Kapitola 1

Číselné množiny

Až do poslednej štvrtiny 19. storočia boli reálne čísla vnímané iba vo veľmi intuitívnej, geometricky podporenej podobe. Iracionálne čísla boli používané pragmaticky, bez pochýb a potreby ich presnejšieho popisu. Bolo všeobecne prijímané, že iracionálne číslo je možné ľubovoľne presne aproximovať racionálnym číslom (pokiaľ bol záujem o nejaké numerické výpočty, v ktorých sa to iracionálne číslo vyskytlo). Postupne sa však v priebehu 19. storočia odhaľovala skutočnosť, že bez úplného pochopenia a presného popisu pojmu reálneho čísla nie je možné vystavať pevné základy matematickej analýzy. Napríklad už Bolzano vo svojom dôkaze vety o medzihodnotách spojitej funkcie potreboval vedieť, že každá ohraničená a monotónna postupnosť čísel má limitu. To sa zdalo byť jasné, ale logický základ chýbal. Zásadným výsledkom, ktorý sa týka aritmetizácie analýzy, je konštrukcia reálnych čísel. K tomu došlo okolo roku 1872, aj keď samozrejme už predtým boli v tomto smere vykonané niektoré pokusy, svedčiace o tom, že táto potreba bola akútna a v širšej miere chápaná (existuje napríklad Bolzanov rukopis o tejto téme, sú známe Weierstrassove berlínske prednášky, v ktorých sa tejto téme tiež venoval). Konštrukcia reálnych čísel je zviazaná s menami Richarda Dedekinda (1831–1916), Georga Cantora (1845–1918), Charlesa Méraya (1835–1911) a Eduarda Heineho (1821–1881). Postupy Dedekinda a Cantora sú rôzne a sú to práve tie postupy, ktoré sa dnes bežne používajú. Veľmi stručne ich teraz popíšeme.

Dedekind vyšiel z toho, že množinu $\mathbb{Q}$ všetkých racionálnych čísel je možné rozdeliť na dve disjunktné množiny D a H tak, že každý prvok z D je menší ako každý prvok z H. Každé racionálne číslo rozdelí množinu $\mathbb{Q}$ na dve takéto disjunktné množiny. Napríklad množina všetkých prvkov z $\mathbb{Q}$, ktoré sú menšie ako $\frac{7}{5}$, vytvorí množinu D a zvyšné prvky z $\mathbb{Q}$ zas množinu H, ktorá je určená racionálny číslom $\frac{7}{5}$. Dedekindov rez množiny racionálnych čísel, ktorý je základom jeho teórie, je definovaný ako rozklad (D, H) množiny $\mathbb{Q}$ taký, že každý prvok D je menší ako ľubovoľný prvok z H. Niektoré rezy sú určené racionálnym číslom (ako vyššie uvedený rez daný číslom $\frac{7}{5}$), iné túto vlastnosť nemajú (napríklad rez, pre ktorý v D sú všetky prvky z $\mathbb{Q}$, pre ktoré je $x^2 < 3$ a H obsahuje všetky ostatné prvky z $\mathbb{Q}$). Intuitívne je možné tento rez chápať ako rez generovaný iracionálnym číslom $\sqrt{3}$. V ďalšom kroku už potom môžeme prehlásiť, že množina všetkých reálnych čísel je množina všetkých rezov množiny $\mathbb{Q}$ všetkých racionálnych čísel. S týmto pojmom sa pracuje ďalej tak, že sa preň ukáže platnosť všetkých potrebných vlastností reálnych čísel, ktoré sa týkajú ich aritmetiky a v neposlednom rade aj to, že zavedenie pojmu reálneho čísla súhlasí s geometrickými predstavami o reálnych číslach (s reálnou osou). Ide o vlastnosť, ktorú Dedekind nazýva vlastnosťou spojitosti systému reálnych čísel, t.j. každý rez v množine reálnych čísel je určený nejakým reálnym číslom – teda množina reálnych čísel je úplná v tom zmysle, že reálne čísla sú tvorené pomocou rezov v množine racionálnych čísel, ale rezy v množine reálnych čísel už nič nové nepridajú.

Cantor svoj prístup založil na predstave reálneho čísla ako limity postupnosti racionálnych čísel. Reálne číslo potom identifikuje s cauchyovskou postupnosťou racionálnych čísel, pričom dve cauchyovské postupnosti $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ považuje za ekvivalentné, ak $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Povedané dnešnými slovami je Cantorova metóda založená na zúplnení množiny racionálnych čísel a reálne číslo je prezentované ako trieda ekvivalencie cauchyovských postupností racionálnych čísel. Cantorov postup stojí za pozornosť aj preto, lebo pre moderné postupy v matematike je veľmi typický.

V oboch popísaných konštrukciách je východiskom pre výstavbu teoreticky podloženého pojmu reálneho čísla množina $\mathbb{Q}$ racionálnych čísel. Množinu $\mathbb{Q}$ je možné bez väčších ťažkostí vystavať z čísel prirodzených. Najpodstatnejšie na všetkých konštrukciách reálnych čísel z hľadiska analýzy je ale to, že umožňujú korektné overenie faktu, že množina reálnych čísel je úplná, čo neznamená nič inšie len to, že reálna os nemá diery, že ohraničená množina reálnych čísel má supremum, že ... Skrátka, *množina reálnych čísel nie je žiadne sito*!

Aby sme boli schopní lepšie pochopiť tieto konštrukcie, potrebujeme sa postupne prehrýzť všetkými pojmami, o ktorých sa v predošlom texte hovorilo. Dedekindovej konštrukcii reálnych čísel bude venovaná neskôr časť iného predmetu (?Teoretická aritmetika?), a preto sa ňou nebudeme zaoberať. Keďže Cantorov prístup je viac analytický (cauchyovské postupnosti), vrátime sa k nemu v časti 3.3. Dovtedy bude naša situácia iná, teda zoberieme množinu reálnych čísel ako fakt (hoci je za tým množstvo vecí, ktoré zamlčíme) a zavedieme ju prísne axiomaticky.

1.1 Reálne čísla

Jedným zo základných pojmov, s ktorým sa neustále stretávame, je číslo. Je to dôležitý pojem nielen v matematike, ale vo všetkých oblastiach života. Nebudeme sa zapodievať samotným pojmom číslo, budeme ho považovať sa intuitívne jasný. Vo všeobecnosti, čísla (nielen reálne, hoci len tie budú v spektre nášho záujmu) sa obvykle označujú písmenami, pričom sa musí dodržiavať niekoľko všeobecných zásad. V danom vzťahu jedno písmeno (i keď sa vyskytuje viackrát) označuje všade to isté číslo. To platí i v prípade viacerých vzťahov, ktoré medzi sebou súvisia. Rôzne písmená môžu označovať rôzne čísla. Ak však dve písmená označujú to isté číslo, môžeme všade jedno z nich zameniť druhým a naopak.

Táto kapitola bude pojednávať o štruktúre reálnych čísel, ktorá je veľmi dôležitá v celej matematickej analýze. Fakticky, matematickú analýzu môžeme definovať ako disciplínu zaoberajúcu sa štúdiom vlastností množín a ich vzájomných zobrazení, ktoré sú určené topologickou štruktúrou (štruktúra polohy) a štruktúrou algebraických operácií. Práve topologické a metrické štruktúry sú matematickej analýze vlastné, pretože pomocou nich môžeme definovať nové vlastnosti, ako sú napríklad spojitosť a konvergencia. Topologická štruktúra sa zvykne zadávať pomocou okolí bodov a metrická štruktúra pomocou vzdialenosti dvoch bodov.

Teraz uvedieme definíciu reálnych čísel. Nedefinujeme pritom jednotlivé reálne čísla, ale množinu všetkých reálnych čísel ako celok s reláciami, operáciami a ich vlastnosťami. Zadávame ich pomocou tzv. axióm reálnych čísel (tvrdení, ktoré považujeme za samozrejmé), ktoré delíme na axiómy sčítania a násobenia, axiómy usporiadania a axiómu o najmenšom hornom ohraničení.

Definícia 1.1. *Množinou reálnych čísel* $\mathbb{R}$ budeme nazývať množinu prvkov, na ktorej sú definované operácie sčítania $+$, násobenia $\cdot$ a relácia usporiadania $\leq$ také, že:

Sčítanie: $(\mathbb{R}, +, 0)$ *je abelovská aditívna grupa*, t.j.

S_1: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x + y = y + x$ (komutativita sčítania);

S_2: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativita sčítania);

S_3: $(\exists 0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ x + 0 = x$ (existencia aditívnej identity);

S_4: $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x + y = 0$ (existencia opačného prvku).

Násobenie: $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ *je abelovská multiplikatívna grupa kompatibilná s aditívnou grupou* $(\mathbb{R}, +, 0)$, t.j.

N_1: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita násobenia);

N_2: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (asociativita násobenia);

N_3: $(\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0)(\forall x \in \mathbb{R})\ x \cdot 1 = x$ (existencia multiplikatívnej jednotky);

N_4: $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = 1$ (existencia prevrátenej hodnoty);

N_5: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (distributivita násobenia vzhľadom na sčítanie).

Usporiadanie: Pre každé dva prvky $x, y \in \mathbb{R}$ platí aspoň jeden zo vzťahov $x \leq y$ alebo $y \leq x$, pričom

U_1: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisymetria $\leq$);

U_2: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivita $\leq$);

U_3: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (monotónnosť sčítania vzhľadom na $\leq$);

U_4: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ 0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$ (monotónnosť násobenia vzhľadom na $\leq$).

Axióma (H) o hornej hranici: *Každá neprázdna zhora ohraničená podmnožina množiny* $\mathbb{R}$ *má najmenšie horné ohraničenie*, t.j. ak $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ a $(\exists z \in \mathbb{R})(\forall x \in M)\ x \leq z$, tak $(\exists! S \in \mathbb{R})$

(i) $(\forall x \in M)\ x \leq S$ (S je horné ohraničenie M);

(ii) $(\forall t \in \mathbb{R}, t < S)(\exists x_0 \in M)\ t < x_0$ (S je najmenšie horné ohraničenie M).

Vzťah $t < x_0$ tu znamená, že $t \leq x_0$ a súčasne $t \neq x_0$ (tzv. ostrá nerovnosť). Poznamenajme, že skupina axióm sčítania spolu s axiómami násobenia hovorí, že $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ je *komutatívne pole* vzhľadom na násobenie. Axiómy U_1 a U_2 spolu s *totálnosťou usporiadania* (pre každé dva prvky $x, y \in \mathbb{R}$ platí aspoň jeden zo vzťahov $x \leq y$ alebo $y \leq x$) definujú *reťazec*, teda $(\mathbb{R}, \leq)$ je reťazec. Z totálnosti vyplýva *reflexivita*, t.j. $(\forall x \in \mathbb{R})\ x \leq x$. Zvyšné axiómy U_3 a U_4 zase vyjadrujú kompatibilitu reťazca $(\mathbb{R}, \leq)$ s poľom $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$. Axióma (H) má v množine reálnych čísel výsostné postavenie, o ktorom budeme viac hovoriť v časti 1.4. Predbehneme a prezradíme, že číslo S budeme nazývať *supremum* množiny M.

Dá sa ukázať (je to však značne nad rámec našich poznatkov), že množina zadaná všetkými axiómami Definície 1.1 naozaj existuje (o čom asi žiaden čitateľ - ani menovateľ - nepochybuje) a čo je dôležitejšie, že je jediná! Z takto zavedenej množiny reálnych čísel vyplývajú niektoré dôsledky, ktoré sú čitateľovi bežne známe a všeobecne používané vo výpočtovej praxi, avšak v zmysle zavedenej definície je potrebné overiť ich platnosť na základe axióm. Pri niektorých tvrdeniach táto snaha môže vyznieť až komicky (ako napríklad dokázať, že $0 < 1$), ale chceme upozorniť čitateľa, že to je práve povahou matematiky: budovať teóriu z určitých axióm. Všetko ostatné, vybudované na ich základe pomocou logických postupov a metód odvodzovania, je potrebné dokázať. Nebudeme to však robiť úplne, pre nedostatok času viacero tvrdení prenecháme čitateľovi ako cvičenie, prípadne sa odkážeme na dostupnú literatúru.

Dôsledky axióm sčítania a násobenia

Nasledujúca veta rieši otázku jednoznačnosti neutrálnych prvkov vzhľadom na sčítanie a násobenie (alebo tiež aditívnej a multiplikatívnej identity), ako aj jednoznačnosť opačného prvku a prevrátenej hodnoty.

Veta 1.2. *(i)* $(\exists!0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ x + 0 = x;$
(ii) $(\exists!1 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ x \cdot 1 = x;$
(iii) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists!y \in \mathbb{R})\ x + y = 0;$
(iv) $(\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0)(\exists!y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = 1.$

Dôkaz. (i) Predpokladajme, že existujú dva také prvky 0_1 a 0_2, $0_1 \neq 0_2$. Potom

$$0_1 \overset{S_3}{=} 0_1 + 0_2 \overset{S_1}{=} 0_2 + 0_1 \overset{S_3}{=} 0_2 \ \Rightarrow\ 0_1 = 0_2,$$

čo je spor. Analogicky sa dokáže jednoznačnosť čísla 1 s využitím axióm N_3 a N_2.

(iii) Nech $x \in \mathbb{R}$ je také, že k nemu existujú dva opačné prvky y_1 a y_2, $y_1 \neq y_2$. Potom

$$y_2 \overset{S_3}{=} y_2+0 \overset{S_1}{=} 0+y_2 \overset{S_4}{=} (x+y_1)+y_2 \overset{S_2}{=} x+(y_1+y_2) \overset{S_1}{=} x+(y_2+y_1) \overset{S_2}{=} (x+y_2)+y_1 \overset{S_4}{=} 0+y_1 \overset{S_3}{=} y_1,$$

teda $y_1 = y_2$, čo je spor. Analogicky sa ukáže jednoznačnosť prevrátenej hodnoty. $\square$

Poznámka 1.3. Prvok opačný k $x \in \mathbb{R}$ označujeme $-x$, t.j. $x + (-x) = 0$, ale podľa S_1 aj $(-x) + x = 0$, teda opačný prvok k $-x$ je x a platí $-(-x) = x$. Súčet $x + (-y)$ budeme písať v tvare $x - y$ a označovať ako *rozdiel prvkov* x a y. Získaná operácia sa nazýva *odčítanie*.

Poznámka 1.4. Prvok, ktorý je prevrátenou hodnotou k $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, označujeme $\frac{1}{x}$, t.j. $x \cdot \frac{1}{x} = 1$, ale podľa N_1 aj $\frac{1}{x} \cdot x = 1$, teda prevrátená hodnota k $\frac{1}{x}$ je x a platí $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$. Súčin $x \cdot \frac{1}{y}$ budeme písať v tvare $\frac{x}{y}$ a označovať ako *podiel prvkov* x a $y \neq 0$. Takto získanú operáciu nazývame *delenie* (okrem delenia prvkom 0).

Použitím axióm S_1 a S_2 dostávame, že pre každé $x, y, z \in \mathbb{R}$ má výraz $x + y + z$ jednoznačný zmysel. Podobne pomocou axióm N_1 a N_2 má pre každé $x, y, z \in \mathbb{R}$ výraz xyz jednoznačný zmysel. Nasledujúce tvrdenie zavádza narábanie s opačným prvkom k súčtu a prevrátenou hodnotou k súčinu (dokážte!).

Tvrdenie 1.5. *(i)* $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ -(x + y) = -x + (-y)$*;*
(ii) $(\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0, y \neq 0)\ \frac{1}{x \cdot y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$.

Riešiť lineárne rovnice Vás naučili už dávno na základnej škole. Ich princíp však spočíva v nasledujúcej vete.

Veta 1.6. *(i)* $(\forall a, b \in \mathbb{R})(\exists! x \in \mathbb{R})\ a + x = b$*;*
(ii) $(\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)(\exists! x \in \mathbb{R})\ a \cdot x = b$.

Dôkaz. (i) Nech $x \in \mathbb{R}$ je riešením rovnice $a + x = b$. Potom

$$x \overset{S_3}{=} x + 0 \overset{S_1}{=} 0 + x = (a - a) + x = a + (-a) + x \overset{S_2}{=} a + x + (-a) = b + (-a) = b - a.$$

Ukážme teraz, že $x = b - a$ je riešením rovnice $a + x = b$. Teda

$$a + x = a + (b - a) = a + (b + (-a)) \overset{S_2}{=} a + (-a) + b = 0 + b \overset{S_1}{=} b + 0 \overset{S_3}{=} b,$$

čiže $b - a$ vyhovuje rovnici $a + x = b$, teda je jej riešením.

(ii) Nech $x \in \mathbb{R}$ je riešením rovnice $a \cdot x = b$. Potom

$$x \overset{N_3}{=} x \cdot 1 \overset{N_1}{=} 1 \cdot x = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot x = \frac{1}{a} \cdot (a \cdot x) = \frac{1}{a} \cdot b = \frac{b}{a},$$

teda ak x je riešením rovnice $a \cdot x = b$, tak má hodnotu $\frac{b}{a}$ a nemôže sa rovnať žiadnemu inému číslu. Ukážme teraz, že $x = \frac{b}{a}$ vyhovuje rovnici $a \cdot x = b$. Teda

$$a \cdot x = a \cdot \frac{b}{a} = a \cdot \frac{1}{a} \cdot b \overset{N_4}{=} 1 \cdot b \overset{N_1}{=} b \cdot 1 = b,$$

čo sme chceli dokázať. □

✠ Úlohy na premýšľanie

◇ Existuje nekonečne veľa dvojíc $a, b \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí $a + b = a \cdot b$?
◇ Existuje nekonečne veľa dvojíc $a, b \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$?

Dôsledky axióm usporiadania

Veta 1.7. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})$

(i) $x \leq y \wedge y \leq z \wedge x = z \Rightarrow x = y = z$;

(ii) $x < y \wedge y \leq z \Rightarrow x < z$;

(iii) $x \leq y \Leftrightarrow 0 \leq y - x \Leftrightarrow -y \leq -x \Leftrightarrow x - y \leq 0$;

(iv) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$;

(v) $x < y \Leftrightarrow 0 < y - x \Leftrightarrow -y < -x \Leftrightarrow x - y < 0$.

Dôkaz. (i) Plynie priamo z axiómy U_1.

(ii) Ak $x < y$, tak $x \leq y$. Keďže $y \leq z$, tak podľa U_2 je $x \leq z$. Keby $x = z \wedge y \leq z$, tak by $y \leq x$ a potom by z U_1 plynulo, že $x = y$, čo je spor.

(iii) Nech $x \leq y$. Podľa U_3 (t.j. pripočítaním $-x$ k obom stranám) máme $x + (-x) \leq y + (-x)$, teda $0 \leq y - x$. Opätovným použitím U_3 na predchádzajúcu nerovnosť dostávame $x - y \leq 0$ a odtiaľ podľa U_3 zase $x \leq y$.

(iv) Ak $x < y$, tak $x \leq y$. Podľa U_3 máme $x + z \leq y + z$. Keby platilo, že $x + z = y + z$, tak opäť podľa U_3 by $x = y$, čo je spor.

(v) Podobne ako (iii) s využitím (iv). □

Číslo $x \in \mathbb{R}$ budeme nazývať *nezáporným* (*kladným*), akk $0 \leq x$ $(0 < x)$ a *nekladným* (*záporným*), akk $x \leq 0$ $(x < 0)$. Číslo 0 je zrejme jediné nezáporné aj nekladné číslo súčasne.

Veta 1.8 (trichotómia relácie $\leq$). $(\forall x, y \in \mathbb{R})$ $(x < y) \vee (x = y) \vee (y < x)$

Dôkaz. Z totálnosti usporiadania $\leq$ platí aspoň jeden zo vzťahov $x \leq y$, $y \leq x$. Ak $x \leq y \wedge y \leq x$, tak podľa U_1 je $x = y$ a neplatí žiaden iný vzťah. Predpokladajme, že naviac platí aj $x < y$. Potom podľa Vety 1.7 (v) by platilo $0 < y - x$, čo je v spore s tým, že $y - x = 0$. Podobne pre platnosť $y < x$.

Ak platí $x \leq y$, ale $x \neq y$, potom podľa U_1 neplatí $y \leq x$, čiže $x < y$ a žiadny iný vzťah nemôže platiť. Podobne ak platí $y \leq x$, ale $y \neq x$, potom neplatí $x \leq y$, a teda $y < x$. □

Nasledujúce tvrdenie v sebe zhŕňa niekoľko jednoduchých výsledkov (dokážte!).

Tvrdenie 1.9. $(\forall x, y \in \mathbb{R})$

(i) $x > 0 \Rightarrow -x < 0 \wedge \frac{1}{x} > 0$;

(ii) $(x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0) \Rightarrow x \cdot y > 0$;

(iii) $(x > 0 \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge y > 0) \Rightarrow x \cdot y < 0$;

(iv) $(x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge 0 < x < y) \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

Dôležitým dôsledkom tohto tvrdenia (konkrétne časti (ii)) je, že $0 < 1$, pretože nakoľko $0 \neq 1$, tak $1 = 1 \cdot 1 > 0$. Nasledujúca veta sa tiež zvykne označovať ako pravidlo prenásobenia nerovnosti kladným a záporným číslom.

Veta 1.10. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})$

(i) $(x \leq y \wedge z > 0) \Rightarrow xz \leq yz;$

(ii) $(x \leq y \wedge z < 0) \Rightarrow xz \geq yz.$

Dôkaz. (i) Ak $x \leq y$ a $z > 0$, tak $0 \leq y - x$ a $0 \leq z$. Potom

$$0 \overset{U_4}{\leq} z(y-x) \overset{N_5}{=} yz - xz \overset{\text{Veta 1.7 }(iii)}{\Leftrightarrow} xz \leq yz.$$

Analogicky časť (ii). □

✠ Úlohy na precvičenie

Dokážte nasledujúce tvrdenia:
◇ $(\forall x \in \mathbb{R})\ 0 \cdot x = 0;$
◇ $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0;$
◇ $(\forall x \in \mathbb{R})\ -x = (-1) \cdot x;$
◇ $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x \cdot (-y) = -x \cdot y;$
◇ $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, b \neq 0, d \neq 0)\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$
◇ $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, b \neq 0, d \neq 0)\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc;$
◇ $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, b \neq 0, d \neq 0)\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$

1.2 Absolútna hodnota reálneho čísla

Pre dvojprvkovú množinu $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$ číslo x nazývame *minimum* čísel x a y, píšeme $x = \min\{x, y\}$, akk $x \leq y$. V takomto prípade sa číslo y nazýva *maximum* čísel x a y, píšeme $y = \max\{x, y\}$. Matematickou indukciou (pozri časť 1.3) vieme tieto pojmy rozšíriť na ľubovoľný konečný počet, t.j.

$$\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \min\{\min\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}, x_n\},$$
$$\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \max\{\max\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}, x_n\}.$$

Usporiadanie v $\mathbb{R}$ nám umožňuje definovať absolútnu hodnotu reálneho čísla (tiež nazývanú aj modul reálneho čísla).

Definícia 1.11. *Absolútnou hodnotou* čísla $x \in \mathbb{R}$ nazývame maximum dvojice čísel x a $-x$ a píšeme $|x| = \max\{x, -x\}$.

Priamo z definície vyplýva nasledujúce tvrdenie (premyslite si!).

Tvrdenie 1.12. $(\forall x \in \mathbb{R})$

(i) $|x| \geq 0,\ |x| = |-x|;$

(ii) $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x;$

(iii) $x < 0 \Rightarrow |x| = -x.$

Veta 1.13. $(\forall x \in \mathbb{R})\ -|x| \le x \le |x|$

Dôkaz. Keďže podľa predchádzajúceho tvrdenia je $|x| \ge 0$, tak $-|x| \le 0$, teda $-|x| \le 0 \le |x|$. Ak $x > 0$, tak $|x| = x$ a $-|x| < 0 < x = |x|$, teda $-|x| \le x \le |x|$. Ak $x < 0$, tak $|x| = -x > 0$ a $-|x| = x < 0 \le |x|$, teda opäť $-|x| \le x \le |x|$. Ak $x = 0$, tvrdenie platí triviálne, pretože $-|x| = 0 = |x|$. □

Veta 1.14. $(\forall a, x \in \mathbb{R}, a > 0)\ |x| < a \ \Leftrightarrow\ -a < x < a$

Dôkaz. $\Rightarrow$ Ak $x \ge 0$, tak $|x| = x$ a nerovnosť $|x| < a$ má tvar $x < a$. Keďže $a > 0$, potom $-a < 0 \le x < a$, teda $-a < x < a$.

Ak $x < 0$, tak $|x| = -x > 0$ a nerovnosť $|x| < a$ má tvar $-x < a$. Teda $-a < 0 < -x < a$, z čoho máme $a > x > -a$.

$\Leftarrow$ Nech platí $-a < x < a$, teda $x < a$ a súčasne $-x < a$. Položením $|x| = \max\{x, -x\}$ máme $|x| < a$. □

Poznamenajme, že veta zostane v platnosti, ak zameníme znak $<$ znakom $\le$.

Veta 1.15. $(\forall x, y \in \mathbb{R})$

(i) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

(ii) $|x| - |y| \le |x \pm y| \le |x| + |y|$;

(iii) $||x| - |y|| \le |x \pm y|$;

(iv) $y \ne 0 \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Dôkaz. (i) Je potrebné vybaviť štyri prípady, teda (a) $x \ge 0$ a $y \ge 0$, (b) $x \ge 0$ a $y < 0$, (c) $x < 0$ a $y \ge 0$, (d) $x < 0$ a $y < 0$. Ukážeme iba prípad (c), ostatné sú analogické. Ak teda $x < 0$ a $y \ge 0$, tak $|x| = x$, $|y| = -y$, $xy \le 0$ a $|xy| = -xy$. Potom $|xy| = -x \cdot y = (-x) \cdot y = |x| \cdot |y|$.

(ii) Najprv ukážeme platnosť nerovnosti na pravej strane. Podľa Vety 1.13 máme $-|x| \le x \le |x|$ a $-|y| \le y \le |y|$. Sčítaním týchto sústav nerovností máme

$$-|x| - |y| \le x + y \le |x| + |y| \ \Leftrightarrow\ -(|x| + |y|) \le x + y \le |x| + |y|,$$

čo je podľa Vety 1.14 ekvivalentné s nerovnosťou $|x+y| \le |x|+|y|$. Druhá časť tvrdenia so znamienkom $-$ získame nahradením čísla y číslom $-y$ a využitím $|-y| = |y|$.

Pre platnosť nerovnosti na ľavej strane máme

$$|x| = |(x + y) - y| \le |x + y| + |y| \ \Rightarrow\ |x| - |y| \le |x + y|$$

a taktiež

$$|x| = |(x - y) + y| \le |x - y| + |y| \ \Rightarrow\ |x| - |y| \le |x - y|,$$

z čoho dostávame $|x| - |y| \le |x \pm y|$.

(iii) Uvedomme si, že $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$, teda je potrebné dokázať, že

$$-|x \pm y| \le |x| - |y| \le |x \pm y|.$$

Keďže pravú nerovnosť sme ukázali v časti (ii), stačí ukázať platnosť nerovnosti $-|x \pm y| \leq |x| - |y|$. To však dostaneme jednoducho zamenením čísel x a y v časti (ii), teda

$$|y| - |x| \leq |y \pm x| \;\Leftrightarrow\; -(|x| - |y|) \leq |x \pm y| \;\Leftrightarrow\; -|x \pm y| \leq |x| - |y|.$$

(iv) Keďže $x = y \cdot \frac{x}{y}$, potom

$$|x| = \left| y \cdot \frac{x}{y} \right| = |y| \cdot \left| \frac{x}{y} \right| \;\Rightarrow\; \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|},$$

čo sme mali dokázať. □

Nerovnosť $|x+y| \leq |x|+|y|$ sa zvykne nazývať *trojuholníková nerovnosť* a budeme ju hojne využívať. Treba si preto dať pozor na používanie „pravidiel“ typu $|x + y| = |x| + |y|$ a $|x - y| = |x| - |y|$! Náročky sme zamlčali pre aké čísla x, y by mali tieto „pravidlá“ platiť. Existuje nejaká množina čísel, v ktorej by boli tieto pravidlá pravdivé?

Definícia 1.16. *Signum* čísla $x \in \mathbb{R}$ nazývame číslo $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$

Z tejto definície priamo plynú zrejmé vlastnosti čísla $\operatorname{sgn} x$ v súvislosti s absolútnou hodnotou $|x|$ (dokážte!).

Tvrdenie 1.17. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}, z \neq 0)$

(i) $x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$;

(ii) $\operatorname{sgn}(x \cdot y) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y$;

(iii) $|x| = \operatorname{sgn} x \cdot x$;

(iv) $\operatorname{sgn} \frac{x}{z} = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} z$.

Poznámka 1.18. Intuitívnemu pochopeniu pojmov a vzťahov týkajúcich sa reálnych čísel veľmi napomáha geometrické znázorňovanie čísel. Množinu reálnych čísel zvykneme tiež nazývať *číselnou osou* (priamkou s vyznačenými bodmi 0 a 1 ako obrazmi čísel 0 a 1) a reálne čísla interpretujeme ako *body* tejto priamky. Každému číslu odpovedá bod na číselnej osi a každému bodu na číselnej osi reálne číslo. Predpokladáme, že čitateľovi je táto vzájomne jednoznačná korešpondencia medzi reálnymi číslami a bodmi číselnej osi známa. Pripomeňme, že odpovedajúce body a reálne čísla označujeme obvykle tým istým symbolom. Obyčajne ani v reči nerobíme rozdiel medzi číslom a bodom, ktorý ho znázorňuje. Z tohto pohľadu je možné definovať absolútnu hodnotu ako vzdialenosť bodu x na číselnej osi od bodu 0, alebo všeobecnejšie: absolútna hodnota rozdielu dvoch reálnych čísel je vzdialenosť medzi nimi.

Najčastejšími podmnožinami množiny $\mathbb{R}$, s ktorými pracujeme v matematickej analýze, sú intervaly a ich konečné prieniky a zjednotenia.

Ohraničené intervaly s koncovými bodmi $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ sú množiny

$$\begin{aligned}
\langle a, b\rangle &= \{x \in \mathbb{R}; a \le x \le b\} && \text{uzavretý interval;}\\
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} && \text{otvorený interval;}\\
\langle a, b) &= \{x \in \mathbb{R}; a \le x < b\} && \text{polootvorený alebo polouzavretý interval;}\\
(a, b\rangle &= \{x \in \mathbb{R}; a < x \le b\} && \text{polootvorený alebo polouzavretý interval.}
\end{aligned}$$

Číslo a nazývame *ľavým koncovým bodom* a číslo b *pravým koncovým bodom* predchádzajúcich intervalov. Číslo $|\alpha - \beta|$ nazývame *dĺžkou intervalu* s koncovými bodmi α, β bez ohľadu na to, ktorý je ľavý a pravý koncový bod a tiež bez ohľadu na to, či ide o otvorený, uzavretý alebo polouzavretý interval. Teda $b - a$ je dĺžka každého z vyššie uvedených intervalov.

Obvykle sa množina reálnych čísel rozšíri o dve tzv. *nevlastné čísla* $-\infty$ a $+\infty$, ktoré do $\mathbb{R}$ nepatria. Označujeme $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ a nazývame *rozšírenou množinou reálnych čísel* (rozšírenou číselnou osou). V $\mathbb{R}^*$ je usporiadanie definované predpisom $(\forall x \in \mathbb{R})\ -\infty < x < +\infty$, absolútna hodnota predpisom $|\pm\infty| = +\infty$ a operácie $+$ a $\cdot$ predpismi

$$\begin{aligned}
(\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\}) \quad & -\infty + x = -\infty;\\
(\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}) \quad & x + \infty = +\infty;\\
(\forall x \in \mathbb{R}^*, x > 0) \quad & x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty;\\
(\forall x \in \mathbb{R}^*, x < 0) \quad & x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty;\\
(\forall x \in \mathbb{R}) \quad & \frac{x}{\pm\infty} = 0,
\end{aligned}$$

tiež kladieme $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Nasledujúce výrazy nie sú definované (niekedy sa označujú aj ako *neurčité výrazy*):

$$-\infty + \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{\text{čokoľvek}}{0}.$$

Teraz už môžeme hovoriť o *neohraničených intervaloch* s koncovými bodmi $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(-\infty, a\rangle &= \{x \in \mathbb{R}; x \le a\};\\
(-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R}; x < a\};\\
\langle b, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; b \le x\};\\
(b, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; b < x\}.
\end{aligned}$$

O každom z týchto intervalov hovoríme, že je *nekonečnej dĺžky*.

Poznámka 1.19. Pri definícii intervalov sme vychádzali z predpokladu $a < b$. Tento predpoklad ale nie je z formálneho hľadiska nevyhnutný a a, b by mohli byť ľubovoľné čísla. Ak by platilo $a > b$, potom by bol každý zo spomenutých intervalov prázdnou množinou. Ak by platilo $a = b$, potom by jedinou neprázdnou množinou bol uzavretý interval $\langle a, b\rangle$, pričom by predstavoval jednoprvkovú množinu $\langle a, b\rangle = \{a\}$. V každom prípade by sme mali do činenia s objektami, ktoré v našej mysli nie sú intuitívne zviazané s pojmom interval. Niekedy sa preto odlišujú pojmami degenerovaný a nedegenerovaný interval.

Poznámka 1.20. V tomto učebnom texte, ako aj na prednáškach, je použité označovanie intervalov historicky zaužívané najmä v európskych krajinách. V niektorých prácach sa ale môžete stretnúť aj s nasledovným označením, ktoré je takmer výhradne používané v americkej literatúre: $]a, b[$ namiesto (a, b) a $[a, b]$ namiesto $\langle a, b\rangle$. Podobne polouzavreté intervaly $]a, b]$ namiesto $(a, b\rangle$ a $[a, b[$ namiesto $\langle a, b)$.

1.3 Matematická indukcia

Teraz z množiny reálnych čísel vyčleníme niektoré významné podmožiny čísel. Častokrát sa stretávame s opačným postupom: najprv sa vybuduje aparát pre narábanie s prirodzenými, celými a racionálnymi číslami (k operácii sčítania a násobenia sa pridá operácia odčítania a delenia nenulovým prvkom) a nakoniec sa tieto zúplnia a získa sa množina reálnych čísel (napr. v úvode spomínanými Dedekindovými rezmi alebo Cantorovými triedami ekvivalencií racionálnych cauchyovských postupností). My sme však v opačnej situácii, pretože máme množinu reálnych čísel zavedenú systémom axióm, ktoré nám umožňujú jednoducho definovať tieto množiny.

Definícia 1.21. *Množinou všetkých prirodzených čísel* $\mathbb{N}$ nazývame najmenšiu podmnožinu množiny $\mathbb{R}$, ktorá obsahuje číslo 1 a s každým číslom n aj číslo $n + 1$.

Hneď je potrebné poznamenať, že by bolo potrebné ukázať korektnosť takejto definície, t.j. existenciu množiny $\mathbb{N}$. K tomu by sme ale potrebovali mať hlbšie poznatky z teórie množín, a preto to robiť nemôžeme. Poznamenajme, že prvú korektnú konštrukciu množiny prirodzených čísel publikoval John von Neumann[1] (1903–1957).

Máme teda, že $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, n + 1, \dots\}$. Všimnime si, že v $\mathbb{N}$ platia axiómy S_1, S_2, N_1, N_2, N_3 a N_5. Ostatné axiómy však neplatia, napr. S_3, S_4 a N_4 neplatia, pretože také čísla v $\mathbb{N}$ neexistujú. Taktiež odčítanie a delenie nie sú operácie v $\mathbb{N}$ (až na delenie číslom 1).

So zavedenou definíciou prirodzených čísel úzko súvisí aj princíp matematickej indukcie. V podstate ide o „domino efekt“, t.j. ak máme za sebou naukladané kocky domina, tak zhodenie jednej kocky spustí lavínu padania ďalších kociek.

Veta 1.22 (o matematickej indukcii). *Nech sa nejaký výrok V týka množiny prirodzených čísel a*

(i) nech V platí pre číslo 1,

(ii) ak V platí pre nejaké $n \in \mathbb{N}$, tak platí aj pre $n + 1$.

Potom V platí pre každé prirodzené číslo.

Dôkaz. Nech A je množina tých prirodzených čísel, pre ktoré platí výrok V. Potom $A \subseteq \mathbb{N}$. Ale podľa predpokladu $1 \in A$ a s každým $n \in \mathbb{N}$ je $n \in A$, tak aj $n + 1 \in A$, teda $\mathbb{N} \subseteq A$. Preto $A = \mathbb{N}$, čiže V platí pre každé prirodzené číslo. □

[1] čítaj „fon Nojman“

Poznámka 1.23. Niekedy výrok $V(n)$ platí nie pre všetky prirodzené čísla n, ale iba pre každé prirodzené číslo n, ktoré je väčšie ako niektoré prirodzené číslo n_0. V takom prípade sa v prvej časti dôkazu overí platnosť výroku pre $n = n_0$ a v druhej časti sa dokáže platnosť implikácie $V(k) \Rightarrow V(k+1)$ pre $k \geq n_0$.

Poznámka 1.24. Niekto by tiež mohol namietať, že v princípe matematickej indukcie nevidí výhodu, pretože musí dokazovať platnosť $V(1)$ a ďalej pre každé k aj platnosť $V(k+1)$, čo vyjde na to isté ako dokazovať $V(n)$ pre každé n. To ale nie je pravda, pretože pri dokazovaní platnosti výroku $V(k+1)$ môže zadarmo používať výrok $V(k)$. Nedokazujeme totiž platnosť výroku $V(k)$, ale platnosť implikácie $V(k) \Rightarrow V(k+1)$, čo je častokrát ľahšie ako dokázať priamo $V(n)$.

Veta o matematickej indukcii môže tiež vhodne poslúžiť pri zavedení nových pojmov tzv. rekurentným spôsobom. Ak teda máme definovať istý pojem $P(n)$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, stačí definovať $P(1)$ a zadať algoritmus, na základe ktorého z pojmu $P(k)$ definujeme pojem $P(k+1)$ pre $k \in \mathbb{N}$. Tým je pojem $P(n)$ definovaný pre každé n. Napríklad faktoriál čísla $n \in \mathbb{N}$ je daný predpisom $1! = 1$ a pre každé $n \in \mathbb{N}, n > 2$ je $n! = n(n-1)$.

Nasledujúca definícia je len pripomenutie základných číselných množín známych zo strednej školy tak, ako ich vyčleňujeme z množiny reálnych čísel.

Definícia 1.25. *Množinou všetkých celých čísel* $\mathbb{Z}$ nazývame zjednotenie množiny $\mathbb{N}$, množiny všetkých čísel opačným k prvkom $\mathbb{N}$ a jednoprvkovej množiny obsahujúcej číslo 0. Jej prvky nazývame *celé čísla*. *Množinou všetkých racionálnych čísel* $\mathbb{Q}$ nazývame množinu všetkých podielov $\frac{x}{y}$, kde $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{N}$. Prvky množiny $\mathbb{Q}$ nazývame *racionálne čísla*. Reálne čísla, ktoré nie sú racionálne, nazývame *iracionálne čísla*.

Všimnime si, že $(\mathbb{Z}, +, 0)$ je abelovská aditívna grupa[2] (overte, že platia príslušné axiómy), ale $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ nie je multiplikatívna grupa, pretože neplatí axióma N_4. Tá začne platiť až v množine $\mathbb{Q}$ a hoci by sa zdalo, že si vystačíme s racionálnymi číslami, nie je to pravda, čo zistili už starovekí Gréci. K tomu, či v $\mathbb{Q}$ platí aj axióma (H), sa dostaneme v nasledujúcej kapitole.

Množinu nazývame *konečnou*, akk existuje prirodzené číslo n tak, že jej prvky možno očíslovať prirodzenými číslami nie väčšími ako n. Očíslovať elementy danej množiny pritom znamená priradiť každému prvku jedno číslo a to tak, že dvom rôznym prvkom sú priradené rôzne prirodzené čísla. Množinu, ktorá nie je konečná, nazývame *nekonečnou* (napríklad množina $\mathbb{N}$). Samozrejme je možné zaviesť pojem konečnej a nekonečnej množiny aj ináč a matematicky korektnejšie, ale to prenecháme vyučujúcim na predmete Teória množín.

Veta 1.26 (o maxime a minime konečnej množiny). *Každá neprázdna konečná množina má maximum a minimum.*

Skúste si vydiskutovať úlohu neprázdnosti množiny v tejto vete. Dôkaz beží matematickou indukciou vzhľadom na počet prvkov danej množiny, a preto je nezaujímavý (prenechávame čitateľovi ako cvičenie).

---

[2] na algebre vás naučia dokonca viac, že $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je obor integrity!

Veta 1.27 (o dobrom usporiadaní). *Každá neprázdna množina prirodzených čísel má minimum.*

Dôkaz. Nech $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $n_0 \in A$ a v množine $\mathbb{N}$ existuje práve n_0 čísel menších alebo rovných n_0. Potom v A existuje najviac n_0 čísel menších alebo rovných n_0, ktoré predstavujú konečnú neprázdnu množinu (aspoň n_0 tam patrí). Podľa vety o maxime a minime konečnej množiny existuje teda minimum tejto množiny, ktoré je zároveň minimom množiny A. $\square$

Poznámka 1.28. Veta dostala svoj názov preto, lebo v inej reči sa dá ekvivalentne formulovať nasledovne: **Množina $\mathbb{N}$ je dobre usporiadaná**. Pritom množina M je dobre usporiadaná, akk je lineárne usporiadaná reláciou $\leq$ a každá jej neprázdna podmnožina má v tomto usporiadaní najmenší prvok.

✠ Úlohy na precvičenie

Dokážte, že

◇ $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{2n+1}$;
◇ $(\forall n \in \mathbb{N})\ -1 + 2 - 3 + 4 + \cdots + (-1)^n n = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$;
◇ $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$;
◇ $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3)\ (n+1)^n < n^{n+1}$;
◇ *Bernoulliho nerovnosť*: $(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\})(\forall x \in \mathbb{R}, x > -1)\ (1+x)^n \geq 1 + nx$;
◇ *Binomická veta*: $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall a, b \in \mathbb{R})\ (a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$;
◇ ak $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tak

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{a} \quad \left|\prod_{i=1}^{n} x_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |x_i|.$$

1.4 Axióma (H) o hornej hranici

V tejto časti sa konečne dopracujeme k dôsledkom axiómy o hornej hranici, ktorá je veľmi dôležitou vlastnosťou množiny reálnych čísel. Bez tejto axiómy by sme mali súbor axióm, ktoré definujú pole reálnych čísel ako reťazec, avšak existuje mnoho neizomorfných modelov vyhovujúcich týchto axiómam. Keď však k týmto axiómam pridáme axiómu (H), je možné ukázať, že existuje len jediný model reálnych čísel a všetky ostatné modely sú s ním izomorfné.

Axiómu (H) prvýkrát sformuloval a dokázal (ako vlastnosť množiny $\mathbb{R}$) v roku 1817 Bernard Bolzano (1781–1848), preto sa niekde zvykne označovať aj ako *Bolzanov princíp*. Dnes vieme, že táto vlastnosť sa dá ekvivalentne nahradiť inými tvrdeniami, s ktorými sa stretneme neskôr a upozorníme aj na tento fakt. Najprv si ale zavedieme niekoľko potrebných tvrdení, aby sme sa vedeli kratšie vyjadrovať v súvislosti s axiómou (H).

Definícia 1.29. Neprázdnu množinu $M \subset \mathbb{R}$ nazývame *ohraničenou zhora* (*zdola*), akk existuje $H \in \mathbb{R}$ ($D \in \mathbb{R}$) také, že pre každé $x \in M$ platí $x \leq H$ ($x \geq D$). Každé číslo H (D) s touto vlastnosťou nazývame *horným* (*dolným*) *ohraničením* množiny M. Neprázdnu množinu $M \subset \mathbb{R}$ nazývame *ohraničenou*, akk je ohraničená zhora a zdola. Hovoríme, že M je *neohraničená* (zhora, zdola), akk M nie je ohraničená (zhora, zdola).

Všimnime si, že ak M je ohraničená zhora (zdola) číslom H (D), tak je ohraničená zhora (zdola) aj ľubovoľným číslom väčším ako H (menším ako D). Ak pojem ohraničenosti množiny M zapíšeme pomocou kvantifikátorov, dostávame

$$(\exists H \in \mathbb{R})(\exists D \in \mathbb{R})(\forall x \in M)\ D \leq x \leq H,$$

čo nie je veľmi príjemné, pretože obsahuje veľa kvantifikátorov. Našťastie pojem absolútnej hodnoty nám pomôže odstrániť jeden existenčný kvantifikátor.

Veta 1.30. *Neprázdna množina $M \subset \mathbb{R}$ je ohraničená práve vtedy, keď $(\exists K \in \mathbb{R}, K > 0)(\forall x \in M)\ |x| \leq K$.*

Dôkaz. $\Rightarrow$ Keďže M je ohraničená, tak $(\exists H \in \mathbb{R})(\exists D \in \mathbb{R})(\forall x \in M)\ D \leq x \leq H$. Položme $K = \max\{|D|, |H|\}$. Potom pre každé $x \in M$ platí

$$-K = -\max\{|D|, |H|\} \leq -|D| \leq D \leq x \leq H \leq |H| \leq \max\{|D|, |H|\} = K,$$

teda $(\exists K \in \mathbb{R}, K > 0)(\forall x \in M)\ |x| \geq K$.

$\Leftarrow$ Ak $(\exists K \in \mathbb{R}, K > 0)(\forall x \in M)\ |x| \geq K$, tak $(\forall x \in M)\ -K \leq x \leq K$, čo znamená, že K je horné ohraničenie M a $-K$ je dolné ohraničenie M, čiže M je ohraničená. $\square$

Definícia 1.31. Nech $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Číslo $d \in M$ ($c \in M$) nazývame *maximum* (*minimum*) množiny M a píšeme $d = \max M$ ($c = \min M$), akk $(\forall x \in M)\ x \leq d$ ($c \leq x$).

Z definície je zrejmé, že čísla $\max M$ a $\min M$ patria do množiny M, teda ide o najväčší a najmenší prvok danej množiny. Taktiež z toho vyplýva, že ak M má maximum (minimum), potom M je ohraničená zhora (zdola). Opačná implikácia neplatí, pretože napríklad $M = (0, 1)$ je ohraničená množina (zhora aj zdola), ale nemá maximum, ani minimum, pretože $0 \notin M$, $1 \notin M$. Intuitívne ale cítime, že číslo 1 je to „najlepšie zo všetkých horných ohraničení“, presnejšie najmenšie z nich v tom zmysle, že žiadne menšie číslo od neho už nemôže byť horným ohraničením množiny M, a teda by malo byť určitou charakteristikou množiny M. A tu pristupuje do hry axióma (H). V zmysle zavedených pojmov ju môžeme zjednodušene vyjadriť nasledovne: **Každá neprázdna zhora ohraničená množina reálnych čísel má najmenšie horné ohraničenie**. V znení axiómy (H) je ním číslo S, ktoré nazývame *supremum množiny* M a označujeme $S = \sup M$. Totiž vlastnosť (i) axiómy (H) hovorí, že S je horné ohraničenie množiny M a vlastnosť (ii) zasa hovorí, že žiadne číslo menšie ako S nie je horným ohraničením množiny M. Inými slovami, ak si vezmeme reálne číslo $t < S$ ľubovoľne blízko čísla S, vždy dokážeme nájsť prvok množiny M, ktorý je k číslu S ešte bližšie. Teda v spomenutom príklade množiny $M = (0, 1)$ je $\sup M = 1$, ale neexistuje $\max M$. Teda ohraničenosť zhora nie je postačujúcou podmienkou existencie maxima, iba nutnou. Na druhej strane, množina $M = (0, 1\rangle$ má tiež $\sup M = 1$, ale teraz toto supremum do množiny M patrí a je zároveň jej maximom. Na základe týchto úvah máme jednoduchý výsledok.

Veta 1.32. *Nech* $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. *Ak existuje* $\max M$, *tak existuje aj* $\sup M$ *a platí* $\max M = \sup M$.

Dôkaz. Ak M má maximum, tak je ohraničená zhora a podľa axiómy (H) existuje supremum množiny M. Keďže $\max M \in M$, tak z prvej vlastnosti suprema platí, že $\max M \leq \sup M$. Keďže $\max M$ je horné ohraničenie množiny M a $\sup M$ je najmenšie horné ohraničenie, tak $\sup M \leq \max M$. Teda $\max M = \sup M$. □

V predchádzajúcej kapitole sme otvorili otázku, či v množine racionálnych čísel platí axióma (H). Teraz už vieme jednoducho argumentovať, že množina $A = \{x \in \mathbb{Q}; x \leq \sqrt{2}\}$[3] je neprázdna a zhora ohraničená (napr. číslom 2), teda podľa axiómy (H) platiacej v množine $\mathbb{R}$ existuje $\sup A = \sqrt{2}$. Avšak ako vieme, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (zopakujte si dôkaz!). Teda „$\mathbb{Q}$ je takmer to, čo množina $\mathbb{R}$“, t.j. platia v nej všetky axiómy Definície 1.1 okrem axiómy (H)!

V niektorých úvahách, hlavne v časti o postupnostiach, sa nám bude hodiť nasledujúca formulácia suprema (všimnime si, že sme preformulovali iba druhú vlastnosť).

Veta 1.33. *Nech* $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. *Číslo* $S \in \mathbb{R}$ *je supremom množiny* M *práve vtedy, keď*

(i') $(\forall x \in M)\ x \leq S$;

(ii') $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_0 \in M)\ S - \varepsilon < x_0$.

Dôkaz. $\Rightarrow$ Nech $S = \sup M$, ale neplatí (ii'). Potom $(\exists \varepsilon > 0)(\forall x_0 \in M)\ x_0 \leq S - \varepsilon$, teda $S - \varepsilon$ je horné ohraničenie množiny M. Keďže S je najmenšie horné ohraničenie, tak $S \leq S - \varepsilon$, z čoho dostávame spor $\varepsilon \leq 0$.

$\Leftarrow$ Nech platí (ii'), ale S nie je supremum množiny M, t.j. $(\exists t \in \mathbb{R}, t < S)(\forall x_0 \in M)\ x_0 \leq t$, t.j. t je horné ohraničenie množiny M. Zoberme $\varepsilon = S - t$, teda $(\exists x_1 \in M)\ x_1 > S - \varepsilon = S - (S - t) = t$, čo je spor s horným ohraničením množiny M. □

Aby sme sa dopracovali k odpovedi na podobnú otázku o existencii najväčšieho dolného ohraničenia množiny, budeme potrebovať nasledujúci jednoduchý výsledok.

Lema 1.34. *Nech* $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ *a* $M' = \{-x; x \in M\}$. *Potom*

(i) ak M *je ohraničená zhora (zdola), tak* M' *je ohraničená zdola (zhora);*

(ii) ak H *(*D*) je horné (dolné) ohraničenie množiny* M, *tak* $-H$ *(*$-D$*) je dolné (horné) ohraničenie množiny* M';

(iii) ak M *je neohraničená zhora (zdola), tak* M' *je neohraničená zdola (zhora).*

Dôkaz. Zrejme, ak dokážeme časť (ii), máme dokázanú aj časť (i). Nech teda H je horné ohraničenie množiny M, teda $(\forall x \in M)\ x \leq H$. Nech $y \in M'$ je ľubovoľné. Keďže $y = -(-y)$, tak $-y \in M$, a teda $-y \leq H \Leftrightarrow y \geq -H$. Z toho máme, že $(\forall y \in M')\ y \geq -H$, t.j. $-H$ je dolné ohraničenie množiny M'.

Ostáva dokázať časť (iii). Nech M je neohraničená zhora, t.j. $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists x_0 \in M)\ x_0 > \alpha$. Z ľubovoľnosti čísla $\alpha \in \mathbb{R}$ vyplýva ľubovoľnosť čísla $-\alpha \in \mathbb{R}$ a z faktu $x_0 > \alpha \Leftrightarrow -x_0 < -\alpha$ vidíme, že $(\forall - \alpha \in \mathbb{R})(\exists - x_0 \in M')\ - x_0 < -\alpha$, teda M' je neohraničená zdola. □

[3] k tomu, čo je to číslo $\sqrt{2}$ a ako je konštruované, sa dostaneme onedlho

Veta 1.35 (o existencii a jednoznačnosti najväčšieho dolného ohraničenia). *Nech $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ je zdola ohraničená množina. Potom existuje práve jedno reálne číslo s s vlastnosťami*

(i) $(\forall x \in M)\ s \leq x$;

(ii) $(\forall t \in \mathbb{R}, t > s)(\exists x_0 \in M)\ x_0 < t$.

Dôkaz. Ak neprádna množina $M \subset \mathbb{R}$ je zdola ohraničená, tak podľa Lemy 1.34 (i) je neprázdna množina $M' = \{-x; x \in M\}$ zhora ohraničená, teda podľa axiómy (H) existuje jej supremum. Položme $S' = \sup M'$ a $s = -S'$. Keďže S' je horné ohraničenie M', tak s je dolné ohraničenie M, teda $(\forall x \in M)\ x \geq s$. Tiež $(\forall t \in \mathbb{R}, t > s)\ -t < -s = S'$ a podľa druhej vlastnosti suprema vieme, že $(\exists y_0 \in M')\ -t < y_0$. Potom však $-y_0 < t$ a $x_0 = -y_0 \in M$. Z toho teda vyplýva, že $(\forall t \in \mathbb{R}, t > s)(\exists x_0 \in M)\ x_0 < t$, čo znamená, že $s = -S'$ má aj požadovanú vlastnosť (ii). Jednoznačnosť plynie z jednoznačnosti suprema. $\square$

Poznámka 1.36. Číslo s majúce vlastnosti predchádzajúcej vety sa nazýva *infimum množiny* M a označuje sa $s = \inf M$. Pre každú neprázdnu množinu $M \subset \mathbb{R}$ platí $\inf M \leq \sup M$. Analogicky ako v prípade suprema (Veta 1.33) môžeme infimum s neprázdnej zdola ohraničenej množiny M charakterizovať vlastnosťami

(i') $(\forall x \in M)\ s \leq x$;

(ii') $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_0 \in M)\ x_0 < s + \varepsilon$.

a taktiež platí nasledujúci vzťah medzi infimom a minimom: ak existuje $\min M$, tak existuje aj $\inf M$ a platí $\min M = \inf M$.

Veta 1.37. *Nech $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ a $(\forall x \in A)(\forall y \in B)\ x \leq y$. Potom A je zhora ohraničená, B je zdola ohraničená a* $\sup A \leq \inf B$.

Dôkaz. Keďže pre ľubovoľné $x \in A$ a $y \in B$ platí $x \leq y$, tak y je horným ohraničením množiny A a podľa axiómy (H) existuje $\sup A$. Naviac $\sup A$ je najmenšie horné ohraničenie množiny A, tak $(\forall y \in B)\ \sup A \leq y$, čiže B je ohraničená zdola číslom $\sup A$ a podľa vety o existencii a jednoznačnosti infima existuje $\inf B$. Keďže $\inf B$ je najväčšie dolné ohraničenie množiny B, tak $\sup A \leq \inf B$. $\square$

Nech $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^*$. Ak M je zhora ohraničená, tak podľa axiómy (H) existuje $\sup M \in \mathbb{R}$. V prípade zhora neohraničenej množiny M kladieme $\sup M = +\infty$. Podobne, ak M je zdola ohraničená, tak podľa Vety 1.35 existuje $\inf M \in \mathbb{R}$. V prípade zhora neohraničenej množiny M kladieme $\inf M = -\infty$. Z týchto úvah vyplýva

Tvrdenie 1.38. $(\forall M \subseteq \mathbb{R}^*, M \neq \emptyset)(\exists \inf M \in \mathbb{R}^* \wedge \exists \sup M \in \mathbb{R}^*)$

Poznámka 1.39. Ak $M = \emptyset$, tak každé $x \in \mathbb{R}^*$ je horným aj dolným ohraničením množiny M, preto kladieme $\sup \emptyset = -\infty$ a $\inf \emptyset = +\infty$. Na základe toho teda v množine $\mathbb{R}^*$ môžeme tvrdiť, že $(\forall M \subseteq \mathbb{R}^*)(\exists \inf M \in \mathbb{R}^* \wedge \exists \sup M \in \mathbb{R}^*)$.

✠ Úlohy na premýšľanie

◇ Je možné v definícii absolútnej hodnoty zobrať supremum namiesto maxima?
◇ Nájdite príklad množiny M, pre ktorú

(i) $\sup M = \inf M$;

(ii) $\sup M > \max M$;

(iii) $\min M$ existuje a $\inf M$ neexistuje;

(iv) existujú $\inf M$ a $\min M$, ale nerovnajú sa.

◇ Určte $\max M$, $\min M$, $\sup M$ a $\inf M$, ak $M = M_{a,b} = \{a \sin x + b; x \in \mathbb{R}\}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1.5 Niektoré dôležité vlastnosti reálnych čísel

Začnime tvrdením, ktoré je priamym pokračovaním úvah a výsledkov predchádzajúcich častí.

Veta 1.40 (Archimedov princíp). *Množina $\mathbb{N}$ je zhora neohraničená.*

Dôkaz. Predpokladajme, že $\mathbb{N}$ je zhora ohraničená, t.j. podľa axiómy (H) existuje $\sup \mathbb{N} = S$. Položme $t = S - 1$. Keďže $t < S$, potom podľa druhej vlastnosti suprema k nemu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $t < n_0$, čiže $t = S - 1 < n_0 \Leftrightarrow S < n_0 + 1$. Avšak $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$, čo znamená, že S nie je najmenším horným ohraničením $\mathbb{N}$, čo je spor. □

Nasledujúca veta dostala svoj názov, pretože je ekvivalentná s tvrdením, že **pole $\mathbb{R}$ je archimedovské**.

Veta 1.41 (Archimedova vlastnosť). $(\forall x, y \in \mathbb{R}, x > 0)(\exists n \in \mathbb{N})\ nx > y$

Dôkaz. Keďže $nx > y \Leftrightarrow n > \frac{y}{x}$, predpokladajme, že tvrdenie neplatí, t.j. $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \leq \frac{y}{x}$, čo by znamenalo, že $\mathbb{N}$ je zhora ohraničená, čo je v spore s Archimedovým princípom. □

Poznámka 1.42. Archimedova vlastnosť sa dá sformulovať a dokázať aj trochu všeobecnejšie v nasledujúcom tvare:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}, x > 0)(\exists k \in \mathbb{Z})\ kx \leq y < (k+1)x.$$

Ak teraz položíme $x = 1$, tak $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{Z})\ k \leq y < (k+1)$. Takéto číslo $k \in \mathbb{Z}$ nazývame *celou časťou* reálneho čísla y a označujeme $[y]$ alebo tiež historicky zaužívané označenie $E(y)$. Budeme používať obe označenia voľne. Takže celá časť reálneho čísla y je najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako číslo y. Platia preto nasledujúce nerovnosti

$$[y] \leq y < [y] + 1 \quad \text{a} \quad y - 1 < [y] \leq y.$$

Zrejme potom $E(4{,}265) = 4$, $E(0{,}12) = 0$ a $E(-2{,}89) = -3$.

Veta 1.43 (o hustote racionálnych čísel v číslach reálnych). $(\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y)(\exists r \in \mathbb{Q})\ x < r < y$

Dôkaz. Vybavíme tri prípady. Nech $x, y \in \mathbb{R}$. Ak $x < 0 < y$, tak hľadané $r = \frac{0}{1} \in \mathbb{Q}$.

Ak $0 \leq x < y$, položme $\varepsilon = y - x > 0$. Zrejme, $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ a podľa Archimedovho princípu existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$. Nech m je najmenšie také prirodzené číslo, že $\frac{m}{n} > x$ (jeho existencia plynie z Vety 1.27 o dobrom usporiadaní), t.j.

$$\frac{m-1}{n} \leq x < \frac{m}{n} \;\Leftrightarrow\; \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \leq x < \frac{m}{n} \;\Leftrightarrow\; \frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + \varepsilon = x + (y - x) = y.$$

Teda $x < \frac{m}{n} < y$, kde $\frac{m}{n} = r$ je hľadané racionálne číslo.

Ak $x < y \leq 0$, prejdime k opačným číslam, teda $0 \leq -y < -x$. Podľa predošlej časti dôkazu $(\exists p \in \mathbb{Q})\ -y < p < -x$, teda $x < -p < y$. Položením $-p = r \in \mathbb{Q}$ máme výsledok. $\square$

Dôsledok 1.44 (o hustote iracionálnych čísel v číslach reálnych). $(\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y)(\exists p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\ x < p < y$

Dôkaz. Nech $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Potom $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2}$ a podľa vety o hustote racionálnych čísel v číslach reálnych existuje $r \in \mathbb{Q}$ také, že $x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2} \Leftrightarrow x < r + \sqrt{2} < y$. Položením $p = r + \sqrt{2}$ máme hľadané iracionálne číslo. $\square$

✠ Úlohy na precvičenie

◇ Pre ktoré čísla $x, y \in \mathbb{R}$ platia vzťahy $E(x+y) = E(x)+E(y)$ a $E(xy) = E(x)E(y)$?
◇ Dokážte *Hermiteovu rovnosť*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})\ E(x) + E\left(x + \frac{1}{n}\right) + \cdots + E\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = E(nx).$$

Pomôcka: použite matematickú indukciu vzhľadom na $k \in \mathbb{N}$ také, že $\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}$.
◇ Dokážte, že súčet racionálneho čísla a iracionálneho čísla je iracionálne číslo.

1.6 Mocnina, odmocnina a logaritmus

V tejto časti uvedieme definície a základné vlastnosti niektorých čísel, ktoré sú zaujímavé a dôležité z hľadiska matematickej analýzy.

Mocnina s celočíselným exponentom

Definícia 1.45. Nech $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Číslo x^n dané predpisom $x^1 = x$ a $x^n = x^{n-1} \cdot x$ pre $n > 1$ nazývame *n-tou mocninou* čísla x. Číslo x nazývame *základ* a číslo n *exponent* (mocniteľ). Pre $x \in \mathbb{R}$ kladieme $x^0 = 1$ a pre $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $n \in \mathbb{N}$ kladieme $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

Veta 1.46. $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\forall m, n \in \mathbb{Z})\ x^n \cdot x^m = x^{n+m} \wedge (x^n)^m = x^{n \cdot m}$

Dôkaz. Matematickou indukciou vzhľadom na exponent m. □

✠ Úlohy na precvičenie

Dokážte nasledujúce tvrdenia:
◇ $(\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\forall p \in \mathbb{Z})\ (xy)^p = x^p \cdot y^p$;
◇ $(\forall x \in \mathbb{R}, x > 1)(\forall n \in \mathbb{N})\ x^n > x^{n-1} > \cdots > x > 1$;
◇ $(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1)(\forall n \in \mathbb{N})\ x^n < x^{n-1} < \cdots < x < 1$;
◇ $(\forall x, y \in \mathbb{R}, 0 < x < y)(\forall n \in \mathbb{N})\ x^n < y^n$.

Aritmetická n-tá odmocnina

Čo je to číslo $\sqrt{2}$? Väčšina by asi odpovedala, že ide o dĺžku prepony v pravouhlom trojuholníku s odvesnami dĺžky 1. Ale ako ho hľadať, resp. ako je konštruované? Zrejme,

$$\begin{gathered} 1^2 < 2 < 2^2 \\ 1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2 \\ 1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2 \\ 1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2 \\ \vdots \end{gathered}$$

Uvažujme teda množinu $A = \{1{,}4^2; 1{,}41^2; 1{,}414^2; \ldots\}$. Ide o neprázdnu množinu, ktorá je ohraničená zhora číslom 2, teda existuje $\sup A$. Dokážme, že $\sup A = 2$.

Ako vidieť z konštrukcie, tak $(\forall z \in A)\ z \leq 2$. Aby sme ukázali platnosť druhej vlastnosti suprema, položme $x_1 = 1{,}4$, $x_2 = 1{,}41$, $x_3 = 1{,}414, \ldots$ Z konštrukcie vieme, že $(\forall n \in \mathbb{N})\ \left(x_n + \frac{1}{10^n}\right)^2 > 2$ a tiež $x_n^2 < 2$. Potom

$$\begin{aligned} \left(x_n + \frac{1}{10^n}\right)^2 - x_n^2 &= x_n^2 + \frac{2x_n}{10^n} + \left(\frac{1}{10^n}\right)^2 - x_n^2 = \frac{1}{10^n}\left(2x_n + \frac{1}{10^n}\right) \\ &< \frac{1}{10^n}\left(2 \cdot 2 + \frac{1}{10^n}\right) < \frac{1}{10^n}(4+1) = \frac{5}{10^n}, \end{aligned}$$

teda

$$x_n^2 > \left(x_n + \frac{1}{10^n}\right)^2 - \frac{5}{10^n} > 2 - \frac{5}{10^n} = 1,\underbrace{99\ldots95}_{n}.$$

Ak teda vezmeme $t \in \mathbb{R}$ ľubovoľne blízko k číslu 2, potom k nemu dokážeme nájsť $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $x_{n_0}^2 > t$, čo dokazuje druhú vlastnosť suprema, a teda

$$\sqrt{2} = \sup\{z \in \mathbb{R}; z^2 \leq 2\}.$$

Presne na tomto princípe je založená nasledujúca dôležitá veta.

Veta 1.47 (o existencii a jednoznačnosti aritmetickej n-tej odmocniny). $(\forall x \in \mathbb{R}, x > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists! y \in \mathbb{R}, y > 0)\ y^n = x$

Dôkaz tohto tvrdenia je možné nájsť v [5]. Číslo y vo vete nazývame *n-tou odmocninou* čísla x a píšeme $y = \sqrt[n]{x}$. Pre $n = 1$ sa nezvykne označovať $y = \sqrt[1]{x}$, pretože to znamená zápis $y = x$.

Poznámka 1.48. Iracionálne číslo $\sqrt{2}$ sa v matematike zaraďuje do skupiny tzv. *algebraických čísel*, t.j. čísel, ktoré sú koreňom nejakého polynómu s celočíselnými koeficientami. V prípade čísla $\sqrt{2}$ ide o polynóm $x^2 - 2$. Okrem nich existuju aj tzv. *transcendentné čísla*, ktoré nie sú koreňom žiadneho takého polynómu. Jedno z najznámejších je napríklad Ludolfovo číslo π. Neskôr sa stretneme aj s ďalším takýmto významným číslom, ktorým je pre analýzu Eulerovo číslo e.

Veta 1.49. $(\forall x, y \in \mathbb{R}, x > 0, y > 0)(\forall m, n \in \mathbb{N})\ \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \wedge \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$

Dôkaz. Označme $\sqrt[n]{x} = u$, $\sqrt[n]{y} = v$ a $\sqrt[n]{xy} = w$, t.j. $x = u^n$, $y = v^n$ a $xy = w^n$. Potom

$$w^n = xy = u^n \cdot v^n = (uv)^n \ \Rightarrow\ w = uv \ \Rightarrow\ \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}.$$

Podobne druhá časť tvrdenia. □

Poznámka 1.50. Jednoznačnosť n-tej odmocniny v $\mathbb{R}$ implikuje jednoznačnosť aj v jej podoboroch. Neplatí to však napríklad už v komplexných číslach: v $\mathbb{R}$ je $1 = \sqrt{1} = \sqrt[4]{1}$, ale v komplexných číslach sú dve druhé odmocniny z 1 (t.j. ± 1) a dokonca štyri štvrté odmocniny z 1 (t.j. ± 1, $\pm$i)!

Rozšírme pojem n-tej odmocniny o n-tú odmocninu z 0 a pre nepárne prirodzené číslo n aj o n-tú odmocninu zo záporného čísla. Z definície n-tej mocniny plynie, že $0^n = 0$, a preto kladieme $\sqrt[n]{0} = 0$. Ak $x < 0$ a n je nepárne prirodzené číslo, tak $\alpha = -x > 0$ a rovnica $y^n = x$ je ekvivalentná s rovnicou $(-y)^n = \alpha$, pretože

$$(-y)^n = \alpha \ \Leftrightarrow\ ((-1)y)^n = -x \ \Leftrightarrow\ (-1)^n y = -x \ \Leftrightarrow\ -y^n = -x \ \Leftrightarrow\ y^n = x.$$

Keďže $\alpha > 0$, tak existuje jediné kladné reálne číslo $-y$ také, že $(-y)^n = \alpha$, a teda $-y = \sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{-x}$, resp. $y = -\sqrt[n]{-x}$. Toto číslo nazývame *n-tou odmocninou* čísla $x < 0$ a píšeme $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$. Napríklad, $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$.

Veta 1.51. $(\forall x, y \in \mathbb{R}, 0 \le x < y)(\forall n \in \mathbb{N})\ \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$

Dôkaz. Predpokladajme, že $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y}$. Potom by $(\sqrt[n]{x})^n = (\sqrt[n]{y})^n$, čiže $x = y$, čo je spor s predpokladom. Podobne, ak by $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \ge 0$, tak $(\sqrt[n]{x})^n > (\sqrt[n]{y})^n$, teda $x > y$, čo je opäť spor. Preto z trichotómie ostáva iba možnosť $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$. □

✠ Úlohy na precvičenie

Dokážte nasledujúce tvrdenia:

◇ $(\forall x \in \mathbb{R}, x > 0)(\forall m, n \in \mathbb{N})\ \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$;

◇ $(\forall x \in \mathbb{R}, x > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\ \sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$;

◇ $(\forall x, y \in \mathbb{R}, x > 0, y > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\ \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$.

✠ Úlohy na premýšľanie

◇ Existuje nekonečne veľa dvojíc $x, y \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$?
◇ Existuje $x \in \mathbb{R}$ také, že $\sqrt{x} > x$? Zmení sa niečo, ak budeme uvažovať vo všeobecnosti n-tú odmocninu?

Mocnina s racionálnym exponentom

Definícia 1.52. Nech $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ a $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. *Mocninou* x^r budeme rozumieť číslo $\sqrt[q]{x^p}$ (t.j. $x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$).

Prijatie tejto definície si vyžaduje overenie jej korektnosti, t.j. že hodnota mocniny x^r nezávisí od spôsobu vyjadrenia racionálneho čísla r, o čom pojednáva nasledujúca veta.

Veta 1.53. $(\forall x \in \mathbb{R}, x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})\ (r = \frac{p}{q} = \frac{m}{n}, p, m \in \mathbb{Z}, q, n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[q]{x^p}$

Dôkaz. Keďže $\frac{p}{q} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow pn = qm$, tak $x^{mq} = x^{np}$. Označme $u = \sqrt[n]{x^m}$ a $v = \sqrt[q]{x^p}$. Potom

$$u^n = x^m \ \Rightarrow\ (u^n)^q = (x^m)^q \ \Rightarrow\ u^{nq} = x^{mq}$$

a takisto

$$v^q = x^p \ \Rightarrow\ (v^q)^n = (x^p)^n \ \Rightarrow\ v^{nq} = x^{np}.$$

Z toho máme $u^{nq} = v^{nq}$ a na základe jednoznačnosti odmocniny máme $u = v$, teda $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[q]{x^p}$. □

Je tiež ľahké overiť, že zavedená definícia mocniny s racionálnym exponentom sa zhoduje s mocninou s celočíselným exponentom pre $r \in \mathbb{Z}$. Základné vlastnosti, resp. pravidlá narábania s mocninami s racionálnym exponentom sú zhrnuté v nasledujúcej vete.

Veta 1.54. $(\forall x, y \in \mathbb{R}, x > 0, y > 0)(\forall r, s \in \mathbb{Q})$

(i) $x^r \cdot y^r = (xy)^r \wedge \frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r$;

(ii) $x^r \cdot x^s = x^{r+s} \wedge \frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$;

(iii) $(x < y \wedge r > 0) \Rightarrow x^r < y^r$;

(iv) $(x > 1 \wedge r > s) \Rightarrow x^r > x^s$.

Dôkaz. Uvedieme iba dôkaz časti (i), ostatné prenechávame ako cvičenie.

Nech $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$ (inak niet čo dokazovať). Potom

$$x^r \cdot y^r = \sqrt[q]{x^p} \cdot \sqrt[q]{y^p} \overset{\text{Veta 1.49}}{=} \sqrt[q]{x^p \cdot y^p} = \sqrt[q]{(xy)^p} = (xy)^r.$$

Podobne

$$\frac{x^r}{y^r} = \frac{\sqrt[q]{x^p}}{\sqrt[q]{y^p}} = \sqrt[q]{\frac{x^p}{y^p}} = \sqrt[q]{\left(\frac{x}{y}\right)^p} = \left(\frac{x}{y}\right)^r.$$

Zdôvodnite každý krok na základe axióm alebo dokázaných tvrdení! □

Mocnina s reálnym exponentom

Definícia 1.55. Nech $x, \alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Ak $x > 1$ a $\alpha > 0$, tak *mocninou* x^α budeme rozumieť číslo

$$\sup\{x^r; r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \alpha\}.$$

(ii) Pre $x \in (0,1)$ a $\alpha > 0$ definujeme $x^\alpha = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}$.

(iii) Pre $x = 1$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme $x^\alpha = 1^\alpha = 1$.

(iv) Pre $x > 0$ a $\alpha < 0$ definujeme $x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$.

(v) Pre $x = 0$ a $\alpha > 0$ definujeme $x^\alpha = 0^\alpha = 0$.

Uvedená definícia je založená na skutočnosti, že pre $x > 1$ a $s, t \in \mathbb{Q}$, $s < t$ platí nerovnosť $x^s < x^t$ a každé reálne číslo α sa dá vyjadriť v tvare

$$\alpha = \sup\{s; s \in \mathbb{Q}, 0 < s < \alpha\},$$

čo opäť odkazuje na spôsob vybudovania reálnych čísel z čísel racionálnych. Pre $x > 1$ môžeme tiež mocninu definovať vzťahom

$$x^\alpha = \inf\{x^r; r \in \mathbb{Q}, 0 < \alpha < r\}.$$

Opäť by bolo potrebné overiť korektnosť tejto definície. Keďže časť (i) zohráva dôležitú úlohu, pozrime sa naň trochu bližšie. Označme $A = \{x^r; r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \alpha\}$. Podľa vety o hustote racionálnych čísel v číslach reálnych $(\exists r \in \mathbb{Q})\ 0 < r < \alpha$, čiže $x^r \in A$, a teda $A \neq \emptyset$. Podľa tej istej vety $(\exists s \in \mathbb{Q})\ \alpha < s < \alpha + 1$. Potom $0 < r < s$, a teda $x^r < x^s$, čo znamená, že x^s je horné ohraničenie množiny A, a preto existuje $\sup A$ a je jednoznačne určené. Taktiež je dôležité si uvedomiť, že hodnota x^α pre $x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ je vždy kladné číslo!

Poznámka 1.56. Treba povedať, že Definícia 1.55 nezahŕňa výraz 0^0, ktorý je ale zahrnutý v Definícii 1.45 mocniny s celočíselným exponentom, t.j. $0^0 = 1$. Niektorí autori sa bránia tejto konvencii a tvrdia, že výraz 0^0 nedefinujeme, pretože podľa nich na to neexistuje rozumný spôsob. Totiž vzhľadom na Definíciu 1.55 (v) by bolo rozumné položiť $0^0 = 0$. My sa však budeme pridŕžať zavedenej mocniny s celočíselným exponentom, v ktorej je tento prípad zavedený ako $0^0 = 1$ aj kvôli tomu, aby sme neskôr mohli pokojne narábať napr. s funkcionálnymi radmi, kde je aj tak potrebné prijať túto konvenciu, aby sme vedeli určiť hodnotu $\cos 0$, keďže

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nasledujúce tvrdenie zhŕňa základné vlastnosti mocniny s reálnym exponentom, dôkaz pozri [5]. Nakoľko sú tieto dôkazy tvrdení z axiomatiky reálnych čísel zdĺhavé a neprinášajú veľa úžitku, nebudeme ich robiť, ani vyžadovať. K niektorým vlastnostiam a ich odvodeniam sa však ešte dostaneme neskôr pomocou iného aparátu.

Veta 1.57. $(\forall x, y \in \mathbb{R}, x > 0, y > 0)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$

(i) $x^\alpha \cdot y^\alpha = (xy)^\alpha \wedge \frac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha$;

(ii) $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta} \wedge \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} \wedge (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\cdot\beta}$;

(iii) $(x > 1 \wedge \alpha > 0) \vee (x \in (0,1) \wedge \alpha < 0) \Rightarrow x^\alpha > 1$;

(iv) $(x > 1 \wedge \alpha < 0) \vee (x \in (0,1) \wedge \alpha > 0) \Rightarrow x^\alpha < 1$;

(v) $(x > 1 \wedge \alpha < \beta) \Rightarrow x^\alpha < x^\beta$;

(vi) $(x \in (0,1) \wedge \alpha < \beta) \Rightarrow x^\alpha > x^\beta$;

(vii) $(0 < x < y \wedge \alpha > 0) \Rightarrow x^\alpha < y^\alpha$;

(viii) $(0 < x < y \wedge \alpha < 0) \Rightarrow x^\alpha > y^\alpha$.

Logaritmus reálneho čísla

Zavedenie mocniny s reálnym exponentom nám umožní definovať nový pojem logaritmu reálneho čísla a odvodiť jeho základné vlastnosti. K zavedeniu logaritmov došlo takmer súčasne na niekoľkých miestach. Táto nová metóda[4] umožnila prevádzať zložitejšie počtárske úkony násobenia na jednoduchšie úkony sčítania, čo v dobe bez kalkulačiek bolo veľmi výhodné. Spomeňme len, že za „objaviteľov logaritmov“ sú považovaní John Napier (1550–1617) a Jost Bürgi (1552–1632), ktorí ich nezávisle zaviedli začiatkom 17. storočia.

Definícia 1.58. Nech $a, x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. Reálne číslo y také, že $a^y = x$ nazývame *logaritmus* čísla x pri základe a a píšeme $y = \log_a x$.

Je potrebné si uvedomiť, že neexistuje logaritmus ako číselná hodnota sama osebe. Logaritmus je vlastne vzťah dvoch čísel (za láskavého prispenia tretieho). Ak sa teda zamýšľame nad logaritmami, musíme vidieť stále dvojice čísel spolu zviazaných hodnotou toho tretieho, ktorým je základ.

Otázku korektnosti tejto definície rieši nasledujúca veta, kde si opäť treba uvedomiť, že logaritmus je supremum nejakej množiny, čo sa ukáže práve v dôkaze tejto vety. Presnejšie, pre $a > 1$, $x > 0$ je

$$y = \log_a x = \sup\{z \in \mathbb{R}; a^z < x\}.$$

Môžete si tu všimnúť paralelu so zavedením n-tej odmocniny, ktorá bola tiež zavedená ako supremum istej množiny (súvisiacej s n-tou mocninou reálneho čísla). Dá sa však predpokladať, že situácia s logaritmom bude technicky ešte trochu komplikovanejšia.

Veta 1.59 (o existencii a jednoznačnosti logaritmu). $(\forall a, x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, x > 0)(\exists! y \in \mathbb{R})\ a^y = x$

[4] slovo logaritmus vzniklo spojením gréckych slov „$\lambda o\gamma o\varsigma$“ – pomer a „$\alpha\rho\iota\tau\mu o\zeta$“ – číslo

Snaživý čitateľ môže nájsť dôkaz v [5]. Pripomeňme, že logaritmy so základom 10 sa obvykle označujú iba log (dekadický logaritmus) a logaritmy so základom e (Eulerovo číslo, pozri Časť 3.5) ako ln (logaritmus naturalis – prirodzený logaritmus).

Opäť iba zhrnieme základné vlastnosti tohto nového pojmu a niektoré vlastnosti dokážeme. Keďže definícia logaritmu úzko súvisí s mocninou s reálnym exponentom, dá sa očakávať, že sa vlastnosti budú dokazovať pomocou vlastností mocniny s reálnym exponentom.

Veta 1.60 (základné vlastnosti logaritmu). $(\forall a, b, x, y, \alpha \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, x > 0, y > 0)$

(i) $\log_a 1 = 0 \wedge \log_a a = 1$;

(ii) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;

(iii) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

(iv) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$;

(v) $(a > 1 \wedge x < y) \Rightarrow \log_a x < \log_a y$;

(vi) $(a \in (0,1) \wedge x < y) \Rightarrow \log_a x > \log_a y$;

(vii) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \log_b x \cdot \log_a b$.

Dôkaz. (i) Keďže $a^0 = 1$ a $a^1 = a$, tak $\log_a 1 = 0$ a $\log_a a = 1$.

(ii) Označme $u = \log_a x$, $v = \log_a y$ a $w = \log_a(xy)$, teda $a^u = x$, $a^v = y$ a $a^w = xy$. Potom $a^w = xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v}$, z čoho vyplýva, že $w = u + v$.

Keďže ostatné vlastnosti bežia analogicky, ukážeme na záver časť (vii). Opäť označme $u = \log_a x$, teda $a^u = x$. Potom

$$\log_b x = u \cdot \log_b a = \log_a x \cdot \log_b a \;\Rightarrow\; \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Ak položíme $x = b$, tak $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, teda $\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$. □

✠ Úlohy na premýšľanie

◇ Existuje nekonečne veľa dvojíc $x, y \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí $\log_a(x+y) = \log_a x + \log_a y$? Závisí táto vlastnosť na základe a?

◇ Existuje nekonečne veľa dvojíc $x, y \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí $\log_a(x \cdot y) = \log_a x \cdot \log_a y$? Ako táto vlastnosť závisí na a?