Kapitola 2

Úvod do reálnych funkcií

Niečo z histórie pojmu funkcia

V polovici 18. storočia sa vyvinula predstava o tom, že funkcia je analytický výraz reprezentovaný mocninným radom. Táto predstava pochádza od Isaaca Newtona (1643–1727), pre ktorého bola zdrojom optimizmu pri vyjadrovaní sa o riešení hlavných problémov analýzy. Vedúcim predstaviteľom tejto predstavy o funkcii bol v 18. storočí Joseph Louis Lagrange (1736–1813), ktorý sústredil svoje úsilie na to, aby na tejto predstave funkcie ako mocninného radu vybudoval celú analýzu. S vývojom poznania a hlavne s tým, že sa matematické prostriedky sústreďovali na popis čoraz zložitejších fyzikálnych javov, sa postupne prichádzalo k tomu, že toto Lagrangeovo pojatie pre popis skúmaných javov nestačí. Stručne prejdeme niektorými formuláciami, ktoré nám môžu do istej miery dať informáciu o predstavách matematikov o pojme funkcia a o tom, ako sa tieto predstavy postupne vyvíjali.

Leonhard Euler (1707–1783) v práci „`Introductio in Analysin Infinitorum`" z roku 1748 uvádza: Funkcia premennej veličiny je analytický výraz zložený ľubovoľným spôsobom z tejto premennej veličiny a z čísel alebo konštantných veličín. V svojom diele „`Institutiones Calculi Differentialis`" v roku 1755 potom píše: Ak niektoré veličiny (kvantity) závisia od iných tak, že pri zmene tých druhých sa takisto menia, nazývajú sa tie prvé funkciami druhých. Tento názov má mimoriadne širokú povahu: obsahuje všetky možné spôsoby, akými sa dá jedna veličina vyjadriť pomocou iných veličín. Môžeme si dnes iba domýšľať, čo si Euler predstavoval pod pojmom „analytický výraz zložený ľubovoľným spôsobom" v prvom prípade a pod pojmom „všetky možné spôsoby" v prípade druhom.

Sylvestre Francois Lacroix[1] (1765–1843) potom v prvom dieli svojej knihy „`Traité du calcul différentiel et du calcul intégral`" v roku 1797 napísal: Každá veličina, ktorá závisí na jednej alebo niekoľkých iných veličinách, sa nazýva funkciou tých druhých, či už poznáme alebo nie, ktoré operácie je potrebné vykonať, aby sme z nich dostali tú prvú. Lacroixovu definíciu môžeme pokladať za istú parafrázu Eulerovej definície s tým, že považuje za dôležité zdôrazniť, že spôsobu, podľa ktorého sa z hodnôt argumentu získa funkčná hodnota, nie sú predpísané žiadne špecifické matematické operácie. Týmto chceme doložiť, že predstavy o pojme funkcie sa v druhej polovici 18. storočia postupne posúvali do stále všeobecnejšej polohy.

[1] čítaj „Lakroá"

Matematická analýza vstúpila do 19. storočia s pojmom „ľubovoľnej“ funkcie. V samotných formuláciách poznať ešte istý ostych a snáď i obavu pred prílišnou všeobecnosťou. V knihe Josepha Fouriera (1768–1830) „`Théorie analytique de la chaleur`“ z roku 1822 autor píše: Všeobecne je funkcia $f(x)$ postupnosť hodnôt alebo ordinát, z ktorých každá je ľubovoľná. Toto pre nás dosť hmlisté tvrdenie potom Fourier upresňuje: Vôbec sa nepredpokladá, že sa tieto ordináty riadia všeobecnou zákonitosťou, môžu za sebou nasledovať ľubovoľne a každá z nich je daná ako by bola jedinečnou veličinou. Z týchto formulácií je možné zreteľne vyčítať, že Fourier má na mysli predpis, ktorý „prvku z definičného oboru určí funkčnú hodnotu funkcie“ a tento predpis nie je určený ničím iným. Nemusí byť teda určený analytickým výrazom platným pre väčšiu skupinu prvkov definičného oboru. Hneď od začiatku 19. storočia sa pojem funkcie stal centrálnym objektom skúmania matematickej analýzy. Matematická analýza sa formovala ako teória o narábaní s funkciami a ako rozvíjajúci sa súbor prostriedkov na vyšetrovanie vlastností funkcí alebo pre určovanie funkcií s danými vlastnosťami. Vedúce osobnosti analýzy Luis Augustin Cauchy (1789–1857) a Bernard Bolzano (1781–1847) sa výskumu venovali s veľkou vervou, avšak pojem funkcie u nich nie je nijak výrazne popísaný. Cauchy sa popisu venuje iba okrajovo a u Bolzana v jeho známej práci „`Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege`“ z roku 1817 sa o pojme funkcia nehovorí nič. Bolzano však veľmi presne popisuje to, čo sa rozumie pod spojitosťou funkcie v bode a o takýchto funkciách dokazuje známu vetu o medzihodnotách. Treba však povedať, že Bolzano mnohé veci nepublikoval, pracoval ale na veľkom projekte. Analýzy sa týka jeho „`Functionenlehre`“, ktorá však bola publikovaná až v 20. storočí.

O pojme funkcia sa vyslovil i P. G. Lejeune Dirichlet (1805–1859) v roku 1837: Pod a a b budeme rozumieť dve pevné hodnoty a pod x premennú veličinu nadobúdajúcu všetky hodnoty medzi a a b. Ak teraz každému x odpovedá jedno jediné konečné y tak, že ak x spojite prebieha interval od a do b, tak sa $y = f(x)$ mení rovnako spojite, potom y sa nazýva spojitou funkciou x pre tento interval. Ak odhliadneme od toho, že ide o určenie spojitej funkcie, je Dirichletova definícia určením pojmu funkcie v dnešnom zmysle (priradenie hodnoty hodnote). K tomu snáď ešte poznamenajme, že nemôžeme Dirichleta podozrievať z toho, že by nevedel o nespojitých funkciách – veď jedna z najznámejších funkcií nespojitých v každom bode nesie práve jeho meno a Dirichlet ju popísal osem rokov pred uvedením vyššie citovanej definície. Zastavme sa ale na chvíľu pri definícii spojitej funkcie. Dirichletov popis (definícia) je trochu hmlistý a vôbec nie presný. Porovnajme Dirichletovu definíciu s Bolzanovou z vyššie zmienej práce z roku 1817. Bolzano hovorí: Správnym výkladom tvrdenia, že sa funkcia $f(x)$ pre všetky hodnoty x, ktoré ležia zvnútra alebo zvonku istých medzí, mení podľa zákona spojitosti, totiž rozumieme len toľko, že ak x je taká hodnota, potom rozdiel $f(x+u)-f(x)$ je možné urobiť menším než každá daná veličina, keď je možné brať u také malé, ako len chceme. Je to o dosť presnejší a v istom zmysle „aritmetizovanejší“ popis pojmu spojitosti funkcie v bode, ak oželieme absenciu absolútnej hodnoty a nejasný popis toho, že sa v závere uvedeného citátu vlastne chce, aby „u bolo dosť malé“. Kadečo ale môže byť zahmlené dosť akademickou Bolzanovou pražskou nemčinou z tej doby a potom pochopiteľne i naším chabým pokusom o doslovný preklad.

Citátom Dirichletovho popisu funkcie vlastne môžeme uzavrieť dôležitú otázku vymedzenia tohto základného pojmu. Od Dirichleta sa potom už dosť priamo odvíjala koncepcia funkcie ako priradenia funkčných hodnôt (spočiatku hlavne čísel, reálnych alebo komplexných, neskôr i iných objektov) prvkom definičného oboru. Pre popis definičného oboru funkcie (a nakoniec i oboru jej hodnôt) bola mimoriadnym prínosom Cantorova teória množín. Terminológia v nej vytvorená umožnila náležitú presnosť a jasnosť. Tým sa popis základných objektov vyšetrovania v analýze 19. storočia, t.j. funkcií, posunul takmer do dnešnej podoby.

Funkcia ako zobrazenie

V každodennom živote sa stretávame so situáciami, že niektoré veličiny sa počas sledovania určitého javu menia, iné zase nie. Napríklad pri zohrievaní plynu v uzavretej nádobe sa teplota a tlak plynu menia, ale nemení sa jeho hmotnosť, ani objem. Premennou sa nazýva taká veličina, ktorá môže v podmienkach danej úlohy nadobúdať rôzne hodnoty. Veličina, ktorej hodnoty sa v podmienkach úlohy nemenia, sa nazýva konštantná. V praxi je často potrebné skúmať súvislosti premenných veličín, resp. závislosť jednej veličiny na druhej. V prírode ani niet veličín, ktoré by sa menili bez súvisu s inými veličinami. Napríklad vietor mení svoj smer v dôsledku neustálych zmien iných veličín, ako je teplota vzdušných más a iné. Tieto objektívne skutočnosti viedli k abstrakcii, ktorej dôsledkom je pojem funkcie ako zobrazenia[2].

Definícia 2.1. Nech X, Y sú množiny. Ak každému prvku $x \in X$ je určitým spôsobom priradený práve jeden prvok $y \in Y$, hovoríme, že *na množine X je definované zobrazenie* f, zapisujeme $y = f(x)$, $x \in X$.

Poznámka 2.2. Aby sme čitateľa odstrašili hneď na úvod, použitím kvantifikátorov je možné pojem zobrazenie $f : X \to Y$ charakterizovať takto:

$$(\forall x \in X)(\forall y_1, y_2 \in Y)\ (y_1 = f(x) \wedge y_2 = f(x)) \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Množinu X nazývame *definičný obor zobrazenia* f a píšeme $D(f)$ alebo D_f. Jej prvky sa označujú ako *argumenty*, *vzory* alebo *nezávislé premenné*. Prvok $y_0 \in Y$, ktorý je priradený argumentu $x_0 \in X$, nazývame *hodnotou zobrazenia* f v bode x_0 a označujeme ho $f(x_0)$. Množinu hodnôt, ktoré sú priradené prvkom množiny X, nazývame obor hodnôt zobrazenia f a označujeme $H(f)$ alebo H_f, t.j. pre $y_0 \in Y$ existuje $x_0 \in X$ taký, že $f(x_0) = y_0$. Prvky z oboru hodnôt nazývame *obrazmi* alebo *závislými premennými*.

V definícii sme nijak bližšie nešpecifikovali, o aké množiny ide (mohlo by ísť o číselné množiny, matice, vektory a pod.) a podľa toho sa rozlišuje príslušné zobrazenie.

[2]Treba však povedať, že v matematickej literatúre sa tieto pojmy nie vždy stotožňujú. Obyčajne sa pojem zobrazenia $f : X \to Y$ považuje za najvšeobecnejší používaný bez ohľadu na množiny X, Y a v rôznych častiach matematiky má pojem zobrazenia celý rad synoným, napr. funkcia, morfizmus, operátor, funkcionál, transfomácia. Pojem zobrazenie sa nahrádza pojmom funkcia obyčajne vtedy, keď Y je množina reálnych alebo komplexných čísel. Pojem funkcionál sa zase zvykne používať, ak X je množina funkcií.

Ak však $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, tak zobrazenie f nazývame *reálna funkcia jednej reálnej premennej*, skrátene v ďalšom texte iba reálna funkcia, prípadne len funkcia[3]. Teda funkcia predstavuje predpis, pravidlo $f : x \mapsto f(x)$, $x \in X$. Číslo $y = f(x)$ priradené číslu x nazývame *hodnotou funkcie* f v čísle x. Tu je potrebné upozorniť na častú nekonzistenciu v označovaní. Totiž ak máme funkciu f nezávislej premennej x, je často zvykom neoznačovať túto funkciu symbolom f, ale trochu mätúcim symbolom $f(x)$, ktorý môže mať dva odlišné významy a len z kontextu je jasné, či $f(x)$ je predpis funkcie, alebo $f(x)$ je označenie prvku z množiny H_f.

Z formálneho hľadiska sa na funkciu môžeme pozerať ako na množinu usporiadaných dvojíc, t.j. takých, v ktorých je potrebné rozlišovať prvý a druhý prvok dvojice, kde rôzne dvojice majú rôzne prvé prvky. Čísla x, ktoré sú prvými prvkami, tvoria množinu X a čísla, ktoré sú druhými prvkami, tvoria (častokrát inú) množinu Y.

Funkcie, ako aj iné matematické objekty, označujeme vhodnými symbolmi. Vo všeobecných úvahách o funkciách budeme obvykle na ich označovanie používať malé latinské písmená, najčastejšie f, g, h a pod. Pre mnohé funkcie sa ale zaviedli rôzne označovania. Nie vždy je funkcia označená písmenom, napríklad na označenie funkcie celá časť sa okrem písmena E používajú hranaté zátvorky [] a jej hodnota v čísle x sa označuje $[x]$. Iným príkladom funkcie je faktoriál. Je to funkcia, ktorej definičný obor sú nezáporné celé čísla a na jej označovanie sa zaužíval symbol výkričník !. Hodnotu tejto funkcie v čísle n značíme $n!$. Stretneme sa ešte s ďalšími funkciami, pre ktoré sa už tradíciou vžili označovania, napríklad sin, cos, Γ a mnohé iné.

Vo všeobecnosti, ak nejaký symbol značí funkciu, musí byť dané pravidlo, ako sa značia jej hodnoty v jednotlivých bodoch jej definičného oboru. Obyčajne sa znak pre bod z definičného oboru niekde ku znaku funkcie pripíše, najčastejšie za znak funkcie do zátvorky. Napríklad Eulerova gamma funkcia sa značí symbolom Γ, jej hodnota v čísle x je $\Gamma(x)$ daná predpisom

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t, \quad x > 0.$$

Iná známa funkcia sa značí znakom sin a jej hodnoty $\sin x$. Stáva sa však, že znak pre bod z definičného oboru nepíšeme za znak funkcie, ale na iné miesto. Uviedli sme, že ! je znak pre funkciu faktoriál a jej hodnoty značíme tak, že číslo z definičného oboru píšeme pred neho, t.j. $n!$. Často sa tiež používa na označenie hodnoty funkcie f v čísle x znak f_x a to najmä vtedy, keď jej definičný obor je množina prirodzených čísel (obzvlášť postupnosti sa tak značia).

Takáto nejednotnosť v označovaní vznikla tradíciou, pričom si ich autori explicitne neuvedomovali, že ide o funkciu. Nemá však význam odstraňovať túto nejednotnosť, museli by sme odstrániť priveľa zaužívaných označení, čo by viedlo k sťaženiu čitateľnosti mnohých textov.

V zápise v tvare $x \mapsto f(x)$ nie je podstatné, aké písmeno na označenie nezávislej premennej použijeme. Ak totiž f je funkcia, zápisy $x \mapsto f(x)$, $\eta \mapsto f(\eta)$, $\alpha \mapsto f(\alpha)$ vyjadrujú to isté, teda môžeme použiť hocijaké písmeno alebo znak, ktorý nemá už rezervovaný význam. Avšak $5 \mapsto f(5)$ nie je zápis pre funkciu f, lebo symbol 5 má význam rezervovaný pre isté číslo.

[3]pojem „funkcia“ ako prvý použil Leibniz v roku 1692

Každá funkcia je jednoznačne určená svojím definičným oborom a predpisom priradenia[4]. Ak definičný obor funkcie f nie je uvedený, budeme rozumieť jej *prirodzený definičný obor*, t.j. najväčšiu množinu hodnôt, pre ktorú má predpis $x \mapsto f(x)$ zmysel. Pravidlo priradenia pritom môže byť dané rôznymi spôsobmi:

(a) explicitne (analyticky) $f : y = x^2$ alebo $g : t = \sqrt{s}$, $s \in (1, 3\rangle$;

(b) implicitne: $xy + \ln xy = 1$;

(c) viacerými rovnicami: *Dirichletova funkcia* $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$;

Riemannova funkcia:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap \langle 0, 1\rangle \text{ alebo } x = 0 \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ je zlomok v základnom tvare } (p, q \in \mathbb{N} \text{ sú nesúdeliteľné}) \end{cases};$$

(d) parametricky, rekurzívne, tabuľkou, graficky, slovne, ...

Analytický spôsob zadania funkcie je najrozšírenejším spôsobom zadania funkcie. Napríklad v matematickej analýze sa takmer všetky funkcie zadávajú analyticky. Hlavnými výhodami tohto spôsobu zadania funkcie sú stručnosť, možnosť vyčíslenia hodnôt funkcie pri ľubovoľnej hodnote argumentu z definičného oboru, ako aj možnosť použitia rozsiahleho a silného aparátu matematickej analýzy pri skúmaní takto zadanej funkcie. Nevýhodou môže byť nedostatok názornosti a niekedy nevyhnutnosť urobiť zdĺhavé a ťažké výpočty, aby sme sa dozvedeli funkčnú hodnotu v danom bode.

Konštantnou funkciou nazývame funkciu definovanú na $\mathbb{R}$ predpisom $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Funkcia, ktorá každému reálnemu číslu x priradí to isté reálne číslo x sa nazýva *identita* a máva v rôznych oblastiach rôzne označenie (napr. I alebo Id). My však pre túto funkciu žiaden špeciálny symbol používať nebudeme.

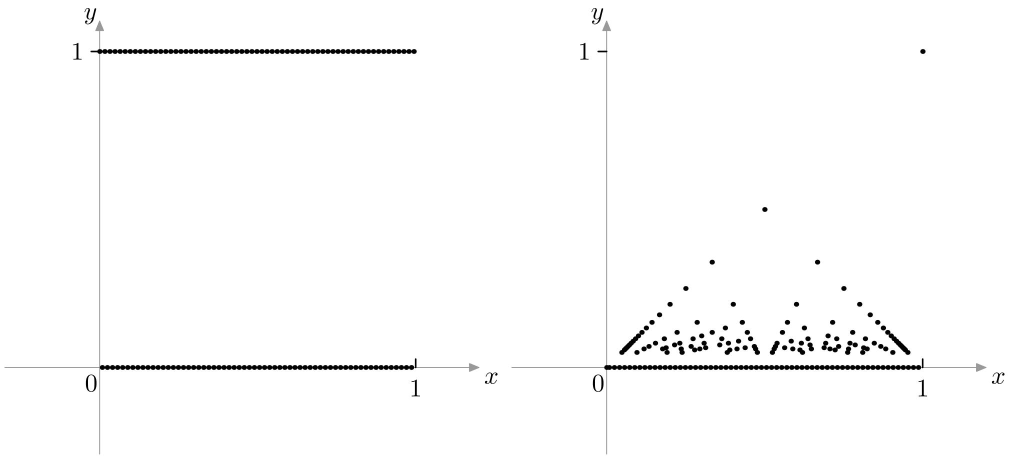
Často sa stáva, že danú funkciu vyšetrujeme nie na celom jej definičnom obore, ale len na nejakej jeho podmnožine.

Definícia 2.3. Nech f je definovaná na $X \neq \emptyset$ a $X_1 \subset X$. Funkciu φ definovanú na X_1 predpisom $(\forall x \in X_1)\ \varphi(x) = f(x)$ nazývame *parciálnou funkciou* k funkcii f (alebo tiež *zúženie* f na X_1).

Zrejme funkcia $\varphi(x) = 1$, $x \in \mathbb{Q}$ je parciálnou funkciou k funkcii χ. Taktiež faktoriál je zúžením Eulerovej gama funkcie Γ definovanej na $(0, +\infty)$ na množinu $\mathbb{N}$. Historický vývoj bol pritom opačný: riešila sa otázka (tzv. interpolačný problém), či existuje funkcia s určitými vlastnosťami, ktorej zúžením je faktoriál, teda či je možné rozšíriť funkciu na väčšiu množinu.

Definícia 2.4. *Grafom funkcie* f definovanej na množine $X \neq \emptyset$ nazývame množinu $G_f = \{[x, y]; x \in X, y = f(x)\}$.

[4]Podstatné tu nie to, či vieme túto (jedinú) hodnotu priradiť, ale aby existovala. Ak napríklad definujeme funkciu f, ktorej hodnota v $n \in \mathbb{N}$ je n-té prvočíslo, tak vieme, že $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 5$, atď., ale nikto nevie, koľko je $f\left((10^{10})^{10}\right)$, hoci vieme, že táto hodnota existuje (keďže prvočísel je nekonečne veľa).



Obr. 2.1: „Graf“ Dirichletovej a Riemannovej funkcie

Reálne čísla interpretujeme geometricky ako body na priamke. Ak chceme geometricky interpretovať funkcie, zvolíme si v rovine dve pretínajúce sa priamky (tiež nazývané osi), obyčajne na seba kolmé. Bod, v ktorom sa pretínajú, nech značí na každej z nich nulu. Potom každému bodu v rovine priradíme dvojicu čísel a to tých, ktoré znázorňujú jeho priemety na týchto priamkách. Tak je každému bodu priradená dvojica čísel, ale i naopak, ku každej dvojici sa dá zostrojiť práve jeden bod práve opísaným spôsobom. Geometrickým obrazom množiny G_f je množina bodov v tejto rovine. Aj túto geometrickú interpretáciu obvykle nazývame grafom funkcie f. *Množina G_f neobsahuje žiadne dve dvojice, ktorých prvá súradnica by bola rovnaká.* Z toho vyplýva, že priamka $x = x_0$ pretína graf funkcie f nakreslený v danej rovine v jednom bode $P = [x_0, y_0] = [x_0, f(x_0)]$. V ďalšom budeme x-ovú os označovať o_x a y-ovú os o_y.

Geometrické znázornenie grafu funkcie, ktorej definičný obor je nekonečná množina, nie je možné previesť bod po bode a z praktických dôvodov ani nakresliť (viď graf Dirichletovej a Riemannovej funkcie na intervale $\langle 0, 1\rangle$, Obr. 2.1). Grafy funkcií je však možné zobrazovať na základe štúdia vlastností danej funkcie. Pre načrtnutie grafu nejakej funkcie na zadanej množine nám môže tiež pomôcť znalosť transformácií grafov iných funkcií. Nech teda poznáme graf funkcie f. Potom

(i) $y = f(x) + A$ . . . posunutie grafu pozdĺž osi o_y o hodnotu A;

(ii) $y = f(x - a)$ . . . posunutie grafu pozdĺž osi o_x o hodnotu a;

(iii) $y = Bf(x)$ . . . násobenie každej y-ovej súradnice číslom $B \neq 0$;

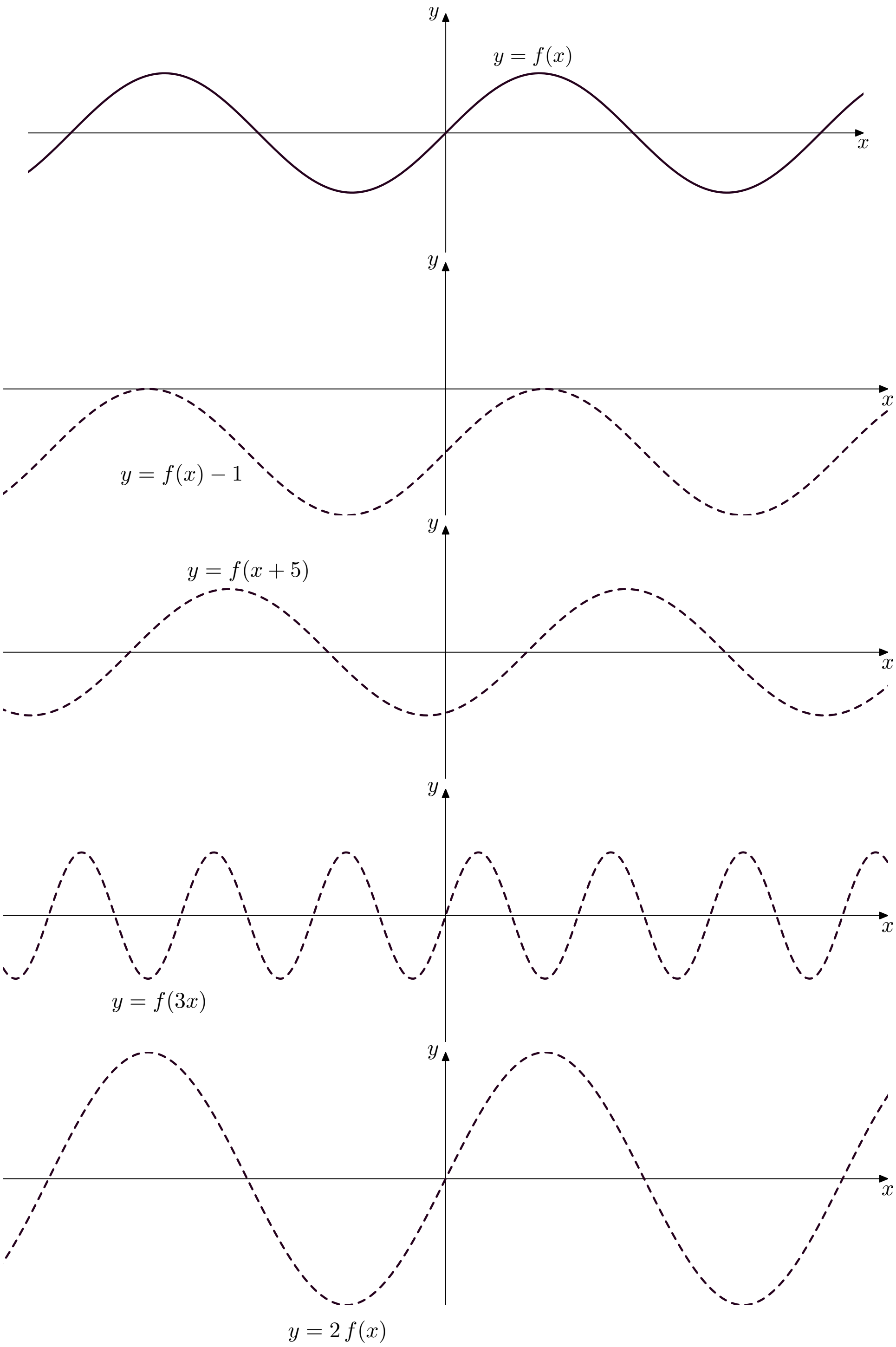
(iv) $y = f(bx)$ . . . násobenie každej x-ovej súradnice číslom $b \neq 0$;

(v) $y = f(-x)$ . . . symetria grafu vzhľadom na os o_y;

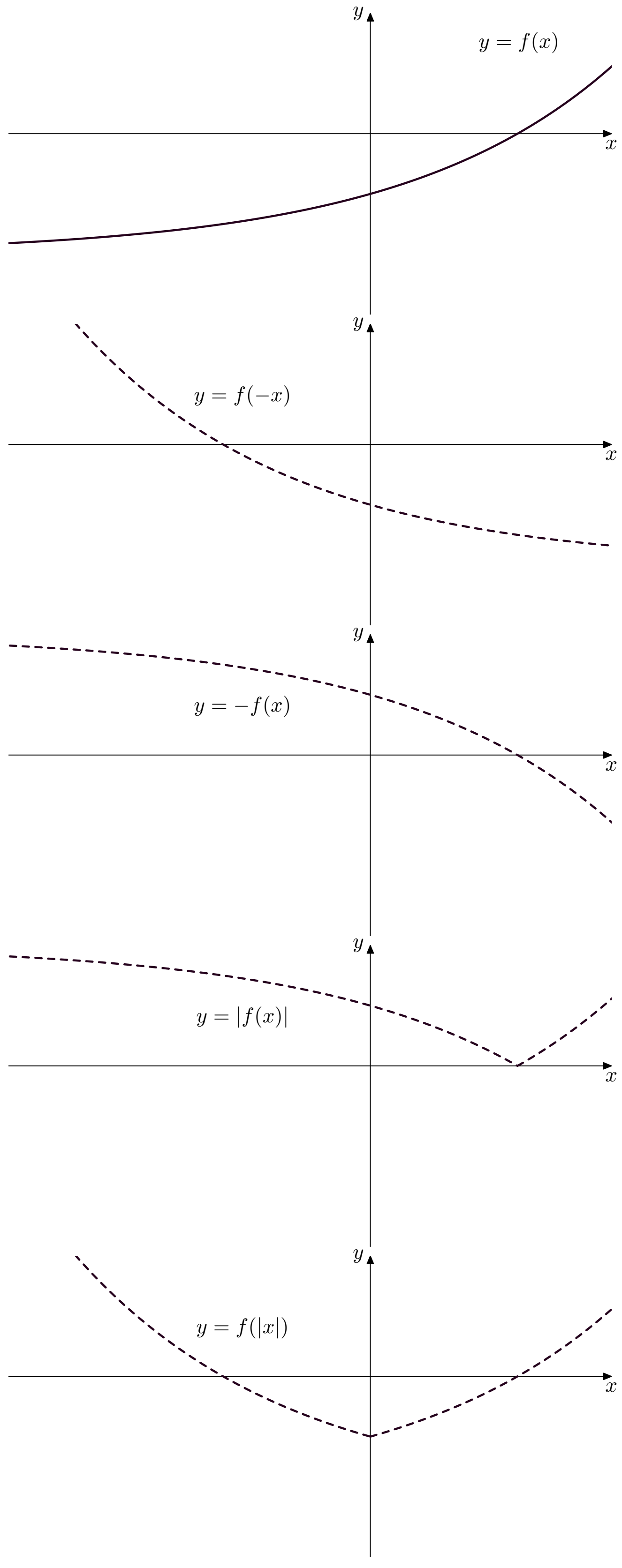
(vi) $y = -f(x)$ . . . symetria grafu vzhľadom na os o_x;

(vii) $y = |f(x)|$ . . . symetria časti grafu ležiaceho pod osou o_x vzhľadom na os o_x;

(viii) $y = f(|x|)$ . . . symetria časti grafu ležiaceho vpravo od o_y vzhľadom na os o_y.



Obr. 2.2: Transformácie (i)–(iv) grafu funkcie $y = f(x)$



Obr. 2.3: Transformácie (v)–(viii) grafu funkcie $y = f(x)$

Na Obr. 2.2 a Obr. 2.3 sú tieto transformácie ilustrované na konkrétnych príkladoch. Postupným skladaním týchto transformácií vieme načrtnúť ďalšie grafy funkcií. Napríklad nech je daný graf funkcie f (napr. ako na Obr. 2.4). Potom graf funkcie $y = af(b|x| + c) + d$ získame nasledujúcou postupnosťou transformácií:

$$y = f(x) \overset{x \mapsto x+c}{\Longrightarrow} y = f(x+c) \overset{x \mapsto bx}{\Longrightarrow} y = f(bx+c) \overset{x \mapsto |x|}{\Longrightarrow} y = f(b|x|+c)$$
$$\overset{y \mapsto ay}{\Longrightarrow} y = af(b|x|+c) \overset{y \mapsto y+d}{\Longrightarrow} y = af(b|x|+c)+d$$

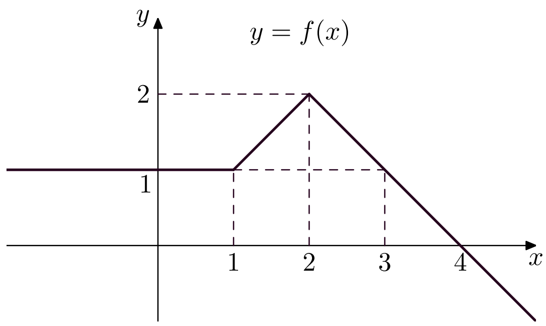
Definícia 2.5. Hovoríme, že *funkcie f, g sa rovnajú*, akk majú rovnaký definičný obor X a $(\forall x \in X)\ f(x) = g(x)$.

Podobne môžeme povedať, že dve funkcie f a g definované na spoločnej množine X spĺňajúce podmienku $(\forall x \in X)\ f(x) = g(x)$ sa rovnajú. Napríklad, $f(x) = \sqrt{x^2}$ a $g(x) = x$ sa rovnajú na $\langle 0, +\infty)$, ale nie na $\mathbb{R}$. Poznamenajme, že pre určenie toho, či sa dve funkcie $f : X_1 \to Y_1$ a $g : X_2 \to Y_2$ rovnajú, nie je podstatné, či $Y_1 = Y_2$. Tak napríklad funkcie $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $\sin : \mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle$ sa v zmysle našej definície rovnajú. Niekomu by však mohlo vadiť, že prvá z nich nie je surjektívna (alebo na, t.j. $(\exists y \in Y_1)(\forall x \in X_1)\ f(x) \neq y$) a druhá je. To je síce naozaj trochu nepríjemné (rovnosť by sa asi takto čudne správať nemala), ale my sa budeme aj naďalej pridržiavať vyslovenej definície.

✠ Úlohy na premýšľanie

◇ Ktoré z uvedených transformácií grafu funkcie menia jej definičný obor a ktoré obor jej hodnôt?

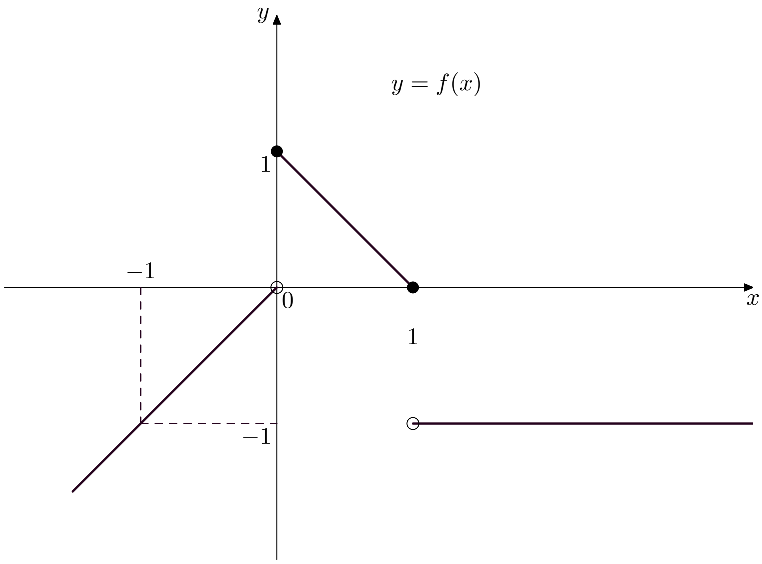
◇ Určte $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ak viete, že graf funkcie $f : y = a|x-1| + b|x-2| + cx + d$ má tvar



◇ Nech graf funkcie $y = f(x)$ je daný na Obr. 2.4. Načrtnite graf funkcie
(i) $y = f(-1-|x|)$; (ii) $y = |f(2x-1)|$; (iii) $y = f(|2x+1|)$.

◇ Rovnajú sa funkcie

$$f : y = \sqrt{\frac{x-8}{x-1}} \quad \text{a} \quad g : y = \frac{\sqrt{x-8}}{\sqrt{x-1}}?$$



Obr. 2.4: Graf funkcie danej úsečkami a polriamkami

2.1 Operácie s funkciami

Definícia 2.6. Nech f a g sú funkcie s definičnými obormi D_f a D_g.

(i) *Absolútna hodnota* $|f|$ je funkcia definovaná na D_f predpisom

$$(\forall x \in D_f)\ |f|(x) = |f(x)|.$$

(ii) *Súčet* (rozdiel) $f \pm g$ je funkcia definovaná na $D_f \cap D_g$ predpisom

$$(\forall x \in D_f \cap D_g)\ (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x).$$

(iii) *Súčin* $f \cdot g$ je funkcia definovaná na $D_f \cap D_g$ predpisom

$$(\forall x \in D_f \cap D_g)\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

(iv) *Podiel* $\frac{f}{g}$ je funkcia definovaná na $D_f \cap \{x \in D_g; g(x) \neq 0\}$ predpisom

$$(\forall x \in D_f \cap \{x \in D_g; g(x) \neq 0\})\ \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Je potrebné upozorniť, že symboly operácií medzi funkciami a symboly operácií medzi reálnymi číslami sú síce v uvedenej definícii rovnaké, ale je dôležité uvedomiť si medzi nimi rozdiel, t.j. napr. $f + g$ znamená operáciu sčítania v množine funkcií, zatiaľ čo $f(x) + g(x)$ znamená operáciu sčítania reálnych čísel $f(x)$ a $g(x)$.

Matematickou indukciou je možné rozšíriť túto definíciu na ľubovoľný konečný počet funkcií, napr. ak $f_1, \dots, f_n$, $n \in \mathbb{N}$, sú funkcie s definičnými obormi $D_{f_1}, \dots, D_{f_n}$, potom súčin $f_1 \dots f_n$ je funkcia definovaná na $\bigcap\limits_{i=1}^{n} D_{f_i}$ predpisom

$$\left(\forall x \in \bigcap_{i=1}^{n} D_{f_i}\right)\ \left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x).$$

Všimnime si, že špeciálnym prípadom súčinu je funkcia $\alpha \cdot f$, $\alpha \in \mathbb{R}$, t.j. násobenie konštantou. Opakovaným použitím operácií sčítania a násobenia konštantou dostaneme z identity funkciu $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots a_{n-1}x + a_n$, kde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$, ktorú nazývame *polynóm*. Zrejme $D_P = \mathbb{R}$. *Racionálnou lomenou funkciou* rozumieme funkciu R v tvare

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + \dots + b_{m-1}x + b_m}, \quad a_i \in \mathbb{R}, b_j \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m,$$

kde aspoň jedno z čísel b_j je nenulové. Zrejme $D_R = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}; Q(x) = 0\}$.

Pre operácie s funkciami platí asociatívny a komutatívny zákon pre sčítanie, asociatívny a komutatívny zákon pre násobenie, ako aj distributívny zákon násobenia vzhľadom na sčítanie (sformulujte ich!). Podobne ako pri číslach vieme niektoré funkcie medzi sebou bodovo porovnávať: ak f, g sú definované na M a $(\forall x \in M)\ f(x) \leq g(x)$, potom píšeme jednoducho $f \leq g$, podobne aj pre ostrú nerovnosť $f < g$. Avšak narozdiel od čísel existujú funkcie, ktoré sa porovnať nedajú, napríklad $f(x) = x$ a $g(x) = -x$ na $\mathbb{R}$.

Definícia 2.7. Nech f je funkcia definovaná na A a g je definovaná na B. *Zloženou funkciou* $f \circ g$ nazývame funkciu definovanú na množine $M = \{x \in B; g(x) \in A\}$ predpisom $(\forall x \in M)\ (f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Funkciu f označujeme *vonkajšia zložka* (hlavná) a g *vnútorná zložka* (vedľajšia). Podobne je možné definovať zloženie viacerých funkcií. V niektorých knihách, prípadne iných odboroch matematiky, sa funkcia $f(g(x))$ označuje symbolom $g \circ f$ namiesto $f \circ g$, preto je dôležité dobre si pozrieť dohodnuté označovanie.

Rovnako ako je možné za určitých podmienok funkcie skladať, môžeme ich aj rozložiť, pričom rozklad na zložky nemusí byť jednoznačný. Napríklad funkcia $f : y = 1 + \cos^2 x$ sa dá rozložiť buď na zložky $u = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ a $v = 1 + u^2$, $u \in \langle -1, 1\rangle$, alebo na zložky $u = \cos^2 x$, $x \in \mathbb{R}$ a $v = 1 + u$, $u \in \langle 0, 1\rangle$.

Pre operáciu skladania funkcií neplatí komutatívny zákon, t.j. $f \circ g \neq g \circ f$! Napríklad pre $f(x) = \sqrt{x}$ a $g(x) = -x^2 - 1$ neexistuje $f \circ g$ (zdôvodnite!), ale $(\forall x \in \langle 0, +\infty))(g \circ f)(x) = -x - 1$. Ako je to teda s asociativitou kompozície funkcií? Vďaka nasledujúcej vete nemusíme písať zátvorky vo vyjadrení $f \circ (g \circ h)$.

Veta 2.8 (asociativita skladania funkcií). $(\forall f, g, h)\ f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Dôkaz. Máme vlastne ukázať rovnosť dvoch funkcií. Označme $g \circ h = k$. Potom

$$\begin{aligned} x \in D_{f\circ k} &\Leftrightarrow (x \in D_k \wedge k(x) \in D_f) \Leftrightarrow (x \in D_{g\circ h} \wedge g(h(x)) \in D_f) \\ &\Leftrightarrow (x \in D_h \wedge h(x) \in D_g \wedge g(h(x)) \in D_f) \Leftrightarrow (x \in D_h \wedge h(x) \in D_{f\circ g}) \\ &\Leftrightarrow x \in D_{(f\circ g)\circ h}, \end{aligned}$$

čiže $x \in D_{f\circ(g\circ h)} \Leftrightarrow x \in D_{(f\circ g)\circ h}$ a naviac platí, že

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f(g \circ h(x)) = f(g(h(x))) = (f \circ g)(h(x)) = ((f \circ g) \circ h)(x),$$

čo sme mali dokázať. $\square$

✠ Úlohy na precvičenie

◇ Nech $f(x) = \frac{x|x-1|}{x+4}$ a $g(x) = 2x + 3$. Nájdite $f \circ g$, $g \circ f$ a $f \circ \frac{1}{g}$.
◇ Nájdite nejaké funkcie také, že $f \circ f = f$ a $(\forall g)\ f \circ g = f$.
◇ Dokážte, že platí distributívny zákon $\circ$ vzhľadom na $+$, t.j. $(\forall f, g, h)$

$$(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h.$$

◇ Platí distributívny zákon $\circ$ vzhľadom na $\cdot$?
◇ Určte $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ a $g \circ g$, ak $f = \operatorname{sgn}$ a $g = \rho$ (Riemannova funkcia).

2.2 Niektoré triedy funkcií

Ohraničené a neohraničené funkcie

Definícia 2.9. Funkcia f sa nazýva *ohraničená zhora* (*zdola*) na $M \subseteq D_f$, akk množina $\{y; y = f(x), x \in M\}$ je ohraničená zhora (zdola). Funkcia f sa nazýva *ohraničená* na $M \subseteq D_f$, akk je na $M \subseteq D_f$ ohraničená zhora aj zdola.

Taktiež hovoríme, že f *je neohraničená* (zhora, zdola) na $M \subseteq D_f$, akk nie je ohraničená (zhora, zdola) na $M \subseteq D_f$. Teda funkcia f je ohraničená zhora (resp. zdola) na $M \subseteq D_f$ práve vtedy, keď $(\exists H \in \mathbb{R})(\forall x \in M)\ f(x) \leq H$ (resp. $(\exists D \in \mathbb{R})(\forall x \in M)\ D \leq f(x)$). Vzhľadom na Vetu 1.30 dostávame nasledujúce jednoduché tvrdenie.

Tvrdenie 2.10. *Funkcia f je ohraničená $M \subseteq D_f$ práve vtedy, keď* $(\exists K \in \mathbb{R}, K > 0)(\forall x \in M)\ |f(x)| \leq K$.

Ak tvrdenie platí pre každé $x \in D_f$, t.j. $M = D_f$, tak zvykneme skrátene hovoriť, že f je ohraničená (zhora, zdola). Poznamenajme, že f je neohraničená na $M \subseteq D_f$ práve vtedy, keď $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in M)\ |f(x_n)| \geq n$. Všimnime si, že namiesto $K \in \mathbb{R}$ sme zobrali iba $n \in \mathbb{N}$, čo môžeme urobiť na základe Archimedovej vlastnosti.

Z geometrického hľadiska ohraničenosť funkcie f zhora (zdola) znamená, že graf funkcie f leží pod (nad) priamkou $y = H$ ($y = D$). Pre ohraničené funkcie platí nasledujúca užitočná veta.

Veta 2.11. *Ak f, g sú ohraničené na $M \subseteq \mathbb{R}$, potom sú na M ohraničené aj funkcie $|f|$, $f \pm g$ a $f \cdot g$.*

Dôkaz. Keďže f, g sú ohraničené na $M \subseteq \mathbb{R}$, potom podľa Tvrdenia 2.10 $(\exists K_1 \in \mathbb{R}, K_1 > 0)(\exists K_2 \in \mathbb{R}, K_2 > 0)(\forall x \in M)\ |f(x)| \leq K_1 \wedge |g(x)| \leq K_2$. Ohraničenosť funkcie $|f|$ je jasná, pretože $||f|| = |f|$. Ďalej

$$(\forall x \in M)\ |f \pm g|(x) = |f(x) \pm g(x)| \overset{\text{Veta 1.15 (ii)}}{\leq} |f(x)| + |g(x)| \leq K_1 + K_2,$$

teda stačí položiť $K = K_1 + K_2$. Podobne pre súčin stačí položiť $K = K_1 \cdot K_2$. □

Pozor, podiel dvoch ohraničených funkcií na nejakej množine nemusí byť ohraničená funkcia! Napríklad $f(x) = 1$ a $g(x) = \frac{1}{x}$ sú ohraničené na množine $M = (1, +\infty)$, ale podiel $\frac{f}{g}(x) = x$ nie je ohraničenou funkciou na M.

Definícia 2.12. *Supremom (infimom) funkcie f na $M \subseteq D_f$*, označujeme $\sup\limits_{x \in M} f(x)$ $(\inf\limits_{x \in M} f(x))$, nazývame supremum (infimum) množiny $\{y; y = f(x), x \in M\}$.

Ak $(\exists x_0 \in M)(\forall x \in M)\ f(x) \leq f(x_0)$, tak hovoríme, že f *nadobúda maximum na M* a píšeme $f(x_0) = \max\limits_{x \in M} f(x)$. Ak $(\exists x_1 \in M)(\forall x \in M)\ f(x_1) \leq f(x)$, tak hovoríme, že f *nadobúda minimum na M* a píšeme $f(x_1) = \min\limits_{x \in M} f(x)$.

Maximum a minimum funkcie f na $M \subseteq D_f$ sa zvyknú označovať ako globálne (absolútne) extrémy funkcie na množine M. Zrejme, ak f nadobúda maximum (minimum) na $M \subseteq D_f$, tak je ohraničená zhora (zdola) na M. Opačná implikácia však neplatí! Ak množina $\{y; y = f(x), x \in M\}$ nie je ohraničená zhora (zdola), tak kladieme $\sup\limits_{x \in M} f(x) = +\infty$ $(\inf\limits_{x \in M} f(x) = -\infty)$.

✠ Úlohy na premýšľanie

◇ Nech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Dokážte, že f je ohraničená na (a, b) práve vtedy, keď

$$(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x, y \in (a, b))\ |f(x) - f(y)| \leq K.$$

◇ Rozhodnite, či platí tvrdenie: ak f je ohraničená na intervale $I \subset \mathbb{R}$, tak

$$\sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) = \sup_{x,y \in I} |f(x) - f(y)|.$$

Párne, nepárne a periodické funkcie

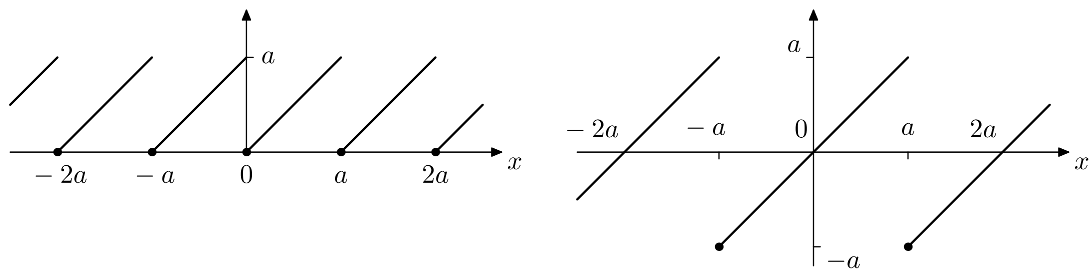
Definícia 2.13. Funkcia f definovaná na M sa nazýva *párna*, akk $(\forall x \in M)\ -x \in M \wedge f(-x) = f(x)$. Funkcia f sa nazýva *nepárna*, akk $(\forall x \in M)\ -x \in M \wedge f(-x) = -f(x)$.

Príkladom párnej funkcie je funkcia $f : y = x^2$ (na svojom definičnom obore, t.j. $\mathbb{R}$). Vo všeobecnosti funkcia $f : y = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, je párna, zatiaľ čo funkcia $f : y = x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, je nepárna (zdôvodnite!), pozri Obr. 2.8. Všimnime si, že v definícii sme predpokladali existenciu opačného prvku ku každému prvku množiny M. Teda o párnosti, či nepárnosti funkcie nemá zmysel hovoriť, ak definičný obor funkcie nie je symetrický vzhľadom na bod 0. Preto funkcia $g : y = \sqrt{x}$ nie je ani párna, ani nepárna, pretože $D_g = \langle 0, +\infty)$, ale funkcia $h : y = \sqrt{|x|}$ je párna na $D_h = \mathbb{R}$. Iným príkladom párnej funkcie je Dirichletova funkcia χ definovaná na $\mathbb{R}$.

Nech f je funkcia s definičným oborom symetrickým vzhľadom na bod 0. Položme

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Potom g je párna funkcia na D_f, h je nepárna funkcia na D_f a naviac platí $(\forall x \in D_f)\ f(x) = g(x) + h(x)$. To znamená, že každá funkcia s definičným oborom symetrickým vzhľadom na bod 0 sa dá napísať ako súčet párnej a nepárnej funkcie.



Obr. 2.5: Grafy periodických funkcií – s periódou a (vľavo) a s periódou $2a$ (vpravo)

Z geometrického hľadiska je graf párnej funkcie osovo súmerný podľa y-ovej osi, pretože ak bod $P = [x, f(x)]$ je bodom grafu funkcie, potom vzhľadom na párnosť funkcie f je bod $P' = [-x, f(x)]$, ležiaci osovo súmerne s bodom P s osou súmernosti o_y, tiež bodom grafu funkcie f. Graf nepárnej funkcie je stredovo súmerný so stredom súmernosti v bode 0, pretože body $Q = [x, f(x)]$ a $Q' = [-x, -f(x)]$, stredovo súmerné podľa počiatku, sú v dôsledku nepárnosti bodmi grafu funkcie.

Definícia 2.14. Funkciu f nazývame *periodickou*, akk

$$(\exists p \in \mathbb{R}, p > 0)(\forall x \in D_f)\ x + p \in D_f \wedge x - p \in D_f \wedge f(x + p) = f(x).$$

Najmenšie $p > 0$ s touto vlastnosťou sa nazýva *perióda funkcie* f.

Podmienka $(\forall x \in D_f)\ x + p \in D_f \wedge x - p \in D_f$ sa niekedy vyjadruje slovami, že definičný obor D_f je uzavretý na kroky dĺžky p. Ak f je periodická funkcia, ľahko ukážeme, že aj $f(x-p) = f(x)$. Naozaj, $f(x-p) = f((x-p)+p) = f(x)$. Toto budeme ďalej bežne používať. Ako dôsledok tohto faktu máme, že definičný obor periodickej funkcie je zhora aj zdola neohraničený a periodická funkcia nie je prostá, dokonca nemôže byť rastúca, ani klesajúca na celom svojom definičnom obore (o prostosti a monotónnosti pozri nižšie).

Z definície dokonca vidíme, že ak bod x patrí do definičného oboru funkcie f s periódou p, tak do jej definičného oboru patria aj všetky body $x + np$, kde $n \in \mathbb{Z}$ a platí $f(x + np) = f(x)$. Ak teda f je periodická funkcia, pre ľubovoľné číslo $a \in \mathbb{R}$ má rovnica $f(x) = a$ buď nekonečne veľa riešení, alebo nemá riešenie. K dôkazu neperiodičnosti funkcie f nám teda stačí nájsť také dve hodnoty argumentu $x = a$ a $x = b$, že rovnice $f(a+p) = f(a)$ a $f(b+p) = f(b)$ nemajú spoločné nenulové riešenie p. Graf periodickej funkcie sa vyznačuje pravidelným opakovaním po intervale danom periódou p, pozri Obr. 2.5.

Periódou p periodickej funkcie f je teda kladné číslo s nasledujúcimi vlastnosťami

(i) $(\forall x \in D_f)\ x + p \in D_f \wedge x - p \in D_f \wedge f(x - p) = f(x + p) = f(x)$;

(ii) $(\forall p_0 \in \mathbb{R}, 0 < p_0 < p)(\exists x_0 \in D_f)\ f(x_0 + p_0) \neq f(x_0)$.

Zrejme každá konštantná funkcia je periodická, ale nemá periódu. Funkcie sin a cos sú periodické s periódou 2π, tg a cotg s periódou π (k dôkazu týchto tvrdení o goniometrických funkciách sa dostaneme neskôr, pozri Veta 2.31).

Poznámka 2.15. Bežne sa v literatúre môžeme stretnúť s nasledujúcou definíciou periodickej funkcie: číslo p sa nazýva perióda funkcie f, akk

$$(\forall x \in D_f)\ x + p \in D_f \wedge f(x+p) = f(x).$$

Podľa tejto definície by napríklad funkcia sin definovaná na $\langle 0, +\infty)$ mala periódu 2π. Nepovažujeme túto definíciu za vhodnú, a preto budeme používať pôvodnú definíciu.

✠ Úlohy na precvičenie

◇ Dokážte, že súčet alebo rozdiel dvoch párnych funkcií je párna funkcia a súčet alebo rozdiel dvoch nepárnych funkcií je nepárna funkcia.
◇ Dokážte, že súčin alebo podiel dvoch párnych alebo dvoch nepárnych funkcií je párna funkcia a súčin alebo podiel jednej párnej a jednej nepárnej funkcie je nepárna funkcia.
◇ Ktorá z nasledujúcich funkcií je periodická a s akou periódou: Dirichletova funkcia, $f : y = \cos x^2$, $g : y = \cos^4 x + \sin x$?

Monotónne, prosté a inverzné funkcie

Definícia 2.16. Hovoríme, že funkcia f je na množine $M \subseteq D_f$

(i) *rastúca*, akk $(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2)\ f(x_1) < f(x_2)$;

(ii) *klesajúca*, akk $(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2)\ f(x_2) < f(x_1)$;

(iii) *neklesajúca*, akk $(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2)\ f(x_1) \le f(x_2)$;

(iv) *nerastúca*, akk $(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2)\ f(x_2) \le f(x_1)$.

Rastúce a klesajúce funkcie na $M \subseteq D_f$ nazývame *rýdzomonotónne* na M, nerastúce a neklesajúce funkcie označujeme ako *monotónne funkcie* na M. Ak $M = D_f$, tak zvykneme vynechávať prívlastok na množine M. Z definície je zrejmé, že každá rastúca funkcia je neklesajúca a každá klesajúca je nerastúca. Opačné implikácie neplatia (uveďte príklady)! Funkcia je konštantná na $M \subseteq \mathbb{R}$ práve vtedy, keď je neklesajúca a nerastúca na M (dokážte!).

Monotónnosť je globálna vlastnosť funkcie na množine M, t.j. vyjadruje správanie sa funkcie na množine M ako celku. Funkcia nemôže byť súčasne rastúca aj klesajúca, ak jej definičný obor obsahuje aspoň dve čísla (vysvetlite!). Ak M je jednoprvková množina, tak zrejme každá funkcia f je monotónna na $M \subseteq D_f$, pretože v M sa nedajú nájsť dve čísla $x_1 < x_2$, a preto každý výrok $(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2)\ldots$ je pravdivý. Rovnakú úvahu možno urobiť, ak $D_f = \emptyset$, teda ak f je tzv. *prázdna funkcia*.

Všimnime si ďalej, že napríklad ak f je rastúca, tak $-f$ je klesajúca. V zásade však nič nemožno tvrdiť o monotónnosti funkcie $\frac{1}{f}$. Napríklad $f(x) = x$ je rastúca, ale $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{x}$ definovaná na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nie je monotónna. Platí totiž $-1 < 1 < 2$ a $f(-1) < f(1) > f(2)$.

Nasledujúca veta dáva do súvisu ohraničenosť a monotónnosť funkcie.

Veta 2.17. *Každá monotónna funkcia na uzavretom intervale je na tomto intervale ohraničená.*

Dôkaz. Nech f je neklesajúca na $\langle a, b\rangle$, t.j. $(\forall x \in \langle a, b\rangle)\ f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, teda je ohraničená zhora aj zdola na $\langle a, b\rangle$. $\square$

Poznámka 2.18. Dôležitým predpokladom vety je uzavretosť intervalu, pretože napríklad funkcia $f : y = \frac{1}{x}$ je na intervale $(0, 1\rangle$ síce klesajúca, ale nie je na ňom ohraničená.

Definícia 2.19. Funkciu f nazývame *prostou* na množine $M \subseteq D_f$, akk $(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 \neq x_2)\ f(x_1) \neq f(x_2)$. Ak f je prostá na D_f, tak f sa nazýva *injektívna.*

Všimnime si, že pri dokazovaní prostosti (injektívnosti) funkcie je potrebné ukázať niečo pre každé dva body z danej množiny (z definičného oboru). Naproti tomu pri vyvracaní prostosti (injektívnosti) je treba dokázať negáciu, t.j. $(\exists x_1, x_2 \in M)\ x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$, čiže stačí nájsť dva rôzne body s rovnakými funkčnými hodnotami. Takto sa jednoducho dokáže, že funkcia $f : y = x^2$ je prostá na $\langle 0, +\infty)$, ale nie je prostá na $D_f = \mathbb{R}$. Geometricky to teda znamená, že každá priamka $y = y_0$ pretne graf prostej funkcie nanajvýš v jednom bode.

Veta 2.20. *Ak f je rýdzomonotónna na $M \subseteq D_f$, tak f je prostá na M.*

Dôkaz. Nech f je rastúca na M, teda $(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2)\ f(x_1) < f(x_2)$, t.j. obrazy rôznych prvkov sú rôzne, a teda f je prostá na M. $\square$

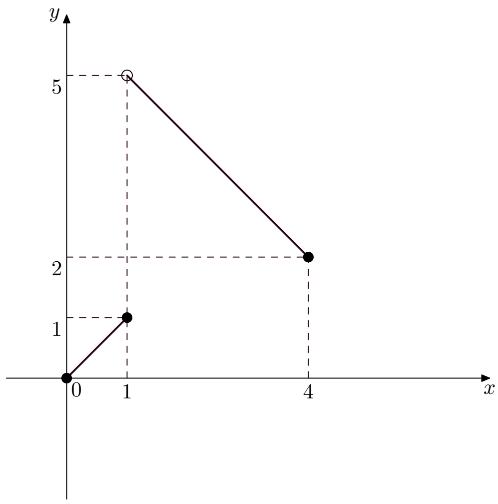
Poznámka 2.21. Obrátená veta neplatí, pretože existujú prosté funkcie, ktoré nie sú rýdzomonotónne, napríklad $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle 0, 1\rangle \\ 6 - x, & x \in (1, 4\rangle \end{cases}$, pozri Obr. 2.6. Dokonca existuje prostá funkcia na $\mathbb{R}$, ktorá nie je monotónna na žiadnom intervale $I \subset \mathbb{R}$! Aby platila aj obrátená veta, je potrebné do jej predpokladov pridať podmienku spojitosti (pozri letný semester).

Pokračujme v štúdiu vzťahov medzi zavedenými pojmami otázkou, či kompozícia prostých funkcií je opäť prostá funkcia? Poznamenajme, že vo vete predpokladáme také funkcie, aby ich kompozícia existovala (na príslušných množinách).

Veta 2.22. *Ak f, g sú prosté funkcie, potom aj $f \circ g$ je prostá funkcia.*

Dôkaz. Nech $f \circ g = h$ a $x_1, x_2 \in D_h$, $x_1 \neq x_2$. Keďže $D_h = \{x \in D_g; g(x) \in D_f\}$, tak pre $x_1 \neq x_2$ máme, že $x_1, x_2 \in D_g$ a z prostosti g plynie $g(x_1) \neq g(x_2)$. Keďže $g(x_1), g(x_2) \in D_f$, potom z prostosti f vyplýva, že $f(g(x_1)) \neq f(g(x_2))$, t.j. $h(x_1) \neq h(x_2)$, čiže $h = f \circ g$ je prostá. $\square$

Pridajme na záver ďalší pojem. Keďže f je funkcia, tak každému $x \in M \subseteq D_f$ je jednoznačne priradený prvok $y = f(x)$. Ak naviac predpokladáme, že f je prostá na M, tak je možné na množine $N = \{y; y = f(x), x \in M\}$ definovať funkciu g predpisom $g(y) = x$ pre $y \in N$ také, že $y = f(x)$. Pre svoj význam dostala funkcia g svoje pomenovanie.



Obr. 2.6: Graf prostej funkcie, ktorá nie je monotónna

Definícia 2.23. Nech f je prostá na $M \subseteq D_f$ a $N = \{y; y = f(x), x \in M\}$. *Inverznou funkciou* k funkcii f na množine M nazývame funkciu $\overline{f}$ definovanú na N, ktorá každému $y \in N$ priradí číslo $x \in M$ také, že $y = f(x)$.

Poznámka 2.24. Zámerne nepoužívame označenie f^{-1}, ktoré sa v literatúre bežne vyskytuje, pretože to môže viesť k mylnému dojmu, že ide o funkciu $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$. Taktiež sa budeme vyhýbať indexovému značeniu s umiestnením indexu na rôznych miestach, napríklad f_{-1}, pretože to môže skomplikovať situáciu, keby sme chceli uvažovať postupnosť inverzných funkcií.

Veta 2.25 (o vzťahu f a $\overline{f}$). *Nech f je prostá na $M \subseteq D_f$, nech $N = \{y; y = f(x), x \in M\}$ a $\overline{f}$ je inverzná funkcia k f na M. Potom*

(i) $(\forall x \in M)\ (\overline{f} \circ f)(x) = x$;

(ii) $(\forall y \in N)\ (f \circ \overline{f})(y) = y$.

Dôkaz. Nech $x \in M$. Potom $(\exists z \in N)\ z = f(x) \wedge x = \overline{f}(z)$, t.j. $x = \overline{f}(z) = \overline{f}(f(x)) = (\overline{f} \circ f)(x)$. Analogicky, nech $y \in N$, potom $(\exists u \in M)\ f(u) = y \wedge u = \overline{f}(y)$, čiže $y = f(u) = (f(\overline{f}(y))) = (f \circ \overline{f})(y)$. □

Veta jednak hovorí, že zloženie inverznej funkcie a pôvodnej funkcie dáva vždy identitu, avšak (ako sme to ukázali) na poradí skladania záleží, pretože v prvom prípade ide o identitu na množine M a v druhom na množine N, ktoré môžu byť úplne odlišnými množinami. Veta taktiež hovorí, že vzťah byť inverzný je vzájomný: inverzná funkcia k inverznej funkcii je pôvodná funkcia, t.j. $\overline{(\overline{f})} = f$. Z uvedeného vyplýva, že prosté funkcie na nejakej množine $M \neq \emptyset$ tvoria (vo všeobecnosti nekomutatívnu) grupu vzhľadom na operáciu $\circ$ (premyslite si to!).

Geometricky je vzťah medzi funkciou a jej inverznou nasledovný: ak f je prostá funkcia na D_f a $G_f = \{[x, f(x)]; x \in D_f\}$ je jej graf, tak z definície inverznej funkcie vyplýva, že $G_{\overline{f}} = \{[f(x), x], x \in D_f\}$ je graf inverznej funkcie, t.j. ak $[a, b] \in G_f$, tak

$[b,a] \in G_{\overline{f}}$. Vyplýva to z toho, že $D_{\overline{f}} = H_f$ a z toho, že pre $x \in D_f$ je $\overline{f}(f(x)) = x$. Body $[x, f(x)]$ a $[f(x), x]$ sú však osovo súmerné podľa priamky $y = x$. Z toho máme, že graf funkcie $\overline{f}$ je osovo súmerný s grafom funkcie f podľa osi súmernosti $y = x$.

Nasledujúca veta pojednáva o inverznej funkcii ku kompozícii. Opäť predpokladáme funkcie na takých množinách, aby kompozícia existovala.

Veta 2.26. *Ak f, g sú prosté funkcie, tak $\overline{f \circ g} = \overline{g} \circ \overline{f}$.*

Dôkaz. Nech $x \in D_{f \circ g}$ a $z \in H_{f \circ g}$, teda

$$z = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \;\Leftrightarrow\; \overline{f}(z) = g(x) \;\Leftrightarrow\; \overline{g}(\overline{f}(z)) = (\overline{g} \circ \overline{f})(z) = x,$$

čiže $\overline{g} \circ \overline{f}$ je inverzná funkcia k funkcii $f \circ g$. □

Veta 2.27. *Ak f je rastúca (klesajúca), potom $\overline{f}$ je tiež rastúca (klesajúca).*

Dôkaz. Nech $f : D_f \to H_f$ je klesajúca funkcia, teda podľa Vety 2.20 je prostá na D_f a existuje $\overline{f} : H_f \to D_f$. Nech $y_1, y_2 \in H_f$, $y_1 < y_2$ a $x_1 = \overline{f}(y_1)$, $x_2 = \overline{f}(y_2)$. Potom $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ a $f(x_1) < f(x_2)$. Keďže f je klesajúca, tak nerovnosť $f(x_1) < f(x_2)$ je možná len ak $x_1 > x_2$, t.j. $\overline{f}(y_1) > \overline{f}(y_2)$, čo znamená, že $\overline{f}$ je klesajúca na H_f. □

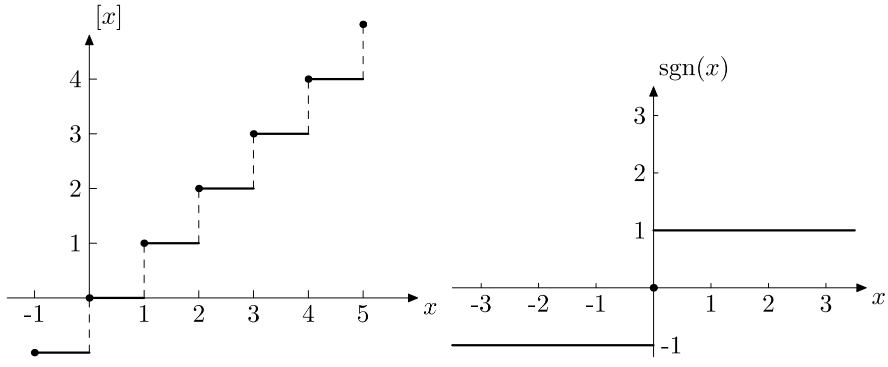
✠ Úlohy na precvičenie

◇ Dokážte, že $f \circ g$ je rastúca, ak f, g sú obe buď rastúce alebo klesajúce.
◇ Dokážte, že $f \circ g$ je klesajúca, ak jedna z funkcií f, g je rastúca a druhá klesajúca.
◇ Dokážte, že ak f je prostá, potom $\overline{f}$ je tiež prostá.
◇ Nájdite funkcie f, g rastúce na (a, b), aby funkcia $f \cdot g$ nebola rastúca na (a, b).
◇ Nájdite aspoň tri (netriviálne) triedy funkcií, pre ktoré platí $f \circ g = g \circ f$.

2.3 O elementárnych funkciách

S definíciou niektorých z týchto funkcií (exponenciálnych, mocninových, sínusu) sú isté problémy. Pri exponenciálnych a mocninových funkciách je totiž potrebné vedieť, čo je to a^b pre $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, na čo našťastie už vieme odpovedať na základe vybudovanej axiomatiky reálnych čísel. Horšie je to s funkciami sínus a kosínus. Ich stredoškolská definícia na intervale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ nie je totiž logicky bezchybná, pretože sa v nej len intuitívne predpokladá, že interval $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ možno navinúť na tú časť jednotkovej kružnice, ktorá leží v prvom kvadrante, prípadne zostáva neobjasnený pojem dĺžky kružnice. Keďže si toto zavedenie zopakujete na Úvode do matematiky, my zvolíme iný prístup, ktorý nie je síce taký názorný, ale je matematicky bezchybný.

V podstate chceme len naznačiť, ako možno tieto funkcie definovať exaktne. Naozaj to len naznačíme, lebo k vytvoreniu niektorých dôkazov sú potrebné také znalosti matematickej analýzy, ktoré zatiaľ nemáme. Možno sa oprávnene pýtať prečo neodložíme definície týchto funkcií na neskôr, keď už potrebné znalosti budeme mať? Je to hlavne z dôvodu, aby sme mohli tieto funkcie už teraz používať v príkladoch a cvičeniach. V opačnom prípade by sme sa ochudobnili o množstvo pekných príkladov.



Obr. 2.7: Neelementárne funkcie celá časť a signum

Elementárne verzus neelementárne funkcie

Funkcie (máme stále na mysli reálne funkcie jednej reálnej premennej) môžeme rozdeliť na elementárne a neelementárne. *Elementárnymi funkciami* pritom rozumieme také funkcie, ktoré vzniknú zo základných elementárnych funkcií (pozri nižšie) pomocou konečného počtu operácií súčtu, rozdielu, súčinu, podielu a skladania funkcií. Napríklad funkcia

$$f : y = 4\cos\sqrt[3]{5^x + 7} - (x-3)\log_{\frac{1}{3}}(\sinh 8x^3) + \operatorname{arctg}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{\sqrt{x - \ln x}}$$

je elementárna, ale taktiež $g : y = |x|$, pretože $g(x) = \sqrt{x^2}$. Funkcie, ktoré nie sú elementárne, nazývame *neelementárne*. Príkladmi takýchto funkcií sú funkcia celá časť $[x]$ a signum sgn, ktorých grafy sú znázornené na Obr. 2.7. Už sme sa tiež zoznámili s Dirichletovou funkciou χ a Riemannovou funkciou ρ, pozri Obr. 2.1, ktoré sú tiež neelementárne.

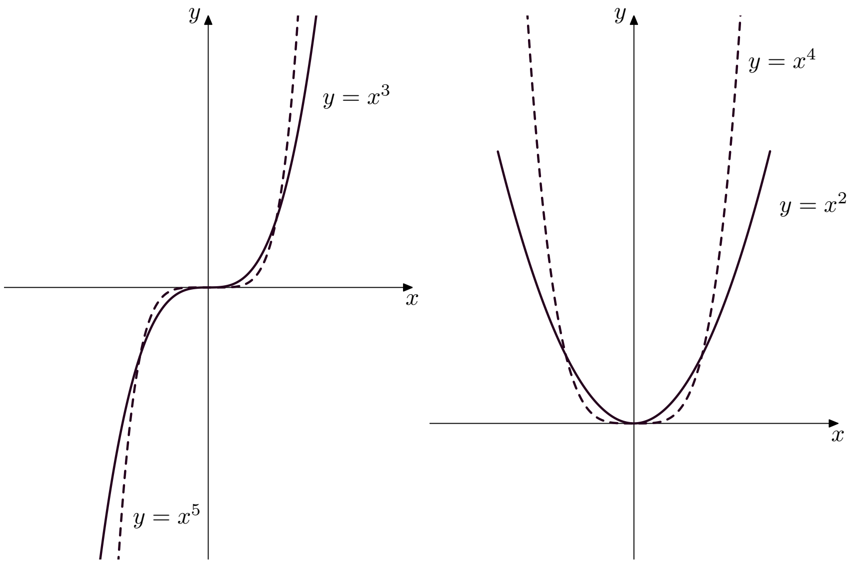
Množinu elementárnych funkcií môžeme ďalej rozdeliť na dve podmnožiny – *elementárne algebraické* (racionálne, iracionálne) a *elementárne transcendentné* funkcie. Elementárnu funkciu $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ nazývame *algebraická* na $\langle a, b\rangle$, akk existuje polynóm $P(x, y)$ taký, že

$$P(x, f(x)) = 0, \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

Funkcia $y = f(x)$ sa nazýva *transcendentná*, akk nie je algebraická. Nakoniec, algebraická funkcia je racionálna, akk je tvaru $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P, Q sú polynómy a iracionálna, akk nie je racionálna. Napríklad, funkcia $f : y = \frac{x^2+x-1}{2x-3}$ je elementárna algebraická racionálna funkcia, ale $g : y = \sqrt{x}$ je elementárna algebraická iracionálna funkcia na každom intervale $\langle a, b\rangle \subseteq \langle 0, +\infty)$.

Základné elementárne funkcie

Pod spoločným názvom *základné elementárne funkcie* rozumieme nasledujúce funkcie: konštantná funkcia, polynóm, racionálna lomená funkcia, mocninná, exponenciálna a



Obr. 2.8: Grafy mocninných funkcií s prirodzeným exponentom

logaritmická funkcia, goniometrické, cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické funkcie. Dá sa dokázať, že všetky exponenciálne, logaritmické, goniometrické, cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické sú transcendentné. Dôkaz však značne prekračuje úroveň našich doterajších poznatkov.

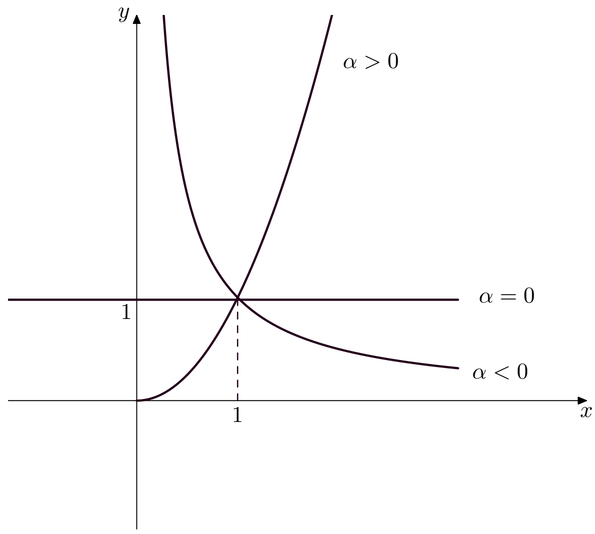
Povedzme si teraz o jednotlivých základných elementárnych funkciách trochu viac počnúc ich zavedením až po niektoré vlastnosti. Keďže nemáme dostatočný aparát na detailné vyšetrovanie vlastností týchto funkcií, len stručne zhrnieme niektoré vlastnosti na základe poznatkov získaných na strednej škole. Na základe vlastností sa kreslia grafy funkcií. My budeme istý čas v obrátenej situácii – budeme veriť, že grafy sú také, aké uvedieme a budeme si na ich základe ľahko pamätať vlastnosti, napr. monotónnosť, ohraničenosť, definičný obor, atď. Samozrejme tam, kde to pôjde, uvedieme aj príslušné dôkazy. Keďže veľa vecí už bolo vykonaných (povedaných) v axiomatike reálnych čísel a nasledujúcich častiach, prvé odseky budú dosť krátke.

Konštantná funkcia, polynóm, racionálna lomená funkcia

Všetky tieto funkcie sme už zaviedli v predchádzajúcich častiach, a teda sa im nijak špeciálne venovať nebudeme (zopakujte si ich definície, definičný obor, obor hodnôt, párnosť/nepárnosť...).

Mocninná funkcia

Medzi prvými sme v axiomatike reálnych čísel zaviedli číslo x^n, kde $n \in \mathbb{N}$. Ak teraz v tejto mocnine s prirodzeným exponentom ponecháme exponent pevný a základ bude premenná veličina, dostávame funkciu $f : x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ktorú nazývame *mocninná funkcia s prirodzeným exponentom.* Z axiomatiky vieme, že číslo x^n je definované pre každé reálne číslo x, teda $D_f = \mathbb{R}$. Ak $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, potom $H_f = \mathbb{R}$, funkcia f je nepárna a rastúca na D_f. Pre $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, je $H_f = \langle 0, +\infty)$,



Obr. 2.9: Graf mocninnej funkcie s reálnym exponentom

funkcia f je párna na D_f a rastúca na $\langle 0, +\infty)$ a klesajúca na $(-\infty, 0)$. Graf funkcie f je zobrazený na Obr. 2.8.

Všeobecnú *mocninnú funkciu* (s reálnym exponentom) získame z definície mocniny s reálnym exponentom tak, že exponent ponecháme pevný a základ budeme považovať za premennú veličinu, t.j. $f : x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Z vlastností mocniny s reálnym exponentom hneď máme

(i) $D_f = \langle 0, +\infty)$ a $H_f = \langle 0, +\infty)$ pre $\alpha > 0$;

(ii) $D_f = (0, +\infty)$ a $H_f = (0, +\infty)$ pre $\alpha < 0$;

(iii) $D_f = \mathbb{R}$ a a $H_f = \{1\}$ pre $\alpha = 0$.

Z monotónnosti mocniny s reálnym exponentom plynie, že

(i) f je rastúca na $\langle 0, +\infty)$ pre $\alpha > 0$;

(ii) f je klesajúca na $(0, +\infty)$ pre $\alpha < 0$;

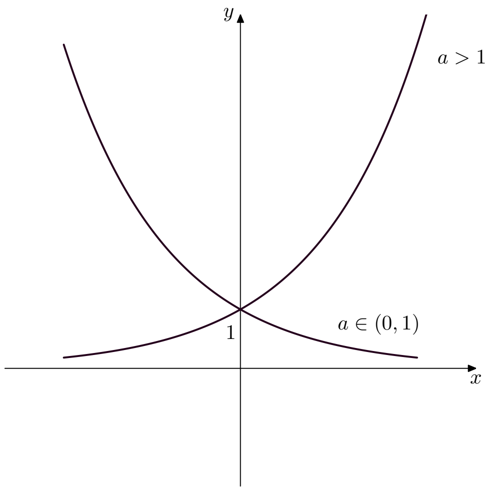
(iii) f je konštantná na $\mathbb{R}$ pre $\alpha = 0$.

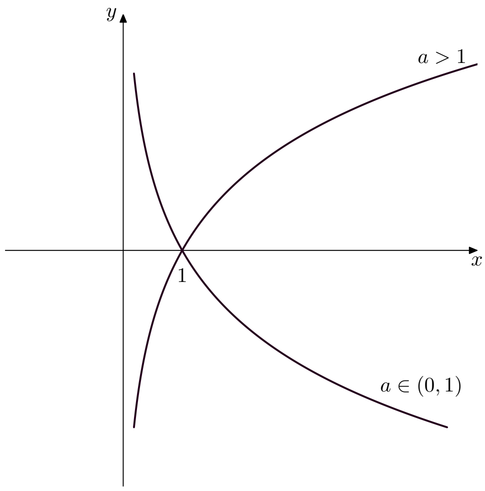
Graf mocninnej funkcie s reálnym exponentom je na Obr. 2.9.

Exponenciálna a logaritmická funkcia

Exponenciálnu funkciu získame z definície mocniny s reálnym exponentom tak, že základ $a > 0$, $a \neq 1$ ponecháme pevný a exponent bude premenná veličina, t.j. $f : x \mapsto a^x$. Z vlastností mocniny s reálnym exponentom hneď máme, že $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = (0, +\infty)$ a z monotónnosti mocniny s reálnym exponentom plynie, že f je rastúca na $\mathbb{R}$ pre $a > 1$ a klesajúca na $\mathbb{R}$ pre $a \in (0, 1)$.

Pre $a > 0$, $a \neq 1$ a $x > 0$ sme v axiomatike reálnych čísel definovali číslo $\log_a x$. Pri pevnom $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ je $f : x \mapsto \log_a x$ funkciou premennej x definovanou





Obr. 2.10: Graf exponenciálnej (vľavo) a logaritmickej funkcie (vpravo)

na $(0, +\infty)$, ktorú nazývame *logaritmická funkcia*. Avšak tiež si môžeme všimnúť, že $(\forall y \in (0, +\infty))(\exists x \in \mathbb{R})\ a^x = y$, teda $\varphi(y) = \log_a y$ je inverznou funkciou k funkcii $f : y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Podľa viet o vlastnostiach inverznej funkcie máme, že funkcia $g : x \mapsto \log_a x$ má nasledujúce vlastnosti: $D_g = (0, +\infty)$ a $H_g = \mathbb{R}$, je rastúca na $(0, +\infty)$ pre $a > 1$ a klesajúca na $(0, +\infty)$ pre $a \in (0, 1)$. Grafy exponenciálnej a logaritmickej funkcie sú na Obr. 2.10.

Poznámka 2.28. Môžeme si všimnúť, že každá logaritmická funkcia je transformáciou medzi multiplikatívnou grupou $((0, +\infty), \cdot)$ a aditívnou grupou $(\mathbb{R}, +)$, t.j. $\log_a$ je bijekcia medzi $(0, +\infty)$ a $\mathbb{R}$ spĺňajúca $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$. Inými slovami, *logaritmická funkcia je presne tá funkcia, ktorá prevádza operáciu násobenia na sčítanie a operáciu delenia (nenulovým prvkom) na odčítanie.*

Goniometrické funkcie

Funkcie sínus a kosínus možno logicky bezchybne definovať ako riešenia istého systému funkcionálnych rovníc, hoci to nie je také názorné ako zavedenie v pravouhlom trojuholníku, či jednotkovej kružnici. Dá sa dosť zložito dokázať nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 2.29. *Existuje práve jedna dvojica funkcií S a C definovaných na $\mathbb{R}$, ktoré vyhovujú nasledujúcim trom podmienkam:*

(i) $(\forall x_1, x_2, x \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} S(x_1 + x_2) &= S(x_1)C(x_2) + C(x_1)S(x_2); \\ C(x_1 + x_2) &= C(x_1)C(x_2) - S(x_1)S(x_2); \\ S^2(x) + C^2(x) &= 1; \end{aligned}$$

(ii) $S(0) = 0 \wedge C(0) = 1 \wedge S(\frac{\pi}{2}) = 1 \wedge C(\frac{\pi}{2}) = 0;$

(iii) $(\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}))\ 0 < S(x) < x.$

Funkciu S nazývame *sínus* a označujeme sin, funkciu C nazývame *kosínus* a označujeme cos. Pre ich hodnoty $S(x)$ a $C(x)$ je zaužívané označenie bez zátvoriek, t.j. $\sin x$ a $\cos x$. Je zrejmé, že tieto funkcie sú totožné so stredoškolsky zavedenými funkciami sínus a kosínus, pretože tie spĺňajú podmienky (i), (ii) a (iii) a podľa vysloveného tvrdenia existuje jediná dvojica funkcií S a C s týmito vlastnosťami. Z uvedenej jednoznačnosti zároveň vyplýva, že z vlastností (i), (ii) a (iii) sa musia dať nejako odvodiť všetky ostatné vlastnosti funkcií $S(x) = \sin x$ a $C(x) = \cos x$ známe zo strednej školy. Ukážeme to iba na niekoľkých príkladoch.

Nech $x \in \mathbb{R}$ je ľubovoľné. Potom

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(ii)}{=} \sin 0 = \sin(x + (-x)) \overset{(i)}{=} \sin x \cos(-x) + \cos x \sin(-x) \\ 1 &\overset{(ii)}{=} \cos 0 = \cos(x + (-x)) \overset{(i)}{=} \cos x \cos(-x) - \sin x \sin(-x). \end{aligned}$$

Vynásobením prvej rovnice číslom $\sin x$ a druhej $\cos x$ dostávame

$$\begin{aligned} 0 &= \sin^2 x \cos(-x) + \sin x \cos x \sin(-x) \\ \cos x &= \cos^2 x \cos(-x) - \cos x \sin x \sin(-x) \end{aligned}$$

a sčítaním týchto rovníc máme

$$\cos(-x)[\sin^2 x + \cos^2 x] = \cos x \overset{(i)}{\Rightarrow} \cos(-x) = \cos x.$$

Tým sme ukázali, že cos je párna funkcia. Pomocou Tvrdenia 2.29 dokazujte ďalšie vlastnosti funkcií sin a cos.

Často budeme používať goniometrické vzorce, ktoré si vlastne netreba pamätať, ak poznáme Tvrdenie 2.29. Ukážeme, ako si na ich základe odvodiť mnohé ďalšie. Na základe (i) máme

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta; \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta; \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1. \end{aligned}$$

Z nepárnosti funkcie sin a párnosti funkcie cos hneď máme

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta; \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha \cos(-\beta) - \sin\alpha \sin(-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta, \end{aligned}$$

čo sa zvykne súhrne označovať ako *súčtové vzorce*. Ak $\beta = \alpha$, dostávame *vzorce pre dvojnásobný uhol*

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \sin\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha; \\ \cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \end{aligned}$$

Ak si zapamätáte, že $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$ a $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$, dosadíte do výrazu vľavo a použijete Tvrdenie 2.29 (i), dostanete jednoducho

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};\\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.
\end{aligned}
$$

Veľmi jednoducho je možné odvodiť aj nasledujúce *multiplikatívne vzorce*. Stačí si pod seba napísať všetky štyri súčtové vzorce $\sin(\alpha\pm\beta)$, $\cos(\alpha\pm\beta)$ a vždy dva vhodné sčítať. Napríklad

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) &= (\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)+(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)\\
&= 2\sin\alpha\cos\beta\\
&\Rightarrow \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)].
\end{aligned}
$$

Zhrnutím tohto postupu teda dostávame

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];\\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)];\\
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];\\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)].
\end{aligned}
$$

Takto by sme mohli pokračovať ďalej a odvodiť mnoho iných identít, čo však nie je pre nás v tomto momente dôležité. Ako ste si teda mohli všimnúť, úplne postačuje zapamätať si zavedenie sínusu a kosínusu v Tvrdení 2.29, ostatné vzorce sa z neho jednoducho odvodia.

Veta 2.30. *Funkcie* sin *a* cos *sú ohraničené na* $\mathbb{R}$.

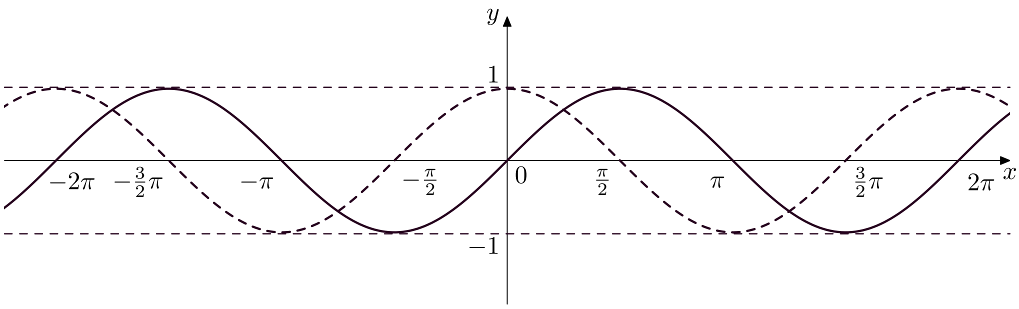
Dôkaz. Zo vzťahu $(\forall x\in\mathbb{R})\ \sin^2 x+\cos^2 x = 1$ vyplýva, že $(\forall x\in\mathbb{R})\ |\sin x| \le 1 \wedge |\cos x| \le 1$. □

Veta 2.31. *Funkcie* sin *a* cos *sú periodické s periódou* 2π.

Dôkaz. Nech $y\in\mathbb{R}$ je ľubovoľné a $x = y+2\pi$. Potom

$$
\sin x - \sin y = \sin(y+2\pi)-\sin y = 2\cos\frac{2y+2\pi}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{2} = 2\cos(y+\pi)\cdot 0 = 0,
$$

teda $\sin(y+2\pi) = \sin y$, čiže sin je periodická funkcia. Ukážme, že $p = 2\pi$ je periódou, t.j. najmenšie také kladné číslo, že $(\forall x\in\mathbb{R})\ \sin(x+p) = \sin x$.



Obr. 2.11: Grafy funkcií sínus (plná) a kosínus (čiarkovaná)

Predpokladajme, že existuje $0 < p_0 < 2\pi$, ktoré je periódou funkcie sin. Keby $p_0 = \pi$, tak pre $x = \frac{\pi}{2}$ by platilo $\sin(\frac{\pi}{2} + \pi) = \sin\frac{3}{2}\pi = -1 \neq 1 = \sin\frac{\pi}{2}$, teda $p_0 = \pi$ nie je periódou. Keby nejaké $p_0 \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$ bolo periódou, tak $\sin p_0 = \sin(0 + p_0) = \sin 0 = 0$, čo je opäť spor, pretože sínus má nulovú hodnotu len v 0, π a 2π. $\square$

Veta 2.32. *(i) Funkcia* sin *je rastúca na každom intervale* $\langle 2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\rangle$ *a klesajúca na každom* $\langle (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Funkcia cos *je rastúca na každom intervale* $\langle (2k+1)\pi, (2k+2)\pi\rangle$ *a klesajúca na každom* $\langle 2k\pi, (2k+1)\pi\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dôkaz. Prevedieme iba pre funkciu sin. Vzhľadom na jej periodičnosť sa obmedzíme iba na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ a $\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\rangle$.

Nech $x_1, x_2 \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$, $x_1 < x_2$. Potom $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \pi \Rightarrow \sin\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$ a $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{x_1 + x_2}{2} > 0$. Z toho teda

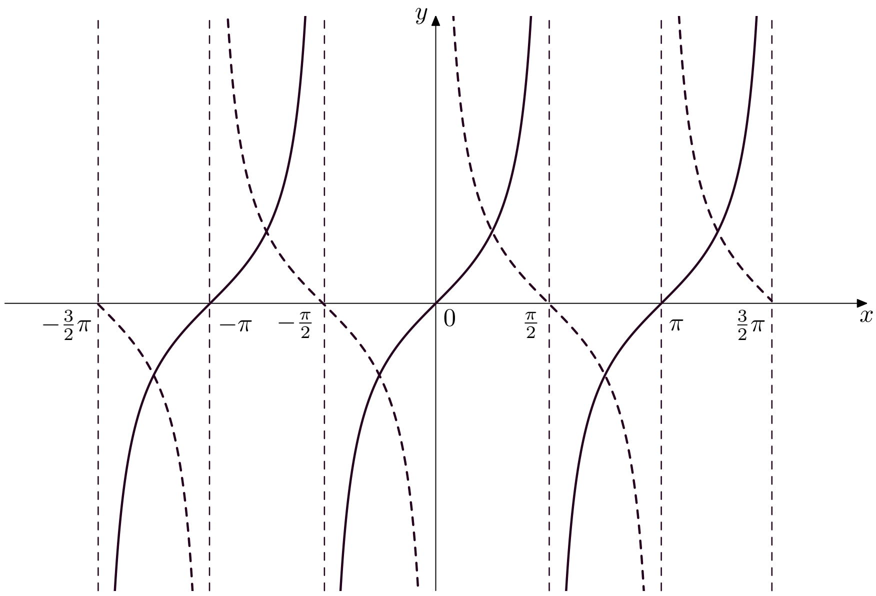
$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2\sin\frac{x_2 - x_1}{2} \cdot \cos\frac{x_1 + x_2}{2} > 0 \;\Rightarrow\; \sin x_2 > \sin x_1.$$

Nech $x_1, x_2 \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\rangle$, $x_1 < x_2$. Potom $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 - \pi < x_2 - \pi \leq \frac{\pi}{2}$ a z predchádzajúcej časti je $\sin(x_1 - \pi) < \sin(x_2 - \pi)$. Ďalej z nepárnosti sínusu je $\sin(x_i - \pi) = -\sin(\pi - x_i) = -\sin x_i$, $i = 1, 2$, a teda $\sin x_1 > \sin x_2$. $\square$

O obore hodnôt funkcií sínus a kosínus zatiaľ veľa dokázať nevieme (potrebovali by sme pojem spojitosť), ale zoberieme ako fakt, že $H_{\sin} = H_{\cos} = \langle -1, 1\rangle$. Známe grafy oboch funkcií sú na Obr. 2.11.

Poznámka 2.33. Základy goniometrie boli položené Egypťanmi a Babylončanmi, po výpravách Alexandra Veľkého sa poznatky o delení uhla na 360° dostali ku Grékom, ktorých oblasťou záujmu bola hlavne trigonometria (praktické úlohy súvisiace s uhlami a trojuholníkmi). Funkcie sínus a kosínus sa zaviedli v Indii a dnes používané názvy tangens a kotangens (pozri nižšie) sa objavili v Európe až v 16.–17. storočí. V tomto období sa utriedili poznatky a goniometrické funkcie sa začali používať na opis periodických dejov.

Definícia 2.34. Funkciu $\frac{\sin x}{\cos x}$ definovanú pre $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ nazývame *tangens* a označujeme $\operatorname{tg} x$. Funkciu $\frac{\cos x}{\sin x}$ definovanú pre $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ nazývame *kotangens* a označujeme $\operatorname{cotg} x$.



Obr. 2.12: Grafy funkcií tangens (plná) a kotangens (čiarkovaná)

Vzhľadom na svoju definíciu sa vlastnosti funkcií tangens a kotangens odvodzujú na základe už známych vlastností sínusu a kosínusu, takže ich iba zhrnieme[5]:

(i) tg a cotg sú nepárne funkcie na svojich definičných oboroch;

(ii) tg a cotg sú periodické s periódou π;

(iii) funkcia tg je rastúca na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a teda vzhľadom na periodičnosť aj na ďalších intervaloch;

(iv) funkcia cotg je klesajúca na $(0, \pi)$, a teda vzhľadom na periodičnosť aj na ďalších intervaloch;

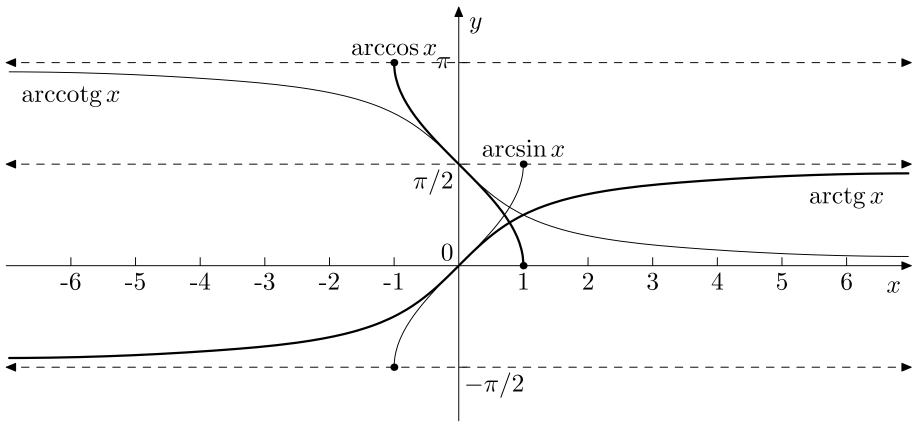
(v) obor hodnôt tg a cotg je $\mathbb{R}$ (overenie tohto je momentálne nad naše sily).

Časti grafov týchto funkcií sú na Obr. 2.12.

Poznámka 2.35. Obyčajne tu študenti končia pri vymenovaní goniometrických funkcií. Existujú však mnohé ďalšie, ktoré sa vyvinuli historicky napríklad pre potreby merania vzdialeností na guli. Niektoré z nich teraz spomenieme zadaním predpisu (vyšetrenie ich vlastností a zakreslenie grafov prenechávame čitateľovi ako cvičenie).

$$
\begin{aligned}
\sec x &= \frac{1}{\cos x}; & \operatorname{cosec} x &= \frac{1}{\sin x};\\
\operatorname{versin} x &= 1 - \cos x; & \operatorname{crs} x &= 1 - \sin x;\\
\operatorname{excosec} x &= \operatorname{cosec} x - 1; & \operatorname{exsec} x &= \sec x - 1;\\
\operatorname{haversin} x &= \frac{1-\cos x}{2}; & \operatorname{havercosin} x &= \frac{1+\cos x}{2};\\
\operatorname{hacoversin} x &= \frac{1-\sin x}{2}; & \operatorname{hacovercosin} x &= \frac{1+\sin x}{2}; \dots
\end{aligned}
$$

[5]Overte (dokážte), že uvedené vlastnosti sú naozaj pravdivé!



Obr. 2.13: Grafy cyklometrických funkcií

Cyklometrické funkcie

Goniometrické funkcie nie sú prosté na svojich definičných oboroch, a teda k nim neexistujú inverzné funkcie. Ak ich však zúžime na vhodné intervaly, na ktorých prosté sú, budú k nim existovať na týchto intervaloch inverzné funkcie, ktoré súhrne nazývame *cyklometrické funkcie.*

Definícia 2.36. (i) Funkciou *arkussínus* nazývame inverznú funkciu k zúženiu funkcie sin na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Označujeme $\arcsin : \langle -1, 1\rangle \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.

(ii) Funkciou *arkuskosínus* nazývame inverznú funkciu k zúženiu funkcie cos na interval $\langle 0, \pi\rangle$. Označujeme $\arccos : \langle -1, 1\rangle \to \langle 0, \pi\rangle$.

(iii) Funkciou *arkustangens* nazývame inverznú funkciu k zúženiu funkcie tg na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Označujeme $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(iv) Funkciou *arkuskotangens* nazývame inverznú funkciu k zúženiu funkcie cotg na interval $(0, \pi)$. Označujeme $\operatorname{arccotg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$.

Vzhľadom na vety pojednávajúce o vlastnostiach inverzných funkcií hneď dostávame, že napr. arcsin je nepárna, rastúca na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ s vlastnosťami $(\forall x \in \langle -1, 1\rangle)\ \sin(\arcsin x) = x$ a $(\forall x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle)\ \arcsin(\sin x) = x$. Podobne určte vlastnosti ostatných cyklometrických funkcií. Ich grafy sú uvedené na Obr. 2.13.

Na záver uveďme ešte niektoré užitočné vzťahy:

$$(\forall x \in \langle -1, 1\rangle)\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2};$$
$$(\forall x \in \mathbb{R})\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2};$$
$$(\forall x \in \mathbb{R})\ \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$
$$(\forall x \in (-1, 1))\ \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ukážme napr. platnosť prvého vzťahu: nech $\arcsin x = y$, teda $y \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ a $\sin y = x$, čiže $\cos(\frac{\pi}{2} - y) = x$ a $\arccos x = \frac{\pi}{2} - y$. Dosadením teda $\arcsin x + \arccos x = y + (\frac{\pi}{2} - y) = \frac{\pi}{2}$.

Hyperbolické a hyperbolometrické funkcie

Uvedieme len hyperbolické funkcie so základom e = 2,7182818..., hoci sa dajú definovať s ľubovoľným základom $a > 0$, $a \neq 1$. Ich grafy sa podstatne zmenia, keď budeme uvažovať napr. $0 < a < 1$. Ide teda o funkcie

(i) *hyperbolický sínus*: $\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$;

(ii) *hyperbolický kosínus*: $\cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$;

(iii) *hyperbolický tangens*: $\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$;

(iv) *hyperbolický kotangens*: $\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Keďže sú to všetko funkcie definované pomocou exponenciálnych funkcií, ich vlastnosti sa dajú ľahko určiť z vlastností funkcií e^x a e^{-x}, a teda z hľadiska vyšetrovania nie sú zaujímavé. Tiež majú celý rad vlastností podobných goniometrickým funkciám (preto v ich názve figurujú názvy goniometrických funkcií sínus, kosínus, tangens a kotangens), napr.

$$
\begin{aligned}
(\forall x \in \mathbb{R})\ & \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1; \\
(\forall x, y \in \mathbb{R})\ & \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y; \\
(\forall x, y \in \mathbb{R})\ & \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y;
\end{aligned}
$$

a mnohé ďalšie. Dôvod, prečo sa tieto funkcie označujú prívlastkom hyperbolické, je ten, že $x = a\cosh t$, $y = a \sinh t$, $t \in \mathbb{R}$, je parametrické vyjadrenie hyperboly $x^2 - y^2 = a^2$ (overte!). Na základe operácií s exponenciálnou funkciou načrtnite grafy všetkých hyperbolických funkcií.

Poznamenajme len, že inverzné funkcie k hyperbolickým sa nazývajú *hyperbolometrické funkcie*. Až na cosh sú všetky hyperbolické funkcie prosté (dokážte!), a teda k nim existujú inverzné funkcie (v prípade cosh sa opäť zoberie parciálna funkcia $\varphi : \langle 0, +\infty) \to \langle 1, +\infty)$ a zostrojí sa k nej inverzná funkcia). Ako ukážku uvádzame odvodenie inverznej funkcie k funkcii sinh.

Je ľahké ukázať, že sinh je rastúca funkcia na $\mathbb{R}$ (urobte to!). Potom

$$
y = \frac{\mathrm{e}^{\overline{f}(y)} - \mathrm{e}^{-\overline{f}(y)}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{2\overline{f}(y)} - 1}{2\,\mathrm{e}^{\overline{f}(y)}} = \left| \begin{array}{c} \text{substitúcia} \\ \overline{f}(y) = \ln t \end{array} \right| = \frac{t^2 - 1}{2t} \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 2ty - 1 = 0.
$$

Riešením tejto kvadratickej rovnice s parametrom y dostávame korene

$$
t_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.
$$

Keďže číslo $t_2 = y - \sqrt{y^2+1}$ nevyhovuje substitúcii $\overline{f}(y) = \ln t$, pretože $y \leq \sqrt{y^2} < \sqrt{y^2+1}$, t.j. $t_2 = y - \sqrt{y^2+1} < 0$, jediným riešením je $\overline{f}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$, čo je hľadaná inverzná funkcia k funkcii sinh nazývaná *argument sínusu hyperbolického*, označujeme argsinh.

Podobne môžeme odvodiť predpisy pre ostatné hyperbolometrické funkcie, t.j.

(i) *argument sínusu hyperbolického*: $\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $x \in \mathbb{R}$;

(ii) *argument kosínusu hyperbolického*: $\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, $x \in \langle 1, +\infty)$;

(iii) *argument tangensu hyperbolického*: $\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$;

(iv) *argument kotangensu hyperbolického*: $\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$, $|x| > 1$.

✠ Úlohy na premýšľanie

◇ Každá funkcia, ktorá vznikne z elementárnych funkcií pomocou konečného počtu operácií súčtu, rozdielu, súčinu, podielu a skladania funkcií, je elementárna. Vysvetlite!

◇ Ak f a g sú elementárne, potom aj funkcia $h(x) = f(x)^{g(x)}$ pre $x \in D_f \cap D_g \cap \{x \in D_f; f(x) > 0\}$ je elementárna. Vysvetlite!

◇ Načrtnite graf funkcie $\arcsin \circ \sin$ a $\sin \circ \arcsin$ na $\mathbb{R}$.