že** $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(AB^*)$ **je skalárny súčin na** $M_{n,n}(\mathbb{C})$ $\left(B^* = \overline{A}^T = \overline{A^T}\right)$**.**

B3. Nech $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ **označuje priestor polynómov stupňa najviac 2 nad** $\mathbb{R}$**. Ukážte, že** $\langle p, q\rangle := p(0)q(0) + p(1/2)q(1/2) + p(1)q(1)$ **je skalárny súčin na** $\mathcal{P}_2(x)$**.**

C. Nájdite funkciu, ku ktorej koverguje postupnosť $u_n(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}$, $n \in \mathcal{N}$ **v priestore** $\mathcal{L}^2(-1,1)$ **a zdôvodnite to.**

D. Nájdite projekciu prvku $\mathbf{x}$ na množinu G a vzdialenosť medzi nimi.

1. $\mathbf{x} = (1,0,0),\ \ G : x_1 + x_2 + x_3 = 0$
2. $\mathbf{x} = (4,-1,-3,4),\ \ G = \langle (1,1,1,1),(1,2,2,-1),(1,0,0,3)\rangle$
3. $\mathbf{x} = (7,4,-1,2),\ \ G : 2y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 = 0,\ 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4 = 0,\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 9y_4 = 0$
4. $\mathbf{x} = (1,2,-1,1),\ \ G : x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_i \in \mathbb{R},\ x_0 = (0,-1,1,1), x_1 = (0,-3,-1,5), x_2 = (4,-1,-3,3)$
5. $\mathbf{x} = 0,\ \ G = \{t^2 + a_1 t + a_2,\ \ a_1, a_2 \in \mathbb{K}\} \subset \mathcal{L}^2(0,1)$
6. $\mathbf{x} = t,\ \ G = \{a + b\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + c\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ \ a,b,c \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}^2(0,2\pi)$
7. $\mathbf{x} = f(t) \in \mathcal{L}^2(0,1),\ \ G = \{g \in \mathcal{L}^2(0,1) : \int_0^{\frac{1}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$

E. Nájdite uhol medzi prvkom $\mathbf{x}$ a množinou G.

1. $\mathbf{x} = (1,3,-1,3),\ \ G = \langle (1,-1,1,1),(5,1,-3,3)\rangle$
2. $\mathbf{x} = (1,1,\ldots,1) \in R^n,\ \ G := \{(x_1,\ldots,x_m,0,\ldots,0), x_i \in R\},\ \ m < n$
3. $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i,\ i = 1,\ldots,n,\ \ G : x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ (v $\mathbb{R}^n$)
4. $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i,\ i = 1,\ldots,n,\ \ G : x_0 = 2x_1 = 2^2 x_2 = \cdots = 2^n x_n = \ldots$ (v l^2)

F. Nájdite ortogonálny doplnok k podpriestoru $U \subset H$ (ukážte, že je to tak).

1. $H = \mathbb{R}^4$ a $U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$
2. $H = l^2$ a $U = \big\{(x_n)_{n\in\mathcal{N}} \in l^2 : x_{2n} = 0\ \forall n \in \mathcal{N}\big\}$
3. $H = \mathcal{L}^2(-1,1)$ a $U = \{f \in C([-1,1]) : f(-x) = f(x)\ \ \forall x \in [-1,1]\}$
4. $H = \mathcal{P}_4(x) \subset \mathcal{L}^2(-1,1)$ a $U = \mathcal{P}_2(x)$
5. $H = \mathcal{L}^2(-1,1)$ a $U = \left\{f \in C[-1,1] : \int_{-1}^0 f = \int_0^1 f\right\}$
6. $H = l^2$ a $U = \big\{(x_n)_{n\in\mathcal{N}} \in c_{00} : \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{n} = 0\big\}$
7. $H = M_{n,n}, \langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(AB^\mathrm{T})$ a U je množina diagonálnych matíc
8. $H = M_{n,n}, \langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(AB^\mathrm{T})$ a U je množina symetrických matíc

G. Nájdite 2 uzavreté podmnožiny $M, N \subset \mathbb{R}^2$ tak, že $M \oplus N$ nie je uzavretá a $\operatorname{dist}(M, N) = 0$.