Kapitola 3

Postupnosti reálnych čísel

Pojem postupnosť je jedným z dôležitých pojmov matematickej analýzy. Má veľký význam aj v rôznych aplikáciách, napríklad pri hľadaní približných riešení rôznych úloh, pri iteračných procesoch a pod. Na druhej strane, ak poznáme pojem funkcie, potom pojem postupnosti nie je ničím iným než špeciálnym prípadom funkcie definovanej na množine prirodzených čísel. Preto nie je žiaden dôvod, ktorý by robil nevyhnutným študovať niektoré pojmy pre postupnosti. Jednako sa to robí v matematickej analýze často. Je to zapríčinené viacerými skutočnosťami. Jedna z nich je tá, že prístup cez postupnosti je názorný a pre niektoré úvahy úplne postačujúci. Ďalej je to fakt, že niektoré základné pojmy zavedené pre reálne funkcie (ale nielen tie) možno popísať pomocou postupností. Týka sa to okrem iného pojmu limity i pojmu spojitosti. Tým si získava pojem postupnosti významné postavenie. Okrem tu spomenutých dôvodov existujú i ďalšie.

S postupnosťami sa v praxi stretávame tiež vtedy, keď si z nejakých praktických dôvodov všímame hodnoty nejakej funkcie iba pre diskrétne hodnoty argumentu. Môže ísť napr. o funkciu času, pričom si všímame hodnoty iba v pravidelných časových okamihoch (napr. vývoj kurzu meny voči inej mene len každú hodinu)… Tieto úvahy ľahko sformulujeme do nasledujúcej definície.

Definícia 3.1. *Postupnosťou* nazývame funkciu definovanú na množine prirodzených čísel.

Vzhľadom na predchádzajúcu kapitolu máme na mysli reálnu funkciu, t.j. zobrazenie $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Ak je však oborom hodnôt takejto funkcie (vždy definovanej na $\mathbb{N}$) iná množina čísel (celé, racionálne, komplexné, atď.), tak je možné hovoriť o postupnosti celých, racionálnych, komplexných čísel. Naše úvahy obmedzíme iba na postupnosti reálnych čísel. V zobrazení $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je každému prvku $n \in \mathbb{N}$ priradený jediný prvok množiny $\mathbb{R}$, ktorý označujeme $a(n)$. Ako sme však spomenuli pri označovaní funkcií a ich hodnôt, pri postupnostiach sa zaužívalo označenie a_n namiesto $a(n)$ a namiesto symbolu a zápis $(a_n)_1^\infty$. Tento zápis[1] tiež znamená, že uvažovaná postupnosť je nekonečná. Konečnou m-člennou ($m \in \mathbb{N}$) postupnosťou reálnych čísel budeme rozumieť funkciu $a : \{1, 2, \dots, m\} \to \mathbb{R}$ a budeme písať $(a_n)_1^m$. Pre nás slovo postupnosť bude znamenať nekonečnú postupnosť, t.j. funkciu definovanú na celej množine $\mathbb{N}$. Pokiaľ budeme výnimočne uvažovať konečnú postupnosť, vždy to zdôrazníme.

[1] iným používaným zápisom je $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ a ďalšie

Prvky a_n, $n \in \mathbb{N}$, nazývame *členy postupnosti*, prvok a_k budeme nazývať *k-ty člen postupnosti* $(a_n)_1^\infty$ a číslo k *index člena* a_k. Každá postupnosť určuje množinu reálnych čísel $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, ktorú nazývame *množina členov postupnosti* $(a_n)_1^\infty$. Môže nám napadnúť otázka, či aj každá množina sa dá usporiadať do postupnosti. Odpoveď na túto otázku je záporná a prekračuje možnosti nášho kurzu (stretnete sa s tým v Teórii množín). Z množiny členov postupnosti nemožno vo všeobecnosti postupnosť zrekonštruovať, okrem prípadu konštantných postupností.

Poznamenajme ešte, že pri zápise postupností je výhodné pripustiť niektoré odchýlky od definície. Napríklad, nedodržiava sa vždy doslovne požiadavka, že definičný obor postupnosti je množina všetkých prirodzených čísel. Z rôznych dôvodov sa stretávame s postupnosťami, ktorých prvý člen je označený trebárs a_0, x_{-3} či w_4. Môže ísť o postupnosti

$$(a_n)_0^\infty, \quad (x_k)_{-3}^\infty, \quad (w_i)_4^\infty.$$

Ide tu len o formálnu odchýlku od definície, pretože každá z týchto postupností sa dá napísať tak, aby začínala od indexu 1.

Druhá nedôslednosť sa týka toho, že môže existovať prirodzené číslo (alebo aj viac takých), pre ktoré postupnosť nie je definovaná, napr. výraz $a_n = \frac{n^2}{(n-3)(n-7)}$, $n \in \mathbb{N}$, nie je definovaný pre $n = 3$ a $n = 7$. To však nevadí, pretože namiesto $(a_n)_1^\infty$ môžeme uvažovať postupnosť $(b_n)_1^\infty$, kde

$$b_1 = a_1,\ b_2 = a_2,\ b_3 = a_4,\ b_4 = a_5,\ b_5 = a_6,\ b_6 = a_8, \dots$$

Ak teda budeme hovoriť, že postupnosť $(a_n)_1^\infty$ má nejakú vlastnosť, tak budeme tým myslieť, že túto vlastnosť má postupnosť $(b_n)_1^\infty$. Túto dohodu prijímame preto, lebo pri skúmaní niektorých dôležitých vlastností postupností (napr. limít postupností) nevadí, že nie sú určené všetky členy postupnosti. Počet nedefinovaných členov však musí byť konečný, t.j. od istého indexu počnúc už musia byť definované všetky členy (v našom prípade od ôsmeho člena).

Podobne ako funkcia, aj postupnosť môže byť zadaná rôznymi spôsobmi. Medzi najčastešie patrí *explicitný tvar*, t.j. pomocou formuly, ktorá umožňuje určiť ľubovoľný člen postupnosti podľa jeho indexu, napr. $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ alebo $b_{2n} = \frac{-1}{2n-1}$ a $b_{2n-1} = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Ďalším rozšíreným spôsobom je postupnosť zadaná *rekurentným vzťahom*, ktorý dovoľuje vypočítať člen postupnosti pomocou známych predchádzajúcich členov. Tu spomeňme *aritmetickú postupnosť* s diferenciou $d \in \mathbb{R}$ a prvým členom $a_1 = a$, ktorá je zadaná rekurentným vzťahom $a_{n+1} = a_n + d$, t.j. $a_n = a + (n-1)d$, $n \in \mathbb{N}$. Podobne zavedieme *geometrickú postupnosť* s kvocientom $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a prvým členom $b_1 = a$ rekurentným vzťahom $b_{n+1} = b_n q$, t.j. $b_n = bq^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Asi najznámejšou rekurentne zadanou postupnosťou je *Fibonacciho*[2] *postupnosť* daná vzťahom $F_{n+2} = F_{n+1} - F_n$, $n \in \mathbb{N}$ a podmienkami $F_1 = F_2 = 1$. Okrem týchto spôsobov zadania postupnosti existujú aj ďalšie (vymenovaním, opisom, atď.).

Vzhľadom na uvedenú definíciu postupnosti ako špeciálneho prípadu funkcie môžeme prepísať všetky pojmy a tvrdenia, ktoré boli uvedené pre funkcie (samozrejme tie, ktoré majú aj v tomto špeciálnom prípade zmysel) do reči postupností (urobte to!). Na niektorých miestach to ešte upresníme, prípadne vyslovíme definíciu, či tvrdenie, ktoré budeme v tom momente potrebovať.

[2] Leonardo Pisanský (1170–1240), známy aj ako Fibonacci (syn Bonacciho)

3.1 Limita postupnosti

Jedným zo základných princípov (pilierov) matematickej analýzy je pojem limity, resp. operácie limitného prechodu. V prípade postupností tento pojem vyjadruje špeciálnu vlastnosť, ktorá by sa dala vyjadriť ako tendencia členov týchto postupností nadobúdať s rastúcim indexom n hodnotu približujúcu sa k istému číslu.

Uvažujme postupnosť $(\frac{n}{n+1})_1^\infty$ s množinou členov $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{99}{100}, \dots, \frac{999}{1000}, \dots\}$. Vidíme, že pre dostatočne veľké n sa členy tejto postupnosti málo líšia od čísla 1. Pri geometrickej interpretácii dostaneme body grafu postupnosti čoraz viac sa približujúce k priamke s rovnicou $y = 1$, ich vzdialenosti od tejto priamky sa stále zmenšujú (nakreslite si to!).

Toto intuitívne poňatie limity postupnosti reprezentované výrazmi „blížiť sa k istému číslu“ alebo „vzdialenosti členov postupnosti sa od istého čísla stále zmenšujú“ je potrebné matematicky poriadne sformulovať, najlepšie určitým spôsobom aritmetizovať (vyjadriť pomocou nerovností). To sa v plnej miere podarilo až v 19. storočí vďaka prácam Cauchyho a Bolzana, v neposlednom rade bolo toto úsilie dovŕšené Weierstrassom v polovici 19. storočia.

Definícia 3.2. Číslo $a \in \mathbb{R}$ nazývame *limitou postupnosti* $(a_n)_1^\infty$, akk

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Fakt, že $a \in \mathbb{R}$ je limitou postupnosti $(a_n)_1^\infty$, skrátene zapisujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ alebo tiež $a_n \to a$ pre $n \to \infty$. Postupnosť $(a_n)_1^\infty$, ktorá má limitu, nazývame *konvergentnou*. Postupnosti, ktoré nie sú konvergentné, nazývame *divergentné*. Môže to byť zapríčinené tým, že žiadne reálne číslo nie je jej limitou, ako napr. postupnosť $((-1)^n)_1^\infty$, alebo má za limitu nevlastné číslo (o tom až neskôr).

Z Vety 1.14 máme, že

$$|a_n - a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \iff a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Vzhľadom na geometrickú interpretáciu absolútnej hodnoty to znamená, že ak postupnosť $(a_n)_1^\infty$ má za limitu číslo $a \in \mathbb{R}$, potom ak skonštruujeme okolo čísla a ľubovoľný pás $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, tak dokážeme nájsť také (reálne) číslo n_0, že pre všetky indexy od neho väčšie ležia všetky členy postupnosti s týmito indexami s tomto páse. Je jasné, že konečný počet členov s indexami menšími ako n_0 môže ležať mimo tohto pásu, čo nám intuitívne prezrádza, že na konvergenciu (divergenciu) postupnosti nemá vplyv chovanie sa konečného počtu jej členov (túto skutočnosť presne sformulujeme v Dôsledku 3.33). Preto budeme používať dohodu: ak nejaký predpoklad nemusí platiť pre konečný počet členov, tak budeme hovoriť, že platí *pre skoro všetky* $n \in \mathbb{N}$, t.j. od istého indexu počnúc. Formálne, *výrok V (týkajúci sa prirodzených čísel) platí pre skoro všetky* $n \in \mathbb{N}$, akk $(\exists n_1)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)\ V(n)$. Teda v prípade, že $a \in \mathbb{R}$ je limitou postupnosti $(a_n)_1^\infty$, môžeme túto definíciu preformulovať nasledovne: pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ platí vzťah $|a_n - a| < \varepsilon$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Tiež si môžeme všimnúť, že n_0 súvisí s indexami, a preto je niekedy výhodné brať ho ako prirodzené číslo, aby sme sa vyhli komplikovaným indexom typu $\lfloor n_0 \rfloor + 1$. V ďalšom to na niektorých miestach použijeme.

Vieme teda, že nie každá postupnosť musí mať limitu (klasickým príkladom je $((-1)^n)_1^\infty$). Môže mať konvergentná postupnosť aj viac limít? Odpoveď na túto otázku dáva nasledujúca veta.

Veta 3.3 (o jednoznačnosti limity). *Každá postupnosť má nanajvýš jednu limitu.*

Dôkaz. Ak postupnosť je divergentná, niet čo dokazovať. Predpokladajme preto, že postupnosť $(a_n)_1^\infty$ má dve navzájom rôzne limity $a, b \in \mathbb{R}$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $a < b$. Z definície potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_1)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)\ |a_n - a| < \varepsilon$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_2)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2)\ |a_n - b| < \varepsilon.$$

Položme $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$ a $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom $(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ b - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Rightarrow \frac{b-a}{2} < \varepsilon$, čo je podľa trichotómie usporiadania spor. Teda konvergentná postupnosť má práve jednu limitu. □

Pripomeňme si, že postupnosť je ohraničená, akk je ohraničená množina jej členov. Prepísaním Tvrdenia 2.10 pre postupnosti máme, že postupnosť $(a_n)_1^\infty$ je ohraničená práve vtedy, keď $(\exists K \in \mathbb{R}, K > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \le K$. Vzťah konvergencie a ohraničenosti postupnosti je obsahom nasledujúceho tvrdenia.

Veta 3.4. *Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.*

Dôkaz. Nech $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, teda

$$(\forall \varepsilon > 0, \varepsilon = 1)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0)\ |a_n - a| < 1, \text{ t.j. } a - 1 < a_n < a + 1.$$

Označme $A = \{a_n; n \le n_0\}$ a $B = \{a_n; n \ge n_0\}$. Potom je množina A ohraničená, pretože je konečná (a platí pre ňu veta o maxime a minime konečnej množiny). Množina B je tiež ohraničená, pretože obsahuje tie členy postupnosti $(a_n)_1^\infty$, pre ktoré platí nerovnosť $a - 1 < a_n < a + 1$, t.j. $H = a + 1$ a $D = a - 1$. Keďže množina členov postupnosti $(a_n)_1^\infty$ je zjednotením ohraničených množín A a B, je postupnosť $(a_n)_1^\infty$ ohraničená. □

Bystrému pozorovateľovi asi neunikne, že počet prvkov v množinách A a B závisí od nájdeného n_0. Ak v konkrétnom prípade dospejeme k $n_0 < 1$, tak $A = \emptyset$ a B je celá množina členov postupnosti, čo však nie je problém, pretože množina členov postupnosti $(a_n)_1^\infty$ sa rovná množine B, ktorá je ohraničená.

Tvrdenie vety nemožno obrátiť, pretože postupnosť $((-1)^n)_1^\infty$ je ohraničená (stačí su uvedomiť, že množina jej členov je dvojprvková, teda konečná), ale už vieme, že je divergentná.

✠ Úlohy na premýšľanie

◇ Dokážte, že každá postupnosť, ktorá je súčasne aritmetická aj geometrická, je konštantná (stacionárna).
◇ Nech pre postupnosť $(a_n)_1^\infty$ platí: $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}, k \ge n)\ |a_k - a| < \frac{1}{n}$. Je postupnosť $(a_n)_1^\infty$ konvergentná?

3.1.1 Operácie s limitami

Základné aritmetické operácie sú pre postupnosti definované rovnako ako pre funkcie, t.j. súčtom, rozdielom, súčinom a podielom postupností $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ rozumieme postupnosti $(a_n+b_n)_1^\infty = (a_n)_1^\infty + (b_n)_1^\infty$, $(a_n-b_n)_1^\infty = (a_n)_1^\infty - (b_n)_1^\infty$, $(a_n \cdot b_n)_1^\infty = (a_n)_1^\infty \cdot (b_n)_1^\infty$ a ak $(\forall n \in \mathbb{N})\ b_n \neq 0$, tak $(\frac{a_n}{b_n})_1^\infty = \frac{(a_n)_1^\infty}{(b_n)_1^\infty}$. O narábaní s limitami týchto postupností hovorí nasledujúca veta.

Veta 3.5 (aritmetické operácie s limitou postupnosti). *Nech* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Potom*

(i) existuje $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)$ *a platí* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$;

(ii) existuje $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$ *a platí* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$;

(iii) ak $b \neq 0$, *tak existuje* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ *a platí* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Dôkaz. (i) Z predpokladu na základe definície máme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall \varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{2} > 0\right) (\exists n_1)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)\ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall \varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{2} > 0\right) (\exists n_2)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2)\ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom $(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)$

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Teda sme ukázali, že $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ |(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| < \varepsilon$, t.j. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$.

(ii) Keďže platí

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a|,$$

jediným problémom sú výrazy $|a_n|$ a $|b|$, ktorých sa je potrebné zbaviť. Avšak $0 \leq |b| < +\infty$ je konštanta a keďže je $(a_n)_1^\infty$ konvergentná, tak podľa Vety 3.4 $(\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \leq K$, čiže $|a_n b_n - ab| \leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \leq K|b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a|$. Ak položíme $L = \max\{K, |b|\}$ a n_0 ako v dôkaze časti (i), tak máme

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ |a_n b_n - ab| \leq L(|b_n - b| + |a_n - a|) < L\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) = L \cdot \varepsilon,$$

čo dokazuje rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

(iii) Keďže $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, stačí ukázať, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. Ukážme najprv, že výraz $\frac{1}{b_n}$ má zmysel, t.j. $b_n \neq 0$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Keďže $b \neq 0$, položme $\varepsilon_1 = \frac{|b|}{2} > 0$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \ \Leftrightarrow \ \left(\forall \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_1 = \frac{|b|}{2}\right) (\exists n_1)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)\ |b_n - b| < \frac{|b|}{2}.$$

Teda $(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)$

$$|b_n| = |b_n - b + b| = |b - (b - b_n)| \geq |b| - |b - b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0,$$

z čoho $b_n \neq 0$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Potom $(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)$

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n| \cdot |b|} < \frac{2|b_n - b|}{|b|^2}$$

a keďže $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon_2 > 0)\,(\exists n_2)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2)\; |b_n - b| < \varepsilon_2$, položením $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ máme, že $(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)$

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \frac{2|b_n - b|}{|b|^2} < \frac{2\varepsilon_2}{|b|^2}.$$

Dostali sme teda, že

$$\left(\forall \varepsilon = \frac{2\varepsilon_2}{|b|^2} > 0\right)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

Zvyšok dôkazu vyplýva z časti (ii). □

V praxi je dôležité overiť predpoklady, teda že ide naozaj o dve konvergentné postupnosti. Častokrát sa to deje v procese výpočtu, ale niektorí na to zabúdajú a zvyknú potom používať chybné argumenty vedúce k chybným záverom. Tvrdenie vety nemožno obrátiť, t.j. ak existuje limita súčtu (súčinu), nemusia existovať limity jednotlivých sčítancov (činiteľov), napríklad $\lim\limits_{n\to\infty}((-1)^n + (-1)^{n+1}) = 0$, podobne $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n \cdot (-1)^n) = 1$, ale $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ neexistuje.

Dôsledok 3.6. Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$. Potom

(i) existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha \cdot a_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot a$;

(ii) existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^k$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = a^k$;

(iii) existuje $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Platnosť časti (ii) tohto dôsledku je možné rozšíriť na $k \in \mathbb{R}$. Opačná implikácia v časti (iii) vo všeobecnosti neplatí, stačí opäť uvažovať postupnosť $((-1)^n)_1^\infty$.

Veta 3.7. *Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a postupnosť $(b_n)_1^\infty$ je ohraničená. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$ existuje a platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.*

Dôkaz. Z ohraničenosti $(b_n)_1^\infty$ máme, že $(\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\; |b_n| \leq K$ a z definície limity

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon_1 > 0)\,(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\; |a_n| < \varepsilon_1.$$

Potom $(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\; |a_n b_n - 0| = |a_n| \cdot |b_n| < \varepsilon_1 \cdot K$. Položením $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{K}$ máme požadovaný výsledok. □

✠ Úlohy na precvičenie

◇ Nech $(a_n)_1^\infty$ je konvergentná postupnosť kladných čísel. Rozhodnite, či potom platí

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

◇ Nech $(a_n)_1^\infty$ konverguje a $(b_n)_1^\infty$ diverguje. Čo môžeme povedať o konvergenci postupností $(a_n+b_n)_1^\infty$ a $(a_n\cdot b_n)_1^\infty$?
◇ Je pravda, že ak $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ divergujú, potom aj $(a_n+b_n)_1^\infty$ a $(a_n\cdot b_n)_1^\infty$ divergujú?
◇ Pre ktoré $\alpha\in\mathbb{R}$ je postupnosť $(a_n)_1^\infty$ ohraničená a pre ktoré konvergentná?

$$a_n=(-1)^n\left(\ln(\mathrm{e}^{n^2}+1)\right)^\alpha\cdot\arcsin\frac{1}{n^4+7}$$

3.1.2 Nerovnosti medzi členmi postupností a ich limitami

Veta 3.8 (o zovretí). *Nech* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$ *a* $a_n\le c_n\le b_n$ *pre skoro všetky* $n\in\mathbb{N}$. *Potom existuje* $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$ *a platí* $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

Dôkaz. Rozpísaním si všetkých troch predpokladov dostávame

$$\begin{aligned}(\forall\varepsilon>0)\ (\exists n_1)\ (\forall n\in\mathbb{N},n>n_1)\ a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon,\\(\forall\varepsilon>0)\ (\exists n_2)\ (\forall n\in\mathbb{N},n>n_2)\ a-\varepsilon<b_n<a+\varepsilon,\\(\exists n_3)\ (\forall n\in\mathbb{N},n>n_3)\ a_n\le c_n\le b_n.\end{aligned}$$

Ak položíme $n_0=\max\{n_1,n_2,n_3\}$, potom $(\forall n\in\mathbb{N},n>n_0)\ a-\varepsilon<a_n\le c_n\le b_n<a+\varepsilon$, t.j. $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0)(\forall n\in\mathbb{N},n>n_0)\ |c_n-a|<\varepsilon$. □

Keďže $(\forall n\in\mathbb{N})\ -|a_n|\le a_n\le|a_n|$ a ak predpokladáme, že $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$, potom dostávame nasledujúci výsledok.

Dôsledok 3.9. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

Na základe tohto zistenia môžeme vysloviť tvrdenie, ktoré dáva nutnú a postačujúcu podmienku k tomu, kedy postupnosť aj postupnosť absolútnych hodnôt konvergujú k spoločnej hodnote. Jedna časť tohto tvrdenia je dôsledkom vety o operáciách (pozri Dôsledok 3.6 (iii)).

Tvrdenie 3.10. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$

Častokrát užitočné je nasledujúce zistenie:

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-a|=0\ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty}(a_n-a)=0\ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty}a_n=a$$

sformulované v nasledujúcom dôsledku.

Dôsledok 3.11. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-a|=0$

Teraz nás bude zaujímať operácia limitného prechodu v súvislosti s usporiadaním členov.

Veta 3.12. *Nech* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *a* $|b_n| \leq |a_n|$ *pre skoro všetky* $n \in \mathbb{N}$. *Potom existuje* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *a platí* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Dôkaz. Rozpísaním predpokladov máme, že $(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_1)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)\ |a_n| < \varepsilon$ a $(\exists n_2)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2)\ |b_n| \leq |a_n|$. Položením $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ máme, že $(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ |b_n| \leq |a_n| < \varepsilon$, t.j. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. □

Veta 3.13. *Nech* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

(i) Ak $a < b$, *tak* $a_n < b_n$ *pre skoro všetky* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Ak $a_n \leq b_n$ *pre skoro všetky* $n \in \mathbb{N}$, *tak* $a \leq b$.

Dôkaz. (i) Položme $\varepsilon = \frac{b-a}{3} > 0$. Potom $(\exists n_1)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)\ a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ a $(\exists n_2)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2)\ b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$. Nech $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom $(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)\ a_n < a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{3} = b - 2\varepsilon < b - \varepsilon < b_n$, teda $a_n < b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Predpokladajme, že $(\exists n_1)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)\ a_n \leq b_n$, ale $a > b$. Potom by podľa časti (i) $(\exists n_2)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2)\ a_n > b_n$. Ak by $n > \max\{n_1, n_2\}$, tak by $a_n > b_n$, čo je v spore s predpokladom $a_n \leq b_n$. □

Možno by sa niekto mohol opýtať, či nie je možné zameniť znak $<$ za $\leq$ v časti (i). Žiaľ, nemôžeme to urobiť, pretože napríklad pre postupnosti $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = \frac{1}{n^2}$ platí $a = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = b$, ale $a_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2} = b_n$ neplatí pre žiadne $n \in \mathbb{N}$. Je možné zameniť znak $\leq$ za $<$ vo Vete 3.13 (ii), t.j. platí implikácia $a_n < b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$?

Jednoduchý výsledok získame, ak v časti (ii) uvažujeme konštantnú postupnosť $b_n = b$, $n \in \mathbb{N}$.

Dôsledok 3.14. Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a $a_n \leq b$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, potom $a \leq b$.

3.1.3 Nevlastná limita postupnosti

Na základe vzťahu medzi konvergenciou a ohraničenosťou vieme, že neohraničená postupnosť nie je konvergentná. Avšak niektoré divergentné postupnosti majú tú vlastnosť, že s narastajúcim indexom neobmedzene rastú (alebo klesajú). Pre takéto postupnosti zavedieme nasledujúci pojem.

Definícia 3.15. Hovoríme, že postupnosť $(a_n)_1^\infty$ má *nevlastnú limitu* $+\infty$, akk $(\forall K \in \mathbb{R})(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ a_n > K$. Hovoríme, že postupnosť $(a_n)_1^\infty$ má *nevlastnú limitu* $-\infty$, akk $(\forall L \in \mathbb{R})(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ a_n < L$.

Označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$) alebo tiež $a_n \to +\infty$ ($a_n \to -\infty$) pre $n \to \infty$. Je jasné, že v prípade nevlastnej limity $+\infty$ ($-\infty$) stačí zobrať $K > 0$ ($L < 0$). Táto skutočnosť umožňuje v niektorých prípadoch zjednodušiť nájdenie čísla n_0. Malo by byť tiež jasné, že ak má postupnosť nevlastnú limitu $+\infty$ ($-\infty$), tak je ohraničená zdola (zhora) a neohraničená zhora (zdola).

Veta 3.16. *Ak* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$*, tak* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Dôkaz. $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty \Leftrightarrow (\forall K > 0, K = 1)(\exists n_1)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)\ |a_n| > 1$, teda $\frac{1}{a_n}$ existuje pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Potom $(\forall K = \frac{1}{\varepsilon})(\exists n_2)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2)\ |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ a položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom $(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ \left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$, t.j. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$. □

Veta 3.17. *Ak* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *a* $a_n > 0$ *pre skoro všetky* $n \in \mathbb{N}$*, tak* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

Dôkaz. Z predpokladov máme, že $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_1)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)\ |a_n| < \varepsilon$ a $(\exists n_2)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2)\ a_n > 0$. Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom $(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ 0 < a_n < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon} = K$. □

Poznamenajme, že veta má aj svoju duálnu podobu: ak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $a_n < 0$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, tak $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$ (dokážte!). Umožňuje teda „narábať s nulou v menovateli“ v prípade limitných prechodov.

Veta 3.18. *Nech* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *a* $a_n \leq b_n$ *pre skoro všetky* $n \in \mathbb{N}$*. Potom* $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Dôkaz. Rozpísaním predpokladov máme, že $(\forall K > 0)(\exists n_1)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)\ a_n > K$ a $(\exists n_2)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2)\ a_n \leq b_n$. Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom $(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ K < a_n \leq b_n$, teda $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. □

Veta teda hovorí, že stačí nájsť „menšiu“ postupnosť $a_n \to +\infty$ pre $n \to \infty$, čo zaručí, že aj skúmaná „väčšia“ postupnosť $(b_n)_1^\infty$ sa bude správať rovnako.

Veta o aritmetických operáciách s limitami postupnosti obsahuje dôležitý predpoklad konvergencie. Avšak akosi intuitívne cítime, že súčet dvoch postupností s nevlastnou limitou $+\infty$ by tiež mal ísť do $+\infty$. Nasledujúca veta preto zavádza pravidlá pre narábanie s takýmito postupnosťami.

Veta 3.19 (o operáciách s nevlastnými limitami). *Nech* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(i) Ak $(b_n)_1^\infty$ *je ohraničená zdola, tak* $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$.

(ii) Ak $(b_n)_1^\infty$ *je ohraničená zdola kladnou konštantou, tak* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$.

Dôkaz. (i) Nech K je ľubovoľné. Keďže $(b_n)_1^\infty$ je ohraničená zdola, tak $(\exists D \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ b_n \geq D$. Z predpokladu $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ máme, že $(\forall L \in \mathbb{R}, L = K - D)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)\ a_n > L$. Potom $a_n + b_n \geq L + D = K$, t.j. $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$. Analogicky dokážeme časť (ii). □

Všimnime si, že veta požaduje od postupnosti $(b_n)_1^\infty$ len jej ohraničenosť zdola (prípadne kladnou konštantou). Špeciálne veta zahŕňa aj prípad $b_n \to +\infty$ pre $n \to \infty$, pretože z aritmetiky narábania s nevlastnými číslami platí $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$ a $\pm\infty \cdot (\pm\infty) = +\infty$. Jedinými nedefinovanými (neurčitými) výrazmi sú tu $+\infty - \infty$ a $\pm\infty \cdot 0$. Sformulujte a dokážte všetky ďalšie možné variácie tejto vety! Porozmýšľajte tiež nad možnosťou rozšíriť tvrdenie vety o limitu podielu. Aké predpoklady sú potrebné k tomu, aby $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$ pre $n \to \infty$, ak $a_n \to +\infty$, $n \to \infty$?

V ďalšom texte budeme slovom „limita“ vždy rozumieť limitu v zmysle Definície 3.2, ktorej sa tiež hovorí *vlastná limita postupnosti*. Ak budeme pripúšťať aj nevlastnú limitu, pripomenieme to zvlášť. Podobne pod konvergentnými postupnosťami rozumieme len tie postupnosti, ktoré majú vlastnú limitu.

Z uvedeného vyplýva, že pre ľubovoľnú postupnosť $(a_n)_1^\infty$ môže nastať práve jeden z prípadov

(i) existuje vlastná limita $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$;

(iv) neexistuje ani vlastná ani nevlastná limita.

Uveďte príklad na každý z týchto prípadov.

✠ Úlohy na premýšľanie

◇ Nájdite také postupnosti $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ s $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, aby

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je ľubovoľné;

(iii) postupnosť $(a_n \cdot b_n)_1^\infty$ bola ohraničná, ale divergentná.

◇ Nájdite postupnosť $(a_n)_1^\infty$ takú, aby $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ a zároveň bola splnená niektorá z podmienok

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = +\infty$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 1$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.

3.1.4 Monotónne postupnosti

Postupnosť reálnych čísel si možno predstaviť ako nekonečný súbor „oindexovaných čísel“

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Ak sú tieto čísla usporiadané podľa veľkosti, t.j. väčším indexom zodpovedajú vždy väčšie čísla (alebo vždy menšie čísla), potom je prirodzené takúto postupnosť nazvať monotónnou.

Triedu monotónnych postupností môžeme charakterizovať ako množinu takých postupností, v ktorej je každá ohraničená postupnosť konvergentná. Keďže postupnosť sme definovali ako funkciu definovanú na množine $\mathbb{N}$, definície monotónnej (rýdzomonotónnej) postupnosti sú len špeciálnymi prípadmi monotónnej (rýdzomonotónnej) funkcie. Pre istotu, napr. postupnosť $(a_n)_1^\infty$ je *rastúca*, akk $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n < a_{n+1}$ a analogicky ďalšie prípady. Pripomeňme tiež, že supremum (infimum) postupnosti nie je nič iné ako supremum (infimum) množiny jej členov, označujeme $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ $(\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n)$.

Aby sme teda podopreli naše tvrdenie z predchádzajúceho odstavca, uvádzame hneď prvý dôležitý výsledok.

Veta 3.20 (o limite monotónnej postupnosti I.). *Nech $(a_n)_1^\infty$ je neklesajúca postupnosť.*

(i) Ak $(a_n)_1^\infty$ nie je ohraničená zhora, tak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(ii) Ak $(a_n)_1^\infty$ je ohraničená zhora, tak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Dôkaz. (i) Nech $(a_n)_1^\infty$ nie je ohraničená zhora, t.j. $(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ a_{n_0} > H$. Z neklesajúcosti potom máme, že $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)\ a_n \geq a_{n_0}$, z čoho dostávame $(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)\ a_n > H$, t.j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(ii) Ak $(a_n)_1^\infty$ je ohraničená zhora, t.j. množina jej členov je ohraničená zhora, tak existuje $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = a \in \mathbb{R}$. Z neklesajúcosti potom máme, že $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)\ a_n \geq a_{n_0}$ a z druhej vlastnosti suprema (pozri Vetu 1.33) vyplýva, že $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)\ a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon$, teda $|a_n - a| < \varepsilon$, čiže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. □

Analogicky dokážeme duálne tvrdenie (alebo stačí použiť fakt, že ak $(a_n)_1^\infty$ je neklesajúca postupnosť, tak $(-a_n)_1^\infty$ je nerastúca postupnosť).

Veta 3.21 (o limite monotónnej postupnosti II.). *Nech $(a_n)_1^\infty$ je nerastúca postupnosť.*

(i) Ak $(a_n)_1^\infty$ nie je ohraničená zdola, tak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(ii) Ak $(a_n)_1^\infty$ je ohraničená zdola, tak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Zhrnutím výsledkov predchádzajúcich dvoch viet dostávame dôležité tvrdenie charakterizujúce triedu monotónnych postupností.

Tvrdenie 3.22 (o konvergencii monotónnej ohraničenej postupnosti). *Nech postupnosť je monotónna. Potom je konvergentná práve vtedy, keď je ohraničená.*

Poznámka 3.23. Toto tvrdenie bude mať pre nás veľký význam nielen teoretický, ale aj praktický. Jedným z dôležitých zistení je, že ide len o inú formuláciu axiómy o hornom ohraničení, t.j. dá sa dokázať, že **axióma (H) je ekvivalentná s vetou o konvergencii monotónnej ohraničenej postupnosti**. Taktiež nám umožňuje vyšetrovať konvergenciu (a vypočítať limitu) postupnosti zadanej rekurentne.

✠ Úlohy na premýšľanie

◇ Nájdite $\lim_{n\to\infty} a_n$, ak $a_1 = \sqrt{2}$ a $a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnín}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

◇ Nech $a_1 = 6$, $a_{n+1} = -10a_n + 6$, $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (-10a_n + 6) = -10 \lim_{n\to\infty} a_n + 6 = -10a + 6 \Rightarrow a = \frac{6}{11}.$$

Napriek tomu táto limita neexistuje. Kde je chyba?
◇ Dokážte, že každá postupnosť reálnych čísel je súčtom rastúcej postupnosti a klesajúcej postupnosti.

3.2 Vybrané postupnosti

Pozerajme sa na chvíľu na postupnosť

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5, \ldots,\ a_n, \ldots$$

ako na zástup prvkov (vojakov) stojacich vedľa seba, ktorých je potrebné vytriediť a ponechať len schopných. Môžeme takto vynechať konečný alebo nekonečný počet, ale v druhom prípade tak, aby ich zostalo nekonečne veľa. Vynechaním napr. všetkých prvkov s párnym indexom dostávame $a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, \ldots$, čo môžeme opäť považovať za postupnosť

$$b_1 = a_1,\ b_2 = a_3,\ b_3 = a_5,\ b_4 = a_7, \ldots,\ b_n = a_{2n-1}, \ldots$$

Teda pre každé n sa b_n rovná nejakému a_k. Keďže toto k závisí od n, označíme ho $k(n)$ alebo k_n (v našom prípade $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $k_3 = 5$, atď.). Teda $b_n = a_{k_n}$. Touto úvahou dostávame nasledujúci pojem.

Definícia 3.24. Nech $(a_n)_1^\infty$ je postupnosť a $(k_n)_1^\infty$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel. Postupnosť $(a_{k_n})_1^\infty$ nazývame *vybranou postupnosťou* z postupnosti $(a_n)_1^\infty$ pomocou postupnosti $(k_n)_1^\infty$.

Rastúca postupnosť prirodzených čísel $(k_n)_1^\infty$ sa niekedy zvykne nazývať *vyberajúca*. Požiadavka rastúcosti je tu podstatná! Keby sme napr. položili $(\forall n \in \mathbb{N})\ k_n = n_0$, tak by príslušná vybraná postupnosť bola konštantná, lebo $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_{k_n} = a_{n_0}$ a o takej postupnosti ani nemá zmysel hovoriť, že je vybraná z postupnosti $(a_n)_1^\infty$. Teda povedať, že nejaká postupnosť $(b_n)_1^\infty$ je vybraná z postupnosti $(a_n)_1^\infty$, znamená tvrdiť, že existuje taká rastúca postupnosť $(k_n)_1^\infty$ prirodzených čísel, že $(\forall n \in \mathbb{N})\ b_n = a_{k_n}$. Možno trochu nesprávne (ale v záujme zdôraznenia veci) budeme niekedy dokonca hovoriť, že sme z postupnosti $(a_n)_1^\infty$ vybrali *pod*postupnosť $(a_{k_n})_1^\infty$. Všimnime si, že ide o akýsi druh „skladania“ postupností, teda operáciu, ktorá pri postupnostiach nemá priamu analógiu s funkciami.

Lema 3.25. *Ak $(k_n)_1^\infty$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel, tak $(\forall n \in \mathbb{N})\ k_n \geq n$.*

Dôkaz spočíva v aplikácii matematickej indukcie, a preto ho prenechávame čitateľovi. Vieme, že vynechanie konečného počtu členov nemá vplyv na konvergenciu postupnosti. Ako je to s vynechaním nekonečného počtu členov?

Veta 3.26. *Ak postupnosť má vlastnú alebo nevlastnú limitu, potom každá z nej vybraná postupnosť má takú istú limitu.*

Dôkaz. Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, t.j. $(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ |a_n - a| < \varepsilon$. Ak $(k_n)_1^\infty$ je vyberajúca postupnosť, potom $(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ k_n \geq n > n_0$ (pozri Lemu 3.25), a preto $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$, t.j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$. Pre postupnosti majúce nevlastnú limitu je dôkaz analogický (prenechávame na čitateľa). $\square$

Vetu 3.26 môžeme používať ako pre dôkaz existencie, tak aj pre dôkaz neexistencie limity (konvergencie, resp. divergencie). Ak totiž poznáme limitu postupnosti, potom poznáme aj limity každej z nej vybranej postupnosti. Na druhej strane, ak sa nám podarí z nejakej postupnosti vybrať dve postupnosti, ktoré majú rôzne limity, potom je pôvodná postupnosť divergentná, napr. $(-1)^{2n} \to 1$ a $(-1)^{2n+1} \to -1$ pre $n \to \infty$.

Veta 3.27 (Cantorov princíp do seba vložených uzavretých intervalov). *Nech* $(\forall n \in \mathbb{N})\ I_n = \langle a_n, b_n\rangle$. *Ak postupnosť* $(I_n)_1^\infty$ *je taká, že* $(\forall n \in \mathbb{N})\ I_n \supset I_{n+1}$, *tak* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. *Ak naviac* $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, *potom* $(\exists! c \in \mathbb{R})\ \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = c$.

Dôkaz. Uvažujme postupnosti krajných bodov intervalov I_n. Zrejme postupnosť $(a_n)_1^\infty$ je neklesajúca a zhora ohraničená (napr. číslom b_1), teda existuje $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (pozri Vetu o konvergencii monotónnej ohraničenej postupnosti). Podobne $(b_n)_1^\infty$ je nerastúca a zdola ohraničená, teda existuje $\inf_{n\in\mathbb{N}} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$. Z toho máme, že $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq \alpha$ a $\beta \leq b_n$. Avšak naviac $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq b_n$, teda podľa Vety 1.37 je $\alpha = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n = \beta$, čiže

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n \ \Rightarrow\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset.$$

Ukážme naviac, že $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \langle\alpha, \beta\rangle$. Inklúziu $\langle\alpha,\beta\rangle \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ už máme dokázanú. Nech teraz $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$, t.j. $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq x \leq b_n$. Podľa Dôsledku 3.14 aplikovaného na $(a_n)_1^\infty$ a x a opäť na x a $(b_n)_1^\infty$ dostávame $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq x \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$, teda $x \in \langle\alpha,\beta\rangle$, čiže $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset \langle\alpha,\beta\rangle$. To dokazuje, že $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \langle\alpha,\beta\rangle$.

Nech $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Potom

$$\beta = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}[(b_n - a_n) + a_n] = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) + \lim_{n\to\infty} a_n = 0 + \alpha = \alpha,$$

čiže $\alpha = \beta$ a keďže $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \langle\alpha,\beta\rangle$, tak položením $c = \alpha = \beta$ máme $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = c$. $\square$

Venujme sa chvíľu predpokladom Cantorovho princípu. V podstate je tu ukrytých zopár dôležitých vecí. V prvom rade požadujeme uzavretosť a ohraničenosť intervalov, ktoré sú do seba vložené. Ukážme, že to neplatí už pre polouzavreté intervaly, napr. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0, \frac{1}{n}\rangle = \emptyset$. Predpokladajme, že $(\exists c \in \mathbb{R})\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0, \frac{1}{n}\rangle = c$. Potom $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < c \leq \frac{1}{n}$. Podľa Archimedovej vlastnosti pre $c > 0$ existuje $m \in \mathbb{N}$ také, že $mc > 1 \Leftrightarrow c > \frac{1}{m}$, čo je však v spore s tým, že $(\forall n \in \mathbb{N})\ c \leq \frac{1}{n}$. Teda $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0, \frac{1}{n}\rangle = \emptyset$.

Ďalším dôležitým zistením je, že Cantorov princíp neplatí v $\mathbb{Q}$! Uvažujme intervaly $I_n = \langle\sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{2} + \frac{1}{n}\rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Zrejme sú do seba vložené a uzavreté a ich dĺžka spĺňa

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{n} - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

Podľa Cantorovho princípu $(\exists! c \in \mathbb{R})\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = c = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Teda v množine $\mathbb{Q}$ je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$.

Poznámka 3.28. Na základe vyššie spomenutého príkladu sa dá dokázať, že **axióma (H) je ekvivalentná s Cantorovým princípom + Archimedovou vlastnosťou**. Toto rozdelenie axiómy (H) do dvoch tvrdení má pre matematickú analýzu výhodu z dôvodu rozlíšenia dvoch vecí:

(i) z Archimedovej vlastnosti explicitne vidíme, ako sa rozčleňuje matematická analýza na dve časti: klasickú a tzv. neštandardnú analýzu (vynecháva sa v nej Archimedova vlastnosť);

(ii) pojem limity číselnej postupnosti sa dá zaviesť len na základe prvých troch skupín axióm, kde je viditeľná tzv. Lebesgueova miera $\lambda(\langle a, b\rangle) = |a - b|$ (=dĺžka) konečného intervalu $\langle a, b\rangle$ a zároveň úplnosť množiny $\mathbb{R}$ sa tu berie v zmysle topologickej, resp. metrickej úplnosti (nie Dedekindovskej plynúcej z usporiadania) na základe zavedenej normy indukovanej metrikou $d(x, y) = |x - y|$.

Vzniká otázka, či z každej postupnosti je možné vybrať konvergentnú podpostupnosť. Je potrebné rozlíšiť ohraničené a neohraničené postupnosti. V nasledujúcej vete je zámerne zdôraznený predpoklad nekonečnej postupnosti, aby sme mohli aplikovať metódu bisekcie (delenia intervalu) a Cantorov princíp. V podstate si stačí uvedomiť, že pri konečnej postupnosti ani nemá zmysel hovoriť o limite (konvergencii).

Veta 3.29 (Bolzanova-Weierstrassova). *Z každej (nekonečnej) ohraničenej postupnosti sa dá vybrať konvergentná podpostupnosť.*

Dôkaz. Nech $(x_n)_1^\infty$ je ohraničená, t.j. $(\exists a, b \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ a \leq x_n \leq b$. Rozdeľme interval $\langle a, b\rangle$ na polovicu a uvažujme tú polovicu, v ktorej leží nekonečne veľa členov postupnosti $(x_n)_1^\infty$ (ak to spĺňajú obe polovice, zoberme napr. ľavú polovicu). Tento interval označme $\langle a_1, b_1\rangle$. Jeho dĺžka je $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Rozdeľme $\langle a_1, b_1\rangle$ na polovicu a opäť uvažujme tú polovicu, ktorá obsahuje nekonečne veľa členov $(x_n)_1^\infty$ (ak to spĺňajú obe polovice, zoberieme opäť ľavú polovicu). Označme ho $\langle a_2, b_2\rangle$, jeho dĺžka je $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$. Ak takto pokračujeme ďalej, dostávame postupnosť uzavretých do seba vložených intervalov $I_n = \langle a_n, b_n\rangle$, ktorých dĺžka je $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Podľa Cantorovho princípu $(\exists! c \in \mathbb{R})\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = c$.

Skonštruujme vybranú postupnosť z postupnosti $(x_n)_1^\infty$ konvergujúcu k c. Keďže $\langle a_1, b_1\rangle$ obsahuje nekonečne veľa členov, vyberme z neho člen $x_{k_1} \in \langle a_1, b_1\rangle$. Podobne $(\exists k_2 \in \mathbb{N}, k_1 < k_2)\ x_{k_2} \in \langle a_2, b_2\rangle$. Pokračujúc ďalej $(\exists k_n \in \mathbb{N}, k_{n-1} < k_n)\ x_{k_n} \in \langle a_n, b_n\rangle$, teda $(k_n)_1^\infty$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel (t.j. vyberajúca) a $(x_{k_n})_1^\infty$ je vybraná postupnosť z $(x_n)_1^\infty$ pomocou postupnosti $(k_n)_1^\infty$. Keďže $x_{k_n}, c \in \langle a_n, b_n\rangle$, potom $0 \le |x_{k_n} - c| \le |b_n - a_n| = \frac{b-a}{2^n}$ a keďže $\frac{b-a}{2^n} \to 0$ pre $n \to \infty$, tak z vety o zovretí $|x_{k_n} - c| \to 0$ pre $n \to \infty$, čo podľa Dôsledku 3.11 platí práve vtedy, keď $x_{k_n} \to c$ pre $n \to \infty$. Teda $(x_{k_n})_1^\infty$ je konvergentná podpostupnosť. □

Nasledujúce tvrdenie dáva odpoveď na položenú otázku v prípade neohraničených postupností.

Tvrdenie 3.30. *Z každej neohraničenej postupnosti možno vybrať podpostupnosť, ktorá má nevlastnú limitu.*

Dôkaz len naznačíme: pre postupnosť $(a_n)_1^\infty$ neohraničenú zhora stačí nájsť rastúcu postupnosť prirodzených čísel $(k_n)_1^\infty$ takú, že $a_{k_n} \ge n$ pomocou matematickej indukcie.

✠ Úlohy na precvičenie

◇ Dokážte, že z každej postupnosti sa dá vybrať monotónna podpostupnosť.
◇ Dokážte, že každá podpostupnosť rastúcej postupnosti je rastúca.
◇ Dokážte, že monotónna postupnosť je konvergentná, ak konverguje niektorá jej podpostupnosť.
◇ Sú uvedené implikácie

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n} = a, \qquad \lim_{n\to\infty} a_{2n} = a \ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

pravdivé?

3.3 Fundamentálne postupnosti

Veta o konvergencii monotónnej ohraničenej postupnosti vyžaduje k vyšetreniu konvergencie postupnosti jej monotónnosť a ohraničenosť. O ohraničenosti sme sa už čo-to zmienili v predchádzajúcich častiach. Čo ak ale postupnosť nie je monotónna? Vo všeobecnosti, ak chceme o nejakej postupnosti zistiť, či je konvergentná alebo nie, musíme v princípe vyskúšať každé číslo, či je jej limitou alebo nie. Ak rýchlo natrafíme na limitu, potom je to dobré. Ak ale postupnosť nie je konvergentná, mali by sme ukázať (vyskúšať), že žiadne číslo nie je jej limitou. Ukážeme, že o konvergencii možno rozhodnúť aj bez toho, aby sme poznali limitu, teda len na základe správania sa jej členov. K tomu zavedieme nasledujúci pojem.

Definícia 3.31. Postupnosť $(a_n)_1^\infty$ nazývame *fundamentálnou* (*cauchyovskou*), akk

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_0)\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Prirodzene nás zaujíma vzťah tohto nového pojmu k už existujúcim. Keďže fundamentálnosť vo svojej formulácii dosť pripomína konvergenciu, nasledujúca veta hovorí o ich vzájomnom vzťahu.

Veta 3.32 (Cauchyho-Bolzanovo kritérium konvergencie postupnosti). *Postupnosť je konvergentná práve vtedy, keď je fundamentálna.*

Dôkaz. $\Rightarrow$ Nech $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, t.j. $(\forall\varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{2} > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, ale tiež $(\forall\varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{2} > 0)(\exists n_0)(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_0)\ |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom $(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_0)$

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \le |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

teda $(a_n)_1^\infty$ je fundamentálna.

$\Leftarrow$ Nech $(a_n)_1^\infty$ je fundamentálna. Myšlienkou dôkazu je najprv ukázať, že je ohraničená, potom na ňu aplikovať Bolzanovu-Weierstrassovu vetu a nakoniec ukázať, že keď v nej existuje vybraná konvergentná podpostupnosť, tak aj celá postupnosť je konvergentná.

Na dôkaz ohraničenosti fundamentálnej postupnosti použijeme rovnaký postup ako v dôkaze Vety 3.4. Keďže $(a_n)_1^\infty$ je fundamentálna, tak $(\forall\varepsilon > 0, \varepsilon = 1)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0)(\forall m \in \mathbb{N}, m \ge n_0)\ |a_n - a_m| < 1$. Potom aj pre $m = n_0 + 1$ platí $|a_n - a_{n_0+1}| < 1 \Leftrightarrow a_{n_0+1} - 1 < a_n < a_{n_0+1} + 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}, n > n_0$, a teda množina $B = \{a_n; n \ge n_0\}$ je ohraničená. Keďže $A = \{a_n; n \le n_0\}$ je konečná, tak $(a_n)_1^\infty$ je ohraničená. Podľa Bolzanovej-Weierstrassovej vety sa z nej dá vybrať podpostupnosť $a_{k_n} \to a$ pre $n \to \infty$.

Posledným krokom je ukázať, že $a_n \to a$ pre $n \to \infty$. Z fundamentálnosti $(a_n)_1^\infty$ máme, že $(\forall\varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{2} > 0)(\exists n_1)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_1)\ |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ a z limity $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$ máme, že $(\forall\frac{\varepsilon}{2} > 0)(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2)\ |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Položme $n_0 = \max\{n_1, k_{n_2}\}$ a zoberme $k_n > n_0$ a $m = k_n$. Potom $|a_n - a_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$ a

$$|a_n - a| = |(a_n - a_{k_n}) + (a_{k_n} - a)| \le |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

teda $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. □

Cauchyho-Bolzanovo kritérium budeme skrátene označovať ako C-B kritérium. Jeho význam spočíva v tom, že dáva „vnútorné kritérium“ pre konvergenciu postupnosti: vystupujú v ňom totiž iba členy tejto postupnosti. Hovorí vlastne o tom, že skutočnosť, či je postupnosť konvergentná alebo nie, závisí iba od vlastností členov tej postupnosti a nie od vzťahov k iným číslam. Názorne to môžeme interpretovať nasledovne: ak je postupnosť konvergentná (t.j. členy s veľkými indexami sú blízko istého čísla – limity postupnosti), potom sú blízko medzi sebou. Naopak, z fundamentálnosti postupnosti vyplýva, že ak sú členy postupnosti s veľkými indexami blízko medzi sebou (sú „nahusto“), tak sú blízko pri nejakom pevnom čísle. Ku konvergencii postupnosti $(a_n)_1^\infty$ ale nestačí, aby dva za sebou nasledujúce členy tejto postupnosti boli blízke, t.j. aby $a_{n+1} - a_n$ bol dosť malý pre každé $n \in \mathbb{N}, n > n_0$ (dosť veľké n)! Je potrebné, aby sa málo od seba líšili ľubovoľné dva členy postupnosti s dosť veľkým indexom.

Iný tvar C-B kritéria je zahrnutý v nasledujúcom výsledku, ktorý dáva exaktnú formuláciu nášho dávneho zistenia, že vynechanie konečného počtu členov postupnosti nemá vplyv na jej konvergenciu.

Dôsledok 3.33. Postupnosť $(a_n)_1^\infty$ konverguje práve vtedy, keď

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall k \in \mathbb{N})\ |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon.$$

C-B kritérium má veľký teoretický význam, zriedka sa však využíva pri počítaní limity zadanej postupnosti. Existujú však postupnosti, o ktorých vieme pomocou C-B kritéria dokázať, že sú konvergentné, ale nevieme nájsť ich limitu. Napríklad postupnosť $a_n = 1 + \frac{\cos 1}{2} + \cdots + \frac{\cos n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Keďže

$$|a_n - a_{n+k}| = \left| \frac{\cos(n+1)}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\cos(n+k)}{2^{n+k}} \right| \le \frac{|\cos(n+1)|}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{|\cos(n+k)|}{2^{n+k}}$$
$$\le \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{1 - \frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^k} \right) < \frac{1}{2^k},$$

tak dostávame, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall k \in \mathbb{N})\ |a_n - a_{n+k}| < \frac{1}{2^k} < \varepsilon,$$

teda postupnosť $(a_n)_1^\infty$ je fundamentálna, a teda konvergentná. Avšak určiť hodnotu (vypočítať) limitu tejto postupnosti nedokážeme.

Niekto by právom mohol namietať, že zavádzame nový pojem fundamentálnej postupnosti, ktorý (ako sme práve dokázali) nemá opodstatnenie, pretože je to to isté ako pojem konvergentnej postupnosti. Áno, ale *platí to iba v množine reálnych čísel*!!! Už napríklad v množine racionálnych čísel táto ekvivalencia neplatí, pretože vieme skonštruovať fundamentálnu postupnosť racionálnych čísel, ktorá v $\mathbb{Q}$ nie je konvergentná. Z toho dôvodu uvažujme postupnosť $(\sqrt{2} - \frac{1}{n})_1^\infty$, ktorá je rastúca a zhora ohraničená (overte!). Pre každé $n \in \mathbb{N}$ zvoľme $a_n \in \mathbb{Q}$ tak, aby $\sqrt{2} - \frac{1}{n} < a_n < \sqrt{2} - \frac{1}{n+1}$ (taká postupnosť bude existovať z vety o hustote racionálnych čísel v číslach reálnych!). Z vety o zovretí potom máme, že $a_n \to \sqrt{2}$ pre $n \to \infty$. Keďže každá konvergentná postupnosť je fundamentálna, tak sme našli takú fundamentálnu postupnosť $(a_n)_1^\infty$ racionálnych čísel, ktorá v $\mathbb{Q}$ nekonverguje.

Poznámka 3.34. Ak by sme teraz išli do abstraktnejších priestorov (nie iba číselných množín, ale napr. priestorov funkcií), aj tam má pojem fundamentálnej postupnosti svoje zvláštne postavenie. Totiž priestory, v ktorých každá fundamentálna postupnosť konverguje, sa nazývajú *úplné*. Opäť sa nám môže vynoriť súvis s axiómou (H), na základe ktorej sme hovorili o množine reálnych čísel ako o úplnom poli. A to je presne to, čo odlišuje $\mathbb{R}$ od ostatných číselných množín! Dá sa opäť dokázať, že **C-B kritérium je ekvivalentné s axiómou (H)**, avšak nebudeme to robiť.

✠ Úlohy na premýšľanie

◇ Popíšte, čo znamená, že postupnosť nespĺňa C-B kritérium.

◇ Pomocou C-B kritéria dokážte konvergenciu postupnosti $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$ (Pomôcka: použite nerovnosť $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, $n = 2, 3, \dots$).

3.4 O Cantorovej konštrukcii reálnych čísel

Vráťme sa na chvíľu na začiatok tohto učebného textu, konkrétne do úvodu k prvej kapitole, kde sme pojednávali o množine reálnych čísel. Ako sme tam spomenuli, dlhé obdobie nikto nevedel, ako začleniť iracionálne čísla rigorózne do matematiky. To sa podarilo nezávisle okolo roku 1872 Cantorovi, Heinemu, Mérayovi a Dedekindovi jednotnou myšlienkou: *celá cauchyovská postupnosť je reálne číslo.* Táto myšlienka je veľmi elegantná, ale aj tak zostáva veľa práce – stotožniť rozličné cauchyovské racionálne postupnosti reprezentujúce to isté reálne číslo, definovať algebraické vzťahy a usporiadanie pre tieto nové objekty a v neposlednom rade dokázať Vetu 3.32. Všetko toto bolo detailne dokončené až v roku 1930 Landauom. Naším cieľom teraz nie je študovať detailne túto konštrukciu, iba sa zbežne zoznámiť s jej hlavnými myšlienkami, ktoré by budúci matematik mal určite poznať.

Predpokladajme, že číslo $\sqrt{2}$ je asociované s postupnosťou $\{1{,}4; 1{,}41; 1{,}414; \dots\}$ a $\sqrt{3}$ s postupnosťou $\{1{,}7; 1{,}73; 1{,}732; \dots\}$. Potom číslo $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ by malo byť asociované s ich súčinmi $\{2{,}38; 2{,}4393; 2{,}449048; \dots\}$. Na druhej strane, $\sqrt{6}$ je tiež asociovaná s postupnosťou $\{2{,}4; 2{,}44; 2{,}449; \dots\}$. Takže musíme stotožniť tieto postupnosti.

Dve racionálne cauchyovské postupnosti $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ nazývame *ekvivalentné*, píšeme $(a_n)_1^\infty \sim (b_n)_1^\infty$, akk $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, t.j.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ |a_n - b_n| < \varepsilon.$$

Nie je ťažké overiť, že $\sim$ je reláciou ekvivalencie na množine racionálnych cauchyovských postupností, t.j. platí

(i) $(a_n)_1^\infty \sim (a_n)_1^\infty$ (reflexivita);

(ii) $(a_n)_1^\infty \sim (b_n)_1^\infty \Rightarrow (b_n)_1^\infty \sim (a_n)_1^\infty$ (symetria);

(iii) $(a_n)_1^\infty \sim (b_n)_1^\infty \wedge (b_n)_1^\infty \sim (c_n)_1^\infty \Rightarrow (a_n)_1^\infty \sim (c_n)_1^\infty$ (tranzitivita).

Preto je rozumné rozdeliť množinu racionálnych cauchyovských postupností na *triedy ekvivalencie*

$$\overline{(a_n)_1^\infty} := \Big\{(b_n)_1^\infty;\ \ (b_n)_1^\infty \text{ je racionálna cauchyovská postupnosť, že } (b_n)_1^\infty \sim (a_n)_1^\infty\Big\}.$$

Prvky z tried ekvivalencií sa nazývajú *reprezentanti.*

Definícia 3.35. Reálne čísla sú triedy ekvivalencií racionálnych cauchyovských postupností, t.j.

$$\mathbb{R} = \Big\{\overline{(a_n)_1^\infty};\ \ (a_n)_1^\infty \text{ je racionálna cauchyovská postupnosť}\Big\}.$$

Množina $\mathbb{Q}$ sa teraz dá interpretovať ako podmnožina $\mathbb{R}$ v tom zmysle, že ak $r \in \mathbb{Q}$, tak konštantná postupnosť $\{r, r, r, \dots\}$ je racionálna cauchyovská postupnosť a môžeme stotožniť racionálne číslo r s reálnym číslom $\overline{\{r, r, r, \dots\}}$.

Aby sme dokázali s takto zavedenou množinou $\mathbb{R}$ pracovať, musíme definovať bežné operácie a usporiadanie. Nech $a = \overline{(a_n)_1^\infty}$ a $b = \overline{(b_n)_1^\infty}$ sú dve reálne čísla. Potom ich *súčet* $+$ a *súčin* $\cdot$ definujeme vzťahmi

$$a + b = \overline{(a_n + b_n)_1^\infty}, \quad a \cdot b = \overline{(a_n \cdot b_n)_1^\infty}.$$

Nebudeme tu teraz riešiť otázku korektnosti takéhoto zavedenia operácií (hoci je to ľahké overiť). Usporiadanie $\leq$ je potom zavedené nasledovne:

$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow (\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0)(\exists n_0 \geq 1)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ a_n \leq b_n - \varepsilon, \\ a \leq b &\Leftrightarrow a < b \vee a = b. \end{aligned}$$

K tejto dosť komplikovanej definícii usporiadania iba dodáme, že k definovaniu $a < b$ nestačí uvažovať iba $a_n < b_n$, pretože postupnosti $\{0, 0, 0, \dots\}$ a $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ reprezentujú to isté číslo 0 (a zrejme neplatí $0 < 0$). Je k tomu potrebné, aby pre dostatočne veľké n boli členy a_n a b_n oddelené. Z toho tiež vyplýva, že je to dobre definovaná relácia. Dá sa ukázať, že relácia $\leq$ je naozaj *reláciou usporiadania* (t.j. reflexívna, antisymetrická a tranzitívna) a platí pre ňu trichotómia.

K exaktnej konštrukcii množiny reálnych čísel ako tried ekvivalencií racionálnych cauchyovských postupností by bolo ešte potrebné dokázať C-B kritérium na základe zavedených pojmov. To je naozaj možné urobiť, čím dostávame takú konštrukciu, v ktorej je namiesto axiómy (H) práve C-B kritérium. Potom sa z tejto konštrukcie dokáže, že platí veta o supreme a infime a ďalšie vlastnosti reálnych čísel.

Vidíme tu, že keby sme na začiatku zvolili Cantorov spôsob zavedenia reálnych čísel, asi by mnoho študentov bolo zdesených a odradených (obzvlášť, ak ide o nastupujúcich študentov, ktorí o matematike nemajú ani poňatia). Preto sme zvolili axiomatický prístup (niečo podobné sa deje na aj strednej škole, kde sa veľa vecí berie ako fakt, takže to nie je študentom až také cudzie), ktorý však nie je konštrukčne názorný, ale má nesporne iné prednosti, treba však jedným dychom dodať, že aj častokrát kritizované nedostatky…

✠ Úlohy na precvičenie

◇ Pre dve racionálne cauchyovské postupnosti $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ dokážte, že $(a_n \cdot b_n)_1^\infty$ je cauchyovská postupnosť.

3.5 Eulerovo číslo a postupnosti s ním súvisiace

Eulerovo číslo je jednou z najdôležitejších konštánt v matematike vôbec. Tvorí základ prirodzených logaritmov, ako aj exponenciálnej funkcie. Ako o chvíľu ukážeme, je to iracionálne číslo, ktoré je naviac transcendentné (nie je koreňom žiadneho polynómu s celočíselnými koeficientami). Pôjde však o technicky náročnejšiu časť tohto textu, a preto odporúčame trpezlivosť pri jej štúdiu.

Veta 3.36. *Postupnosť* $(e_n)_1^\infty = (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!})_1^\infty$ *konverguje k iracionálnemu číslu.*

Dôkaz. Konvergenciu dokážeme pomocou C-B kritéria. Postupnosť $(e_n)_1^\infty$ je zrejme rastúca, pretože $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{n!} > 0$, teda $e_{n+1} = 1 + \dots + \frac{1}{(n+1)!} > 1 + \dots + \frac{1}{n!} = e_n$.

Potom pre $m > n$ platí

$$\begin{aligned} 0 < e_m - e_n &= \left(1 + \dots + \frac{1}{m!}\right) - \left(1 + \dots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{(n+1)!} + \dots + \frac{1}{m!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+2)\dots m}\right) \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^{m-n-1}}\right). \end{aligned}$$

Použitím rozkladu

$$a^{m-n} - b^{m-n} = (a-b)(a^{m-n-1} + a^{m-n-2}b + \dots + b^{m-n-1})$$

pre $a = 1$ a $b = \frac{1}{n+1}$ dostávame

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^{m-n-1}}\right) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(n+1)^{m-n}}}{1 - \frac{1}{n+1}}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)^{m-n} - 1}{(n+1)^{m-n}} \cdot \frac{n+1}{n} < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Z Archimedovej vlastnosti $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ \frac{1}{n_0 \cdot n_0!} < \varepsilon$. Potom $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_0)\ 0 < e_m - e_n < \frac{1}{n_0 \cdot n_0!} < \varepsilon$, teda postupnosť $(e_n)_1^\infty$ je fundamentálna, a teda konvergentná. Označme $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \mathrm{e}$.

Iracionálnosť: Z vlastnosti postupnosti je $\mathrm{e} > 2$. Predpokladajme, že $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{N}$ sú nesúdeliteľné. Nech $n \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné a zoberme $m \in \mathbb{N}$, $m > n$. Potom $0 < e_m - e_n < \frac{1}{n \cdot n!}$ a z vety o zovretí vyplýva, že $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$0 \le \lim_{m\to\infty}(e_m - e_n) = \lim_{m\to\infty} e_m - \lim_{m\to\infty} e_n = \mathrm{e} - e_n \le \lim_{m\to\infty} \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Keďže $(e_n)_1^\infty$ je rastúca, tak $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < \mathrm{e} - e_n \le \frac{1}{n \cdot n!}$.

Položme $n = q$, potom

$$0 < \mathrm{e} - e_q = \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{q!}\right) \le \frac{1}{q \cdot q!}.$$

Ak $q = 1$, tak $0 < \mathrm{e} - e_1 = p - (1+1) = p - 2 \le 1 \Rightarrow 0 < p - 2 \le 1 \Rightarrow p = 3$, teda $\mathrm{e} = \frac{p}{q} = 3$. Potom by malo platiť, že $(\forall n \in \mathbb{N})\ 3 - e_n \le \frac{1}{n \cdot n!}$, čo však neplatí hneď pre $n = 2$.

Nech teda $q > 1$. Potom nerovnosť

$$0 < (\mathrm{e} - e_q)q! = p(q-1)! - \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{q!}\right) \le \frac{1}{q} < 1$$

vedie opäť k sporu, lebo rozdiel $p(q-1)! - \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{q!}\right)$ dvoch prirodzených čísel je celé číslo a nie číslo z intervalu $(0, 1)$. Z toho vyplýva, že $\mathrm{e} \ne \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. $\square$

Číslo e z dôkazu predchádzajúcej vety nazývame *Eulerovo číslo* a jeho približná hodnota je 2,718281828459045. Uvedená veta je vhodná na určenie hodnoty čísla e s ľubovoľnou presnosťou.

Veta 3.37 (o postupnostiach súvisiacich s číslom e**).** *Nech* $(a_n)_1^\infty = \big((1+\frac{1}{n})^n\big)_1^\infty$ *a* $(b_n)_1^\infty = \big((1+\frac{1}{n})^{n+1}\big)_1^\infty$. *Potom*

(i) postupnosť $(a_n)_1^\infty$ *je rastúca;*

(ii) postupnosť $(b_n)_1^\infty$ *je klesajúca;*

(iii) $(\forall k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ a_k < b_n$*;*

(iv) obe postupnosti sú ohraničené a $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n < 3$*;*

(v) $(\forall n \in \mathbb{N})\ b_n - a_n < \frac{3}{n}$.

Dôkaz. (i) Keďže $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\big(1+\frac{1}{n+1}\big)^{n+1}}{\big(1+\frac{1}{n}\big)^n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{n(n+1)}{n(n+1)}\\ &= \left(\frac{n(n+1)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\\ &> \frac{n+1}{n}\left(1+(n+1)\cdot\frac{-1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1} = 1,\end{aligned}$$

kde sme použili Bernoulliho nerovnosť. Teda $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$, čiže $(a_n)_1^\infty$ je rastúca. Analogicky sa pomocou Bernoulliho nerovnosti odvodí časť (ii).

(iii) Z vlastností mocnín s celočíselným exponentom máme, že $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n = \big(1+\frac{1}{n}\big)^n < \big(1+\frac{1}{n}\big)^{n+1} = b_n$. Keďže $(a_n)_1^\infty$ je rastúca a $(b_n)_1^\infty$ je klesajúca, tak pre $k < n$ je $a_k < a_n < b_n$ a pre $k > n$ je $a_k < b_k < b_n$.

(iv) Z predchádzajúcich vlastností vyplýva, že $(a_n)_1^\infty$ je ohraničená zdola napr. číslom a_1 a zhora ľubovoľným b_k (stačí nájsť také k, aby $b_k \le 3$, napr. $k = 6$). Analogicky pre $(b_n)_1^\infty$.

(v) Jednoducho $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[1+\frac{1}{n}-1\right] = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n} < 3\cdot\frac{1}{n},$$

čo dokazuje poslednú vlastnosť. □

Veta 3.38. *Postupnosti* $(a_n)_1^\infty$ *a* $(b_n)_1^\infty$ *z predchádzajúcej vety sú konvergentné a platí* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \mathrm{e}$.

Dôkaz. Podľa Vety 3.37 sú obe postupnosti ohraničené. Naviac $(a_n)_1^\infty$ je rastúca a $(b_n)_1^\infty$ klesajúca, teda podľa Vety 3.20 a Vety 3.21 platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Teda stačí ukázať, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} e_n = \mathrm{e}$.

Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom pre $k = 1, 2, \dots, n$ platí

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\dots\frac{n-k+1}{n} < \frac{1}{k!}.$$

Keďže $\binom{n}{0}\frac{1}{n^0} = 1$, potom podľa binomickej vety máme

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n^1}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\dots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n} < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!} = e_n.$$

Odtiaľ podľa Vety 3.13 je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} e_n = \mathrm{e}$.

Nech $n \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné, ale pevné. Potom pre $m = 1, 2, \dots, n$ platí

$$a_n = 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n^1}+\dots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \ge 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n^1}+\dots+\binom{n}{m}\frac{1}{n^m} = 1+\sum_{k=1}^{m}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}.$$

Z Vety 3.13 a vety o limite súčtu vyplýva, že $(\forall m \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &\ge 1+\sum_{k=1}^{m}\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1+\sum_{k=1}^{m}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\dots\frac{n-k+1}{n}\right)\\ &= 1+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} = e_m.\end{aligned}$$

Z Dôsledku 3.14 potom máme, že $\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) \ge \lim\limits_{m\to\infty} e_m = \mathrm{e}$, čiže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ge \mathrm{e}$. Spojením oboch nerovností dostávame $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$. $\square$

Z uvedeného vyplýva, že Eulerovo číslo e je jediné také číslo, pre ktoré platí $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n < \mathrm{e} < b_n$. Tiež je zaujímavé si všimnúť s akou limitou to vlastne máme do činenia: vnútro konverguje k 1 a exponent má limitu $+\infty$, teda výraz typu 1^∞. Podľa dokázanej vety tento výraz nie je 1, ako by sa mohlo zdať z axiomatiky reálnych čísel (tam sme však definovali iba výraz 1^α pre $\alpha \in \mathbb{R}$)!

Veta 3.39. *Nech* $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n > 0$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. *Potom* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \mathrm{e}$.

Dôkaz. Keďže $(\forall n \in \mathbb{N})\ [a_n] \le a_n < [a_n]+1$, tak

$$\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right) < \left(1+\frac{1}{a_n}\right) \le \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right),$$

z čoho z vlastností mocnín s reálnym exponentom máme

$$\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} < \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \le \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}.$$

Limitovaním týchto nerovností pre $n \to \infty$ dostávame požadovaný výsledok, pretože limity oboch krajných výrazov sú rovné e (zdôvodnite!). Preto z vety o zovretí máme výsledok. $\square$

Dôsledok 3.40. $(\forall x \in \mathbb{R})\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$

Tento nenápadný dôsledok je veľmi zaujímavý, pretože zavádza exponenciálnu funkciu e^x ako limitu postupnosti $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Určite by stálo za pozornosť zdôvodniť si, že ide naozaj o tú istú exponenciálnu funkciu, ktorú sme zaviedli v Kapitole 2 z axiomatiky reálnych čísel.

✠ Úlohy na precvičenie

◇ Určte pre aké hodnoty n sa líši výraz $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ od čísla e o menej ako 0,001.

◇ Pre každé prirodzené číslo n dokážte nerovnosť

$$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right) < n! < \mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n .$$