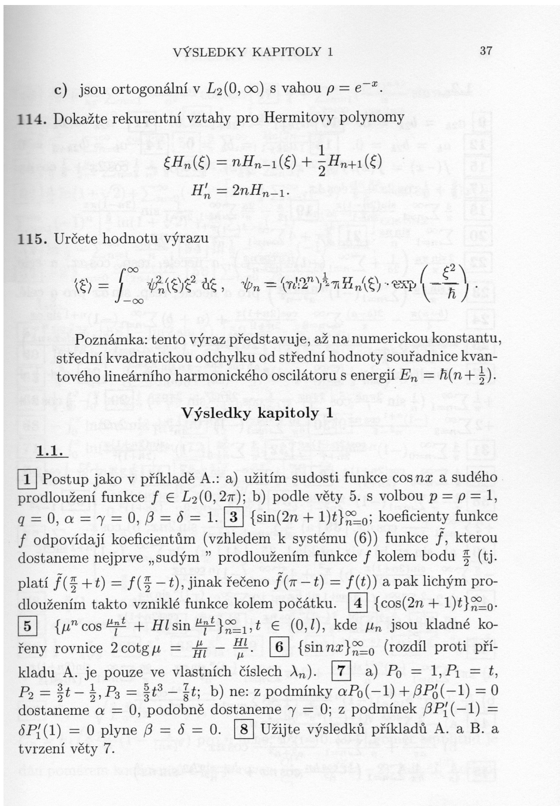
Jozef Kiselák

Riešenia úloh na precvičenie VIII.
15. máj 2014

A.



c) jsou ortogonální v $L_2(0,\infty)$ s vahou $\rho = e^{-x}$.

114. Dokažte rekurentní vztahy pro Hermitovy polynomy

$$\xi H_n(\xi) = nH_{n-1}(\xi) + \frac{1}{2}H_{n+1}(\xi)$$
$$H'_n = 2nH_{n-1}.$$

115. Určete hodnotu výrazu

$$\langle\xi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(\xi)\xi^2 \,\mathrm{d}\xi\,, \quad \psi_n = (n!2^n)^{\frac{1}{2}}\pi H_n(\xi)\cdot\exp\left(-\frac{\xi^2}{\hbar}\right).$$

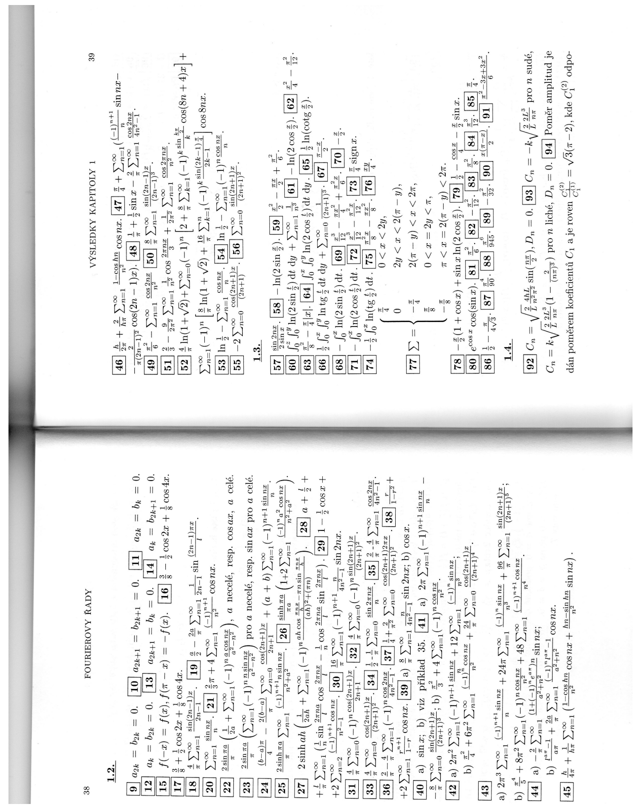
Poznámka: tento výraz představuje, až na numerickou konstantu, střední kvadratickou odchylku od střední hodnoty souřadnice kvantového lineárního harmonického oscilátoru s energií $E_n = \hbar(n+\frac{1}{2})$.

Výsledky kapitoly 1

1.1.

[1] Postup jako v příkladě A.: a) užitím sudosti funkce $\cos nx$ a sudého prodloužení funkce $f \in L_2(0,2\pi)$; b) podle věty 5. s volbou $p = \rho = 1$, $q = 0$, $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = \delta = 1$. [3] $\{\sin(2n+1)t\}_{n=0}^{\infty}$; koeficienty funkce f odpovídají koeficientům (vzhledem k systému (6)) funkce $\tilde{f}$, kterou dostaneme nejprve „sudým " prodloužením funkce f kolem bodu $\frac{\pi}{2}$ (tj. platí $\tilde{f}(\frac{\pi}{2}+t) = f(\frac{\pi}{2}-t)$, jinak řečeno $\tilde{f}(\pi - t) = f(t)$) a pak lichým prodloužením takto vzniklé funkce kolem počátku. [4] $\{\cos(2n+1)t\}_{n=0}^{\infty}$. [5] $\{\mu^n \cos\frac{\mu_n t}{l} + Hl\sin\frac{\mu_n t}{l}\}_{n=1}^{\infty}, t \in (0,l)$, kde μ_n jsou kladné kořeny rovnice $2\operatorname{cotg}\mu = \frac{\mu}{Hl} - \frac{Hl}{\mu}$. [6] $\{\sin nx\}_{n=0}^{\infty}$ (rozdíl proti příkladu A. je pouze ve vlastních číslech λ_n). [7] a) $P_0 = 1, P_1 = t$, $P_2 = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}, P_3 = \frac{5}{3}t^3 - \frac{7}{8}t$; b) ne: z podmínky $\alpha P_0(-1) + \beta P'_0(-1) = 0$ dostaneme $\alpha = 0$, podobně dostaneme $\gamma = 0$; z podmínek $\beta P'_1(-1) = \delta P'_1(1) = 0$ plyne $\beta = \delta = 0$. [8] Užijte výsledků příkladů A. a B. a tvrzení věty 7.

(a)



(b)

A1. Pomocou Charpitovej metódy vyriešte rovnicu.

1. $a\,u(x,y) = \frac{(ax+y)^2}{2} + c$
2. $u(x,y) = bx^a y^{\frac{1}{a}}$
3. $u(x,y)^2 = (ax+b)^2 + a^2y^2$
4. $u(x,y)^2 = (ay+b)^2 + a^2x^2$
5. $x + \frac{y}{a+yu} = b$
6. $u(x,y) = 2axe^{-y} - \frac{a^2}{2}e^{-2y} + b$
7. $u(x,y) = a(a + \frac{y}{x}) + bx^2$
8. $\ln(u(x,y) - ax) = y - a\ln(a+y) + b$

B. Sčítajte nasledujúce rady na daných intervaloch.

1. $-\ln(2\sin\frac{x}{2})$
2. $\int_0^x \int_0^y \ln(2\sin\frac{t}{2})\,dt\,dy + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$
3. $\frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$
4. $\frac{1}{2}\int_0^x \int_0^y \ln(2\tan\frac{t}{2})\,dt\,dy + \sum_{k \text{ je nep.}}^{\infty} \frac{1}{k^3}$
5. $\frac{xy}{4}$
6. $\Sigma = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & 0 < x < 2y, \\ 0, & 2y < x < 2(\pi - y), \\ -\frac{\pi}{4}, & 2(\pi - y) < x < 2\pi, \\ \frac{\pi}{8}, & 0 < x = 2y < \pi, \\ -\frac{\pi}{8}, & \pi < x = 2(\pi - y) < 2\pi, \end{cases}$
7. $e^{\cos x}\cos(\sin x)$

C.

$a_0 = \frac{2}{\pi}$, $b_n = 0$, $a_n = \frac{2(-1+(-1)^{1+n})}{\pi(n^2-1)}, n \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{16n^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$

D. Vypočítajte.

1. $\frac{\pi^2}{6}$
2. $\frac{\pi^4}{90}$
3. $\frac{\pi^3}{32} - 1$
4. $\frac{\pi^3}{12}$

F.

Pre f sú $a_0 = a_n = 0$ a $b_n = -\frac{4(-1+(-1)^n)}{n^3\pi}$.
Pre f' sú $a_0 = 0, a_n = -\frac{4(-1+(-1)^n)}{n^2\pi} \geq 0$ a $b_n = 0$.

G.

Pre $|x|$ sú $a_0 = \frac{\pi}{2}$, $a_n = \frac{2(-1+(-1)^n)}{n^2\pi}$ a $b_n = 0$.

H.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n L_n(x),$$

kde

$$A_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{(2n+1)(n-2)!!}{2\left(\frac{n+1}{2}\right)!}, n \text{ nepárne}, \quad A_n=0, n \text{ párne}$$

K. Použitím Fourierových radov nájdite riešenie začiatočnej, resp. okrajovej úlohy.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6(-1)^n}{\pi n(\pi^2n^2-2)}\sin\pi nx$
2. $\displaystyle\frac{6-\pi^2}{3\pi^4}+\frac{6}{\pi^4}\cos\pi x+\frac{\pi^2-4}{\pi^5}\sin\pi x+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi^4n^2}\cos\pi nx+\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi^3n}\sin\pi nx\right)$
3. $\displaystyle -e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n^2+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!(n^2+1)}\sin nx+\frac{1}{n!(n^2+1)}\cos nx\right)$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1+(-1)^n n^2\pi^2\cos 1-(-1)^n n^2\pi^2+(-1)^n)}{\pi n(\pi^2n^2-1)}\sin\pi nx$

M.

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}\left(C_n\cos\frac{n\pi ct}{L}+D_n\sin\frac{n\pi ct}{L}\right),$$

kde

$$C_n=\sqrt{\frac{2}{L}}\frac{4hL}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}, D_n=0$$

R. Nájdite Fourierove transformácie nasledujúcich funkcií.

1. $-\dfrac{\sqrt{\pi a}\,\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\frac{w^2}{4a}}}{2}$
2. $\frac{2\sin w}{w} - \frac{4\sin^2(w/2)}{w^2}$
3. $\frac{2\sin(aw)}{w}$
4. $\frac{4\sin^2(aw/2)}{aw^2}$
5. $\frac{4\sin(u/2)\sin(v/2)}{uv}$

T. Spočítajte

1. $E(\alpha x) * E(\beta x) = \frac{E(\alpha x)-E(\beta x)}{\beta-\alpha}, \alpha \neq \beta$
2. $E(\alpha x) * E(\alpha x) = xE(\alpha x)$
3. $(f*f)(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{6} - x^2 + x, & x \in \langle 0,1\rangle, \\ -\frac{x^3}{6} + x^2 - 2x + \frac{4}{3}, & x \in \langle 1,2\rangle, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$
4. $\Lambda(x)\Lambda(y)$. Využite fakt, že $\Pi(x,y) * \Pi(x,y) = \Pi(x)\Pi(y) * \Pi(x)\Pi(y)$

U. Nájdite riešenie integrálnej rovnice.

1. $y(x) = \frac{2(x-\sin x)}{\pi x^2}$
2. $\psi(x) = \frac{2x}{\pi(x^2+1)}$
3. $y(x) = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-2x^2}}{\pi^{\frac{1}{4}}}$

V. Pomocou Fourierovej transformácie vyriešte diferenciálnu rovnicu.

1. $y(x) = 3\mathrm{e}^{-2x} \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}, & x \leq 0 \\ \mathrm{e}^{x} - \frac{2}{3}, & \text{inak} \end{cases}$
2. $y(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}\sin x - \frac{3}{10}\cos x - \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{5} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{inak} \end{cases}$

W. Pomocou Fourierovej transformácie riešte rovnicu.

1. $u(x,t) = g(x - t^2/3)$
2. $u(x,t) = h(x-t)\mathrm{e}^{-t}$
3. $u(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{\frac{(x-y)^2}{4c^2t}}}{2c\sqrt{\pi t}} f(y)\,\mathrm{d}y$
4. $u(x,t) = 1/2\left(\frac{1}{1+(x+t)^2} + \frac{1}{1+(x-t)^2}\right)$

1. $u(x,t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}2}\left(\frac{\sin(t+cx)}{t+cx} + \frac{\sin(t-cx)}{t-cx}\right)$
2. $u(x,t) = -\frac{x}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{4c\sqrt{\pi t}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{(x-2)^2}{4tc^2}} + \mathrm{e}^{-\frac{(x+2)^2}{4tc^2}} - 2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4tc^2}}\right) + \frac{x+2}{4}\mathrm{erf}\left(\frac{x+2}{2c\sqrt{t}}\right) + \frac{x-2}{4}\mathrm{erf}\left(\frac{x-2}{2c\sqrt{t}}\right)$
3. $u(x,t) = 100$

X.

$u(x,t) = (\text{Heaviside}(x) - \text{Heaviside}(x-t))\mathrm{e}^{-bx}$