Úloha

Vyšetrite stabilitu riešení v okolí SB v závislosti od parametra DR $x'' + x + ax^3 = 0, \quad a \in \mathbb{R}$. *Načrtnite fázový portrét.*

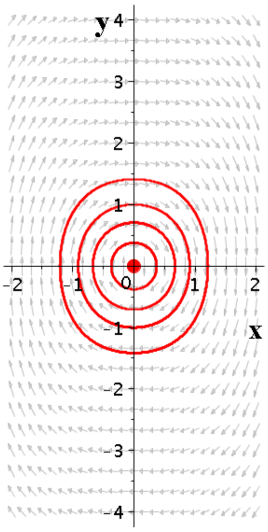
Riešenie

Nech $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - ax^3$.

Prípad $a = 0$:

SB je iba bod $[0, 0]$. Zrejme $\dot{x}x + \dot{y}y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = c, \ c \geq 0$ Bod $[0, 0]$ je teda centrum, pričom $|x| \leq \sqrt{c}$.

Prípad $a > 0$:



Obr. 1: Prípad $a = \dfrac{1}{2}$ a $c \in \left\{2, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{7}\right\}$.

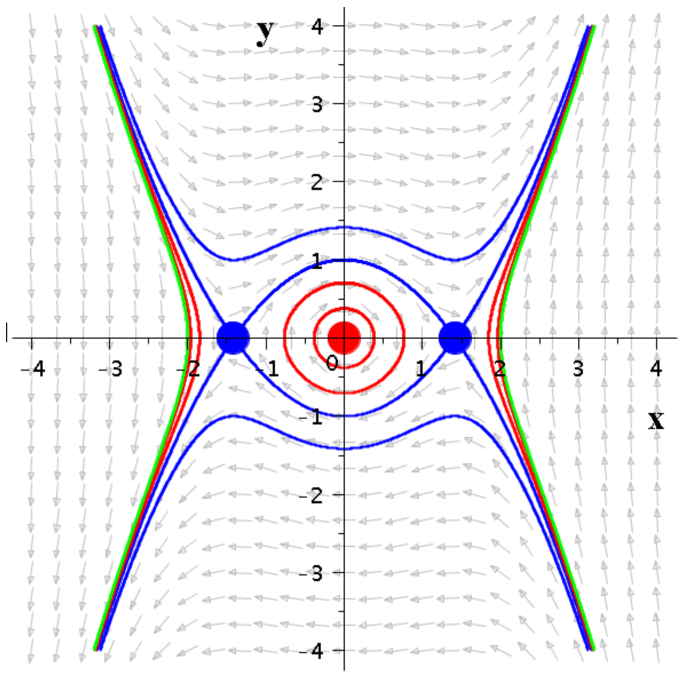
SB je stále iba bod $[0, 0]$. Na $O^*(0, 0)$ platí

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -\frac{x(1 + ax^2)}{y} \Leftrightarrow y^2 = -\left(x^2 + \frac{a}{2}x^4\right) + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

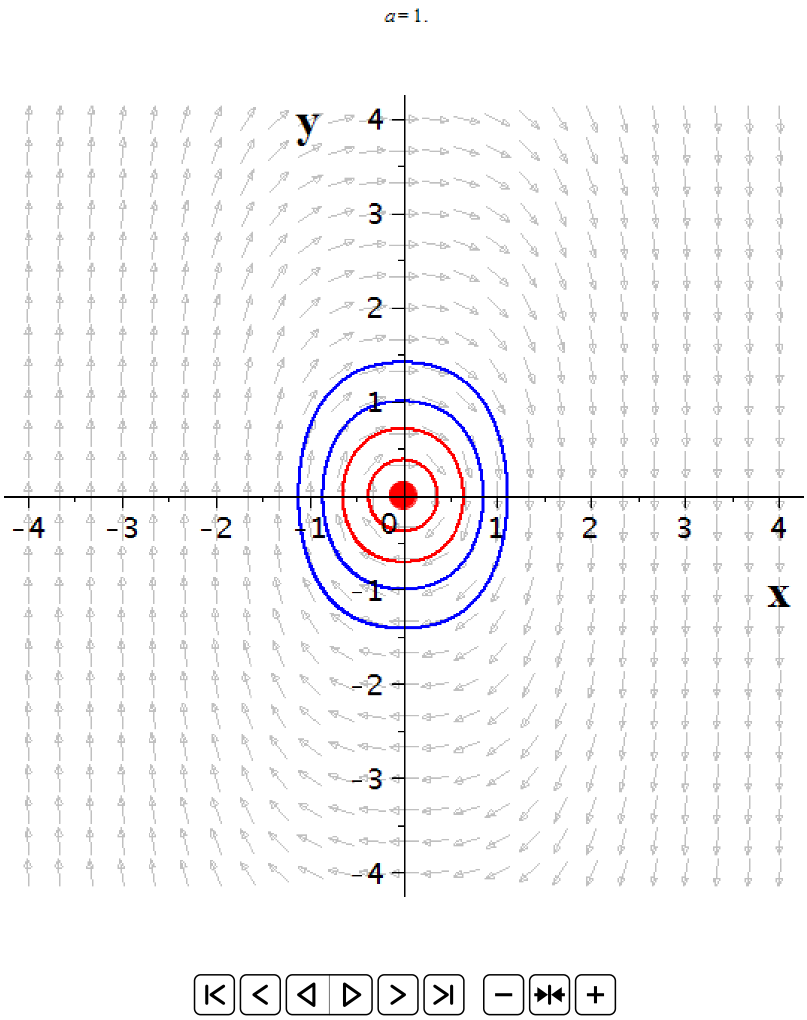
Po úprave máme $y^2 + \left(x^2 + \frac{1}{a}\right)^2 \frac{a}{2} = c + \frac{1}{2a}$. Z toho nutne $c \geq -\frac{1}{2a}$ a navyše musí platiť $c + \frac{1}{2a} \geq \left(x^2 + \frac{1}{a}\right)^2 \frac{a}{2}$. Takže máme $|x| \leq \sqrt{\frac{1}{a}\left(\sqrt{1 + 2ca} - 1\right)}$ a taktiež $c > 0$. Samozrejme, graf krivky pre fixovanú hodnotu c je symetrický vzhľadom na obe osi a pre $x = 0, \ y = 0$ je $c = 0$, teda bod $[0, 0]$ je centrum, pričom fázové krivky tvoria "zdeformované" kružnice.

Prípad $a < 0$:

Teraz už máme viac SB, sú to body $[0, 0], \ [\pm a^*, 0], \ a^* = \frac{1}{\sqrt{-a}}$. Opäť máme $y^2 + \left(x^2 + \frac{1}{a}\right)^2 \frac{a}{2} = c + \frac{1}{2a}$, avšak nerovnosť $c + \frac{1}{2a} \geq \left(x^2 + \frac{1}{a}\right)^2 \frac{a}{2}$ je komplikovanejšia. Pre $c = -\frac{1}{2a}$ máme $y_\pm = \pm\sqrt{-\frac{a}{2}}\left(x^2 + \frac{1}{a}\right), \ x \in \mathbb{R}$, pričom krivky prechádzajú SB $[\pm a^*, 0]$. Pre $c > -\frac{1}{2a}$ máme $y_\pm = \pm\sqrt{c + \frac{1}{2a} - \left(x^2 + \frac{1}{a}\right)^2 \frac{a}{2}}$ a $x \in \mathbb{R}$. Nakoniec pre $c < -\frac{1}{2a}$ máme ten istý predpis $y_\pm = \pm\sqrt{c + \frac{1}{2a} - \left(x^2 + \frac{1}{a}\right)^2 \frac{a}{2}}$, avšak platný pre $|x| \leq \sqrt{\frac{1}{a}\left(\sqrt{1 + 2ca} - 1\right)}$ (dve vetvy dokopy tvoria "kvázikružnice") alebo $|x| \geq \sqrt{-\frac{1}{a}\left(\sqrt{1 + 2ca} + 1\right)}$ (dve vetvy dokopy tvoria "kvázihyperboly").



Obr. 2: Prípad $a = -\frac{1}{2}$ a c s hodnotami 2 (blue), 1 (blue), $\frac{1}{2}$ (red), $\frac{1}{7}$ (red), 0 (green).



Obr. 3: Animácia bifurkácie so zmenou hodnôt parametra a.