Reťazovka

Nájdite plochu s najmenším povrchom, ktorá vznikne rotáciou grafu hladkej nezápornej funkcie f okolo osi x (na intervale $[-1,1]$, pričom $f(-1) = f(1)$).

Hľadajme minimum funkcionálu

$$\Phi(y) = 2\pi \int_{-1}^{1} y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

pre $y \in \{C^1([-1,1]): \quad y(-1) = y(1) = A,\ A > 0\}$. Z EL (bez 2π) máme:

$$\sqrt{1+(y')^2} - \frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} + \frac{y(y')^2y''}{\sqrt{1+(y')^2}^3} - \frac{yy''}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0 \tag{2}$$

I) prenásobením y' dostaneme

$$y'\sqrt{1+(y')^2} - \frac{(y')^3}{\sqrt{1+(y')^2}} + \frac{y(y')^3y''}{\sqrt{1+(y')^2}^3} - \frac{yy'y''}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0$$

a teda

$$y'\sqrt{1+(y')^2} + \frac{yy'y''}{\sqrt{1+(y')^2}} - \frac{(y')^3}{\sqrt{1+(y')^2}} + \frac{y(y')^3y''}{\sqrt{1+(y')^2}^3} - \frac{2yy'y''}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0$$

Po integrovaní prejdeme k rovnici

$$y\sqrt{1+(y')^2} - \frac{y(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = C,$$

ktorú prepíšeme na tvar

$$y = C\sqrt{1+(y')^2} \tag{3}$$

ALEBO, II) z (2) $(/.\sqrt{1+(y')^2})$ máme po algebrických úpravách

$$0 = yy'' - 1 - (y')^2,$$

pričom po prenásobení výrazom $\frac{2y'}{y^3}$ dostaneme

$$\frac{1}{C^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{(y')^2}{y^2},$$

čo je ekvivalentné s rovnicou (3).

Nakoniec riešime separovateľnú rovnicu (3) (keďže $y > 0, C > 0$) tak, že ju prepíšme na tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{y^2 - C^2}}{C}.$$

Po integrácii máme

$$x + K = C \ln\left(y\left(x\right) + \sqrt{y^2\left(x\right) - C^2}\right),$$

z toho

$$y_1(x) = \frac{C^2}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{K+x}{C}} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{K+x}{C}}$$

a teda 1-parametrická trieda riešení je

$$y_1(x) = C\,\cosh\left(\frac{K+x}{C} - \ln C\right).$$

Rovnica (3) má aj riešenia $y_2(x) = C$ (ide o valce). Takže z okrajových podmienok máme $y_2(x) = A$ a $y_1(-1) = y_1(1) = A$ implikuje

$$C\,\cosh\left(\frac{K-1}{C} - \ln C\right) = C\,\cosh\left(\frac{K+1}{C} - \ln C\right) = A,$$

čo dáva nutnú podmienku

$$\frac{K-1}{C} - \ln C = -\frac{K+1}{C} + \ln C \Longrightarrow K = C \ln C.$$

Teda $y_1(x) = C\,\cosh\left(\frac{x}{C}\right)$, kde $C > 0 : y_1(1) = C\,\cosh\left(\frac{1}{C}\right) = A$. Dá sa ukázať, že funkcia $C\,\cosh\left(\frac{1}{C}\right)$ je striktne konvexná pre $C > 0$ a má teda globálne minimum. Označme $A^* := \min_{C>0} C\,\cosh\left(\frac{1}{C}\right) \approx 1.5089$ pre $C^* \approx 0.8336$, potom pre rovnicu $C\,\cosh\left(\frac{1}{C}\right) = A$ platí

- pre $A = A^*$ je jediné riešenie $C_0 = C^*$
- pre $A < A^*$ neexistuje riešenie
- pre $A > A^*$ sú dve riešenia $C_i > 0,\ i = 1, 2$

Každopádne $\Phi(y_2) = \pi\, C_i\, \left(C_i\, \sinh\left(2\, C_i^{-1}\right) + 2\right)$ a $\Phi(y_1) = 4\pi A$ a tak sa dá ukázať, že reťazovka (pre jedno C_i) je minimizér.