Jozef Kiseľák

Sada úloh na precvičenie VI.
April 3, 2020

H. Určte, či je zobrazenia komutujú.

1. áno
2. nie
3. nie, áno
4. áno
5. áno, áno

I. Určte, či je zobrazenie z X do X je prosté, na a ak $X = \ell^2$, či je to izometria.

1. je prosté, nie je na, je izometria
2. nie je prosté, je na, nie je izometria (navyše $T(S(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$, ako je to s $S \circ T$?)
3. nie je prosté, je na pre $y \in \ell^1$, nie je izometria
4. bijekcia, nie je izometria
5. nie je prosté, je na, nie je izometria
6. bijekcia, je izometria
7. je prosté, nie je na (pre $X = \ell^2$), nie je izometria

poznámka : nie každá izometria je bijekcia, viď úlohu **K**.

J. Overte, že dané zobrazenie (operátor, funkcionál) je lineárne a následne zistite, či je spojité (teda ohraničené ako zobrazenie z X do Y).

1. je ohraničené
2. nie je ohraničené
3. je ohraničené
4. je ohraničené
5. je ohraničené
6. je ohraničené
7. je ohraničené
8. nie je ohraničené
9. je ohraničené
10. je ohraničené
11. je ohraničené
12. a) je ohraničené, b) je ohraničené
13. a) je ohraničené, b) nie je ohraničené (napr. $f(z) = z^{-\frac{1}{3}}$)
14. viď cvičenia

J1. Zistite, či je dané zobrazenie je samoadjungované, pozitívne a projekcia.

1. áno, áno, nie
2. áno, áno, áno
3. áno, áno, áno
4. áno ak $\lambda_n \in \mathbb{R}$, áno ak $\lambda_n \geq 0$, iba ak $c_i^2 = c_i$
5. áno, áno, nie
6. nie, nie, nie
7. áno ak $p_0'(x) = p_1(x)$ a pre $u, v \in C^2([a,b])$ $[p_0(uv' - u'v)]_a^b = 0$, áno ak $p_0'(x) = p_1(x)$, $p_0 \leq 0, p_2 \geq 0$, nie
8. áno, áno, nie
9. áno ak ϕ je reál., áno ak $\phi \geq 0$ s.v., nie
10. áno, áno, áno ak $\int_0^1 \phi(t)\, \mathrm{d}t = 1$
11. áno ak $f(\phi^{-1}(x)) = f(\phi(x))|\phi'(x)|$, $\forall f \in \mathcal{L}^2(a,b)$, nie, áno ak $\phi(x) = x$, $\forall x \in [a,b]$

J2. Zistite, či je dané zobrazenie je unitárne.

1. áno
2. áno
3. áno
4. áno
5. nie
6. áno

J3. Zistite, či je dané zobrazenie je normálne.

1. nie
2. áno
3. áno
4. áno
5. áno

J4. Zistite, či je dané zobrazenie je disipatívne.

1. nie
2. áno
3. áno
4. áno

K. $M = \mathbb{N}$ a $f(n) = n + 1$

K1. Nájdite spektrum operátora.

1. $\sigma(A) = \emptyset$
2. $\sigma_p(A) = \mathbb{C}$
3. $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{2\pi \mathrm{i}\, n, n \in \mathbb{Z}\}$
4. $\sigma(T) = \sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$
5. $\sigma(K) = \{0\}$
6. $\sigma(S) = \sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$
7. $\sigma_c(T) = \emptyset$, $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ a $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$
8. $\sigma(A) = \sigma_c(A) = \{1/(\mathrm{i}x - \alpha), x \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}$
9. $\sigma(L^{-1}) = \sigma(L)^{-1} = \{1/\lambda : \lambda \in \sigma(L)\}$

M. Nájdite stacionárne body nasledujúcich funkcionálov a určte ich hladkosť.

1. $y_0(x) = x^2$
2. $y_0(x) = x^{\frac{3}{5}}$
3. $y_0(x) = \sin x$
4. $y_0(x) = \sqrt{5 - x^2} + 2$
5. $y_0(x) = -\sqrt{1 - x^2}$
6. $\Phi(y) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0] \\ x, & x \in [0, 1] \end{cases}$
7. $y_0(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{5x}{4} + 1$
8. $y_0(x) = Bx$

N. Nájdite extremály, ktoré minimalizujú nasledujúce funkcionály na $C^1([a, b])$.

1. $y_0(x) = Ax, |A| > 1$
2. $y_0(x) = \arctan x$
3. $y_0(x) = |x|x$
4. $y_0(x) = x, M = 1$ ide o glob. ex., $M > 5$ ide o lok. ex.
5. $y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sin(x + \pi/4)}$
6. $y_0(x) = 3 - \frac{4}{x}$
7. $y_0(x) = x - 1$
8. $y_0(x) = 2x - 1$
9. $y_0(x) = \frac{b}{a}x$
10. $y_0(x) = (x(q^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}) + p^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}, p < q$
11. $y_0(x) = \frac{x^2}{2}$

O. Bez overovania nájdite extremály, ktoré minimalizujú nasledujúce funkcionály na $C^1([a,b])$.

1. $y_0(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$
2. $y_0(x) = \lambda[\sqrt{1-(x/\lambda+c)^2} - \sqrt{1-c^2}]$, kde $\lambda = -b/(2c),\ c : \int_0^b \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x = L$
3. $y_0(x) = \frac{18x(\pi - x)}{\pi^3} - \sin x$
4. $y_0(x) = 5x^3 + \frac{x^2}{4} + 3x + 1$
5. $y_0(x) = \frac{C}{b}$
6. $y_0(x) = -3$
7. $y_0(x) = 1 - x$