Jozef Kiseľák

Sada úloh na precvičenie VIII.
15. máj 2014

A.

1.2. TRIGONOMETRICKÉ ŘADY 17

PŘÍKLADY

Které koeficienty Fourierovy řady funkce $f \in L_1(-\pi,\pi)$ se anulují, jestliže platí:

9. $f(x+\pi) = -f(x)$. **10.** $f(x+\pi) = f(x)$.

11. $f(-x) = f(x)$ a zároveň $f(x+\pi) = -f(x)$.

12. $f(-x) = -f(x)$ a zároveň $f(x+\pi) = -f(x)$.

13. $f(-x) = f(x)$ a zároveň $f(x+\pi) = f(x)$.

14. $f(-x) = -f(x)$ a zároveň $f(x+\pi) = f(x)$.

15. Jak prodloužíte funkci $f \in L_1(0,\frac{\pi}{2})$ na interval $(-\pi,\pi)$ tak, aby její Fourierova řada měla tvar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x$?

Následující funkce rozložte ve Fourierovu řadu na uvedených intervalech:

16. $\sin^4 x, \quad (0,\pi)$. **17.** $\cos^4 x, \quad (0,\pi)$.

18. $\operatorname{sign} x, \quad (-\pi,\pi)$. **19.** $f(x) = \begin{cases} 0 & x < l \\ 1 & l < x \end{cases}, (0, 2l)$.

20. $\frac{\pi - x}{2}, \quad (0, 2\pi)$. **21.** $\pi^2 - x^2, \quad (-\pi,\pi)$.

22. $\cos ax, \quad (-\pi,\pi)$. **23.** $\sin ax, \quad (-\pi,\pi)$.

24. $f(x) = \begin{cases} ax & x < 0 \\ bx & 0 < x \end{cases}, (-\pi,\pi)$.

25. $\operatorname{sh} ax, \quad (-\pi,\pi)$. **26.** $\operatorname{ch} ax, \quad (-\pi,\pi)$.

27. $e^{ax}, \quad (-h,h)$. **28.** $x, \quad (a, a+l)$.

29. $x \sin x, \quad (-\pi,\pi)$. **30.** $x\cos x, \quad (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Následující funkce rozložte ve Fourierovu řadu (na intervalu délky periody):

31. $\operatorname{sign}(\cos x)$. **32.** $\arcsin(\sin x)$. **33.** $\arcsin(\cos x)$.

34. $x - [x]$ **35.** $|\sin x|$. **36.** $|\cos x|$.

($[x]$ je celá část x).

(a)

18 1. FOURIEROVY ŘADY

37. $f(x)$ je vzdálenost x od nejbližšího celého čísla.

38. $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sin nx}{\sin x} \quad (|r| < 1)$.

Následující funkce rozložte v intervalu $(0,\pi)$
a) v sinovou řadu,
b) v kosinovou řadu:

39. $\cos x$. **40.** $\sin x$. **41.** x^2. **42.** x^3. **43.** x^4. **44.** e^{ax}.

Následující funkce rozložte ve Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi,\pi)$

45. $f(x) = \frac{1}{4}(1-\frac{x}{h})(1+\operatorname{sign}(1-\frac{x}{h}))(1+\operatorname{sign} x) \quad (h > 0)$.

46. $f(x) = \frac{1}{2}(1-\frac{x}{h})(1+\operatorname{sign}(1-\frac{x}{h})) \quad (h > 0)$.

47. $\max\{0, x\}$. **48.** $\max\{0, \sin x\}$. **49.** $|x|(\pi - |x|)$.

50. $x(\pi - |x|)$.

51. Rozložte ve Fourierovu řadu na intervalu $(0,3)$ funkci f :

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{pro } 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{pro } 1 < x < 2, \\ (3-x) & \text{pro } 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

52. Nalezněte Fourierovu řadu funkce $\sec x := \frac{1}{\cos x}$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. *Návod: odvoďte vztah mezi koeficienty* a_n, a_{n-2}.

Rozložte ve Fourierovu řadu následující funkce:

53. $\ln|\sin\frac{x}{2}|$. **54.** $\ln|\cos\frac{x}{2}|$. **55.** $\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|$.

56. V intervalu $(-\pi,\pi)$ rozložte ve Fourierovu řadu funkci $f(x)$ $\int_0^x \ln\sqrt{|\operatorname{cotg}\frac{t}{2}|}\,dt$.

1.3. Sčítání trigonometrických řad

Máme-li nějaký důvod předpokládat, jak součet trigonometrické i vypadá, můžeme postupovat tak, že předpokládaný součet rozlo v řadu a výsledek porovnáme s řadou zadanou. (Porovnej závěr přík C.) Pro přímý součet trigonometrické řady lze též často použít Eu vých vzorců pro vztah goniometrických funkcí a komplexní exponen obvykle ve spojení s Abelovou větou pro mocninné řady:

(b)

A1. Pomocou Charpitovej metódy vyriešte rovnicu.

1. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$
2. $u^2 = xy\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$
3. $||\nabla u||^2 y = \frac{\partial u}{\partial y}u$
4. $||\nabla u||^2 x = \frac{\partial u}{\partial x}u$

1. $\frac{\partial u}{\partial x} = \left(u + y\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$
2. $\frac{\partial u}{\partial y} + x\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$
3. $x\frac{\partial u}{\partial x} + 3y\frac{\partial u}{\partial y} = 2\left(u - x^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)$
4. $xy\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial u}{\partial y} = yu$

B. Sčítajte nasledujúce rady na daných intervaloch.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \ (0, 2\pi)$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}, \ [0, 2\pi]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}, \ [-\pi, \pi]$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}, \ (0, \pi)$

1. $\sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\sin nx \sin mx}{mn}, \ (-\pi, \pi)^2$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx \sin ny}{n}, \ (0, 2\pi) \times (0, \pi/2)$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}, \ [-\pi, \pi]$

C. Pomocou Fourierovho radu funkcie $|\sin x|$ na $\langle -\pi, \pi \rangle$ vypočítajte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{16n^2 - 1}.$$

D. Vypočítajte.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$
2. $\int_0^{\pi} \ln^2\left(2\cos\frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x$

E. Ukážte, že vo všeobecnosti súčet dvoch periodických funkcií nemusí byť periodická funkcia. Čo musia spĺňať periódy oboch funkcií, aby to tak bolo?

F. Rozviňte funkciu $f(x) = x(\pi - |x|),\ x \in [-\pi, \pi]$ periodicky na $\mathbb{R}$, zdôvodnite, že ju možno derivovať po členoch a nájdite tak Fourierov rad fukcie $\pi - 2|x|$.

G. Nájdite Fourierov rad funkcie $|x|$ na $\langle -\pi, \pi \rangle$ pomocou rozvoja funkcie
$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$ **Aká podmienka musí byť splnená?**

H. Rozviňte do radu funkciu $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ v systéme Legendreových polynómov na intervale $[-1, 1]$.

I. Dokážte vzťahy pre Legendreove polynómy:

$$L'_{l+1} - L'_{l-1} = (2l+1)L_l,$$
$$(2l+1)xL_l = (l+1)L_{l+1} + lL_{l-1},$$
$$lL_l = xL'_l - L'_{l-1},$$
$$(1-x^2)L'_l = lL_{l-1} - lxL_l.$$

J. Dokážte vzťahy pre Hermitove polynómy:

$$\xi H_n(\xi) = nH_{n-1}(\xi) + H_{n+1}(\xi)/2, \;\; H'_n(\xi) = 2nH_{n-1}(\xi)$$

a potom určte hodnotu

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_n(\xi)^2 \xi^2 \,\mathrm{d}\xi, \;\; \textbf{kde} \;\; \psi_n(\xi) = \sqrt{2^n n!}\pi H_n(\xi)\, \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{\hbar}}.$$

K. Použitím Fourierových radov nájdite riešenie začiatočnej, resp. okrajovej úlohy.

1. $y'' + 2y = 3x,\ y(0) = y(1) = 0$
2. $y'' + \pi^2 y = x - x^2,\ y(0) + y'(0) = y(1) = 0$
3. $y' + y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!},\ y(0) = 0$
4. $y'' + y = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)x}{2n-1},\ y(0) = y'(0) = 0$

L. Jednoducho podoprený nosník je konštantne zaťažený $\frac{q_0}{a}$ pozdĺž celej dĺžky a. Ohyb (malá výchylka) nosníka je popísaný okrajovou úlohou

$$EI\,y'''' = \frac{q_0}{a}, \quad y(0) = y''(0) = y(a) = y''(a) = 0.$$

Použitím Fourierových radov nájdite riešenie.

M. Uvažujme rovnicu kmitov struny (vlnovú rovnicu) s dĺžkou L a upevenými koncami $u(0,t) = u(L,t) = 0$. Nájdite výchylku v každom čase t, ak podmienky sú: struna bola v čase t vychýlená tak, že bod v jej strede bol uchytený do vzdialenosti h a obe úseky, na ktoré tento bod strunu delí, tvoria priamky spojujúce tento bod s bodmi upevnenia a v čase $t = 0$ bola vypustená z kľudu, tj. $u(0,x) =?$ a $u_t(0,x) =?$.

N.

10. Bakterie v jednorozměrném médiu (trubice jednotkového průřezu, délky l, uzavřená na obou koncích) se množí podle logistického zákona $ru(l-u/K)$, kde r je růstová konstanta, K je kapacita prostředí a $u = u(x,t)$ je hustota bakterií na jednotku délky. Na počátku je hustota dána funkcí $u = ax(l-x)$. V čase $t > 0$ bakterie rovněž difundují s difuzní konstantou D. Zformulujte počátečně-okrajovou úlohu popisující jejich hustotu. Jaké bude rozložení hustoty, počkáme-li dostatečně dlouho? Intuitivně načrtněte několik profilů znázorňujících vývoj hustoty v čase. Uvažujte případy $al^2 < 4K$ a $al^2 > 4K$ odděleně.

11. Uvažujte tyč délky l, která je izolovaná takovým způsobem, že nedochází k žádné výměně tepla s okolním prostředím. Ukažte, že průměrná teplota

$$\frac{1}{l}\int_0^l u(x,t)\,\mathrm{d}x$$

je konstantní vzhledem k časové proměnné t.

[Návod: Integrujte příslušnou řadu člen po členu.]

12. Řešte úlohu popisující pohyb struny jednotkové délky

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

pro následující data. Pohyb struny ilustrujte grafickým zobrazením částečného součtu výsledné řady pro různé hodnoty t. Srovnáním grafu pro $t = 0$ a grafu funkce $\varphi(x)$ rozhodněte, zda je počet členů v součtu dostatečný.

(a) $\varphi(x) = 0.05 \sin \pi x$, $\psi(x) = 0$, $c = 1/\pi$.

$[u(x,t) = 0.05 \sin \pi x \, \cos t]$

(b) $\varphi(x) = \sin \pi x \cos \pi x$, $\psi(x) = 0$, $c = 1/\pi$.

(c) $\varphi(x) = \sin \pi x + 3 \sin 2\pi x - \sin 5\pi x$, $\psi(x) = 0$, $c = 1$.

$[u(x,t) = \sin \pi x \, \cos \pi t + 3 \sin 2\pi x \, \cos 2\pi t - \sin 5\pi x \, \cos 5\pi t]$

(d) $\varphi(x) = \sin \pi x + 0.5 \sin 3\pi x + 3 \sin 7\pi x$, $\psi(x) = \sin 2\pi x$, $c = 1$.

(e) $\psi(x) = 0$, $c = 4$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2, \\ 2(1-x), & 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

$[u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2} \sin(2k+1)\pi x \, \cos 4(2k+1)\pi t]$

(c)

(f) $\psi(x) = 2$, $c = 1/\pi$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1/3, \\ 1/30(x - 1/3), & 1/3 \le x \le 2/3, \\ 1/30(1-x), & 2/3 < x \le 1. \end{cases}$$

(g) $\psi(x) = 1$, $c = 4$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \le x \le 1/4, \\ 1, & 1/4 \le x \le 3/4, \\ 4(1-x), & 3/4 < x \le 1. \end{cases}$$

$[u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 n^2} (\sin(n\pi/4) + \sin(3n\pi/4)) \sin n\pi x \, \cos 4n\pi t$
$\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(2k+1)^2} \sin(2k+1)\pi x \, \sin 4(2k+1)\pi t]$

(h) $\varphi(x) = x \sin \pi x$, $\psi(x) = 0$, $c = 1/\pi$.

(i) $\varphi(x) = x(1-x)$, $\psi(x) = \sin \pi x$, $c = 1$.

$[u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3(2k+1)^3} \sin(2k+1)\pi x \, \cos(2k+1)\pi t + \frac{1}{\pi} \sin \pi x \, \sin \pi t]$

(j) $\psi(x) = 0$, $c = 1$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \le x \le 1/4, \\ -4(x - 1/2), & 1/4 \le x \le 3/4, \\ 4(x-1), & 3/4 < x \le 1. \end{cases}$$

13. Řešte vlnovou rovnici na intervalu $(0, 4\pi)$ s rychlostí $c = 1$, s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami, nulovou počáteční rychlostí $\psi = 0$ a počáteční výchylkou danou předpisem

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos^3 x, & x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}], \\ 0, & x \in \langle 0, 4\pi\rangle \setminus \langle \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\rangle. \end{cases}$$

Nakreslete graf řešení na několika časových hladinách.

(d)

O.

15. Řešte následující počátečně-okrajovou úlohu pro vlnovou rovnici:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 3,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(3,t) = 0, \\ u(x,0) = 1 - \cos\frac{\pi x}{3}, \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

16. Řešte následující počátečně-okrajovou úlohu pro vlnovou rovnici:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x\cos\pi x, \\ u_t(x,0) = 1. \end{cases}$$

17. Struna délky 2π s upevněnými konci je vybuzena úderem kladiva, které jí udělilo počáteční rychlost

$$\psi(x) = \begin{cases} 100, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}, \\ 0, & x \in \langle 0, 2\pi\rangle \setminus (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}). \end{cases}$$

Nalezněte předpis popisující vibrace struny za předpokladu, že počáteční výchylka byla nulová.

18. Struna s pevným koncem v bodě 0 a volným koncem v bodě 2π má počáteční výchylku danou funkcí

$$\varphi(x) = \begin{cases} -x, & 0 \le x < \frac{3\pi}{2}, \\ 3x - 6\pi, & \frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi \end{cases}$$

a nulovou počáteční rychlost. Předpokládejte, že se struna pohybuje v prostředí, které klade jejím vibracím odpor. Tento odpor je přímo úměrný rychlosti struny s konstantou úměrnosti 0.03. Zformulujte příslušný model a nalezněte jeho řešení.

19. Řešte úlohu

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

$$[u(x,t) = e^{-t/2}(\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}t + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}t)\sin x]$$

20. Řešte úlohu

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = x\sin x,\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

(e)

$$[u(x,t) = \tfrac{\pi}{2}e^{-t/2}(\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}t + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}t)\sin x$$
$$-\tfrac{16}{\pi}e^{-t/2}\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{k}{(4k^2-1)^2}(\cos\sqrt{4k^2-\tfrac{1}{4}}t + \tfrac{1}{2\sqrt{4k^2-1/4}}\sin\sqrt{4k^2-\tfrac{1}{4}}t)\sin 2kx]$$

21. Řešte úlohu

$$\begin{cases} u_{tt} + 3u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 10. \end{cases}$$

Graficky ilustrujte skutečnost, že řešení klesá k nule pro t jdoucí do nekonečna.

$$[u(x,t) = \tfrac{16\sqrt{5}}{\pi}e^{-3t/2}\sin x\,\sinh\tfrac{\sqrt{5}}{2}t$$
$$+\tfrac{40}{\pi}e^{-3t/2}\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{1}{(2k+1)\sqrt{(2k+1)^2-9/4}}\sin(2k+1)x\,\sin\sqrt{(2k+1)^2-9/4}t]$$

22. Řešte úlohu

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

pro následující data.

(a) $l = \pi$, $k = 1$, $\varphi(x) = 78$.

$$[u(x,t) = \tfrac{312}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{1}{2k+1}e^{-(2k+1)^2t}\sin(2k+1)x]$$

(b) $l = \pi$, $k = 1$, $\varphi(x) = 30\sin x$.

(c) $l = \pi$, $k = 1$, $\varphi(x) = \begin{cases} 33x, & 0 < x \le \pi/2, \\ 33(\pi - x), & \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$

$$[u(x,t) = \tfrac{132}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{-(2k+1)^2t}\sin(2k+1)x]$$

(d) $l = \pi$, $k = 1$, $\varphi(x) = \begin{cases} 100, & 0 < x \le \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$

(e) $l = 1$, $k = 1$, $\varphi(x) = x$.

$$[u(x,t) = \tfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-n^2\pi^2t}\sin n\pi x]$$

(f) $l = 1$, $k = 1$, $\varphi(x) = e^{-x}$.

(f)

P.

17. Řešte okrajovou úlohu pro Laplaceovu rovnici na čtverci $K = \{(x,y);\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\}$ pro následující data:

   (a) $u_y(x,0) = u_y(x,\pi) = u_x(0,y) = 0, \quad u_x(\pi,y) = \cos 3y;$

   $$\left[u(x,y) = \tfrac{\cosh 3x}{3\sinh 3\pi}\cos 3y\right]$$

   (b) $u(0,y) = u_y(x,0) + u(x,0) = u_x(\pi,y) = 0, \quad u_x(x,\pi) = \sin\frac{3x}{2}.$

   $$\left[u(x,y) = \tfrac{3\cosh(3y/2)-2\sinh(3y/2)}{3\cosh(3\pi/2)-2\sinh(3\pi/2)}\sin\tfrac{3x}{2}\right]$$

18. Řešte Dirichletovu úlohu

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{v } x^2 + y^2 < 1, \\ u(x,y) = x^4 - y^3 & \text{na } x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$\left[u(r,\theta) = \tfrac{3}{8} - \tfrac{3}{4}r\sin\theta + \tfrac{r^2}{2}\cos 2\theta + \tfrac{r^3}{4}\sin 3\theta + \tfrac{r^4}{8}\cos 4\theta\right]$$

19. Řešte Poissonovu rovnici $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ na jednotkovém čtverci $\{0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ pro následující data.

   (a) $f(x,y) = x,\ u(x,0) = u(x,1) = u(0,y) = u(1,y) = 0.$

   $$\left[u(x,y) = \tfrac{8}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\tfrac{(-1)^m}{(m^2+(2k+1)^2)m(2k+1)}\sin m\pi x\,\sin(2k+1)\pi y\right]$$

   (b) $f(x,y) = \sin\pi x,\ u(x,0) = u(0,y) = u(1,y) = 0,\ u(x,1) = x.$

   $$\left[u(x,y) = \tfrac{-4\sin\pi x}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{\sin(2k+1)\pi y}{(1+(2k+1)^2)(2k+1)} + \tfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{(-1)^{n+1}\sin n\pi x\,\sinh n\pi y}{n\sinh n\pi}\right]$$

   (c) $f(x,y) = xy,\ u(x,0) = u(0,y) = u(1,y) = 0,\ u(x,1) = x.$

20. Řešte rovnici $u_{xx} + u_{yy} = 3u - 1$ uvnitř jednotkového čtverce $\{0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ s podmínkou $u = 0$ na hranici čtverce.

$$\left[u(x,y) = \tfrac{16}{\pi^2}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{\sin(2k+1)\pi x\,\sin(2l+1)\pi y}{(2l+1)(2k+1)(3+\pi^2((2l+1)^2+(2k+1)^2))}\right]$$

(g)

17. Řešte okrajovou úlohu pro Laplaceovu rovnici na čtverci $K = \{(x,y);\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\}$ pro následující data:

   (a) $u_y(x,0) = u_y(x,\pi) = u_x(0,y) = 0, \quad u_x(\pi,y) = \cos 3y;$

   $$\left[u(x,y) = \tfrac{\cosh 3x}{3\sinh 3\pi}\cos 3y\right]$$

   (b) $u(0,y) = u_y(x,0) + u(x,0) = u_x(\pi,y) = 0, \quad u_x(x,\pi) = \sin\frac{3x}{2}.$

   $$\left[u(x,y) = \tfrac{3\cosh(3y/2)-2\sinh(3y/2)}{3\cosh(3\pi/2)-2\sinh(3\pi/2)}\sin\tfrac{3x}{2}\right]$$

18. Řešte Dirichletovu úlohu

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{v } x^2 + y^2 < 1, \\ u(x,y) = x^4 - y^3 & \text{na } x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$\left[u(r,\theta) = \tfrac{3}{8} - \tfrac{3}{4}r\sin\theta + \tfrac{r^2}{2}\cos 2\theta + \tfrac{r^3}{4}\sin 3\theta + \tfrac{r^4}{8}\cos 4\theta\right]$$

19. Řešte Poissonovu rovnici $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ na jednotkovém čtverci $\{0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ pro následující data.

   (a) $f(x,y) = x,\ u(x,0) = u(x,1) = u(0,y) = u(1,y) = 0.$

   $$\left[u(x,y) = \tfrac{8}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\tfrac{(-1)^m}{(m^2+(2k+1)^2)m(2k+1)}\sin m\pi x\,\sin(2k+1)\pi y\right]$$

   (b) $f(x,y) = \sin\pi x,\ u(x,0) = u(0,y) = u(1,y) = 0,\ u(x,1) = x.$

   $$\left[u(x,y) = \tfrac{-4\sin\pi x}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{\sin(2k+1)\pi y}{(1+(2k+1)^2)(2k+1)} + \tfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{(-1)^{n+1}\sin n\pi x\,\sinh n\pi y}{n\sinh n\pi}\right]$$

   (c) $f(x,y) = xy,\ u(x,0) = u(0,y) = u(1,y) = 0,\ u(x,1) = x.$

20. Řešte rovnici $u_{xx} + u_{yy} = 3u - 1$ uvnitř jednotkového čtverce $\{0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ s podmínkou $u = 0$ na hranici čtverce.

$$\left[u(x,y) = \tfrac{16}{\pi^2}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{\sin(2k+1)\pi x\,\sin(2l+1)\pi y}{(2l+1)(2k+1)(3+\pi^2((2l+1)^2+(2k+1)^2))}\right]$$

(h)

R. Nájdite Fourierove transformácie nasledujúcich funkcií.

1. $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-a\,x^2}, \ a > 0, \ x \in \mathbb{R}$

2. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| < 1; \\ 0, & \text{inak} \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a; \\ 0, & \text{inak} \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a}, & |x| < a; \\ 0, & \text{inak} \end{cases}$

5. $\Pi(x,y) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{1}{2} \text{ a } |y| < \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{inak} \end{cases}$

S. Nech $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Spočítajte Fourierovu transformáciu výrazu $\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - x^2\right) f$ (vyjadrite pomocou $\hat{f}$).
Nech $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Definujme $\phi(x) = f(x,0)$. Aký je vzťah medzi $\hat{f}$ a $\hat{\phi}$?

T. Spočítajte

1. $E(\alpha x) * E(\beta x)$, ak $\alpha, \beta > 0$, $E(x) = \mathrm{e}^x$ pre $x > 0$ a 0 inak;
2. $\lim\limits_{\beta-\alpha\to 0} E(\alpha x) * E(\beta x)$
3. $f * f$, ak $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$, a výsledok znormalizujte
4. $\Pi(x, y) * \Pi(x, y)$

U. Nájdite riešenie integrálnej rovnice.

1. $$\int_0^\infty y(x)\, \sin(tx)\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 1 - t, & t \in \langle 0, 1 \rangle\,; \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$
2. $$\int_0^\infty \psi(y)\, \sin(yx)\, \mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-x}, \quad x > 0.$$
3. $$\int_{-\infty}^\infty y(u)\, y(x-u)\, \mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

V. Pomocou Fourierovej transformácie vyriešte diferenciálnu rovnicu.

1. $y' + 2y = 3\,\mathrm{e}^{-|x|}$ s podmienkou $y(0) = 1$.
2. $y'' + 3y' + 2y = u(x)\sin x$, $x > 0$,
   spĺňajúcu podmienky $\lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} y'(x) = 0$, pričom funkcia u je rovná 1 pre kladné x a 0 inak.

W. Pomocou Fourierovej transformácie riešte rovnicu.

1.
$$2t\,u_x + 3\,u_t = 0;$$
$$u(x,0) = g(x).$$

2.
$$u_x + u_t + u = 0;$$
$$u(x,0) = h(x).$$

3.
$$c^2\,u_{xx} = u_t;$$
$$u(x,0) = f(x).$$

4.
$$u_{tt} = u_{xx};$$
$$u(x,0) = \frac{1}{1+x^2},\ \ u_t(x,0) = 0.$$

1.
$$u_{tt} = c^2\,u_{xx};$$
$$u(x,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{x},\ \ u_t(x,0) = 0.$$

2.
$$u_t = u_{xx};$$
$$u(x,0) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{2}, & |x| < 2 \\ 0, & \text{inak} \end{cases}.$$

3.
$$u_t = \mathrm{e}^{-t} u_{xx};$$
$$u(x,0) = 100$$

X. Uvažujme rovnicu, kde $u(x,t)$ predstavuje koncentráciu rádioaktívneho materiálu vstrektnutého v počiatku, ktorý má rýchlosť rozpadu β a ktorý sa premiestňuje (advekcia) jednotkovou rýchlosťou doprava (δ je Diracova funkcia):

$$u_x + u_t = -\beta\,u + \delta(x);$$
$$u(x,0) = 0.$$

1. Pomocou FT nájdite $u(x,t)$.
2. Nakreslite graf riešenia v čase $t = 2$, pre $\beta = 1$.