Kapitola 4

Rady reálnych čísel

Matematici sa potkýnali o nekonečné rady od antiky. Otázka, ako môže byť súčet nekonečne veľa kladných výrazov konečným číslom, bola nielen hlbokou filozofickou výzvou, ale aj dôležitým článkom v pochopení pojmu nekonečna. Nekonečné rady boli použité v priebehu rozvoja kalkulu a je ťažké vystopovať ich presnú historickú cestu. Pravdepodobne prvý súčet nekonečného radu objavil Archimedes pomocou metódy infinitezimálneho kalkulu, ktorá sa vhodne uplatňuje aj dnes. Ide o metódu exhaustácie (vyprázdňovania), pomocou ktorej bol schopný určiť obsah pod grafom paraboly pomocou sumovania nekonečného radu, a tak dal dostatočne presnú aproximáciu čísla π.

V Indii sa v 14. storočí rozvinula myšlienka rozvoja funkcie do nekonečného (funkcionálneho) radu. Tamojší matematik Madhava je považovaný za predchodcu modernej koncepcie mocninových radov, Taylorových radov, MacLaurinových radov, racionálnych aproximácií nekonečných radov, ako aj nekonečných reťazových zlomkov. Zaslúžil sa o štúdium konvergenčného kritéria nekonečných radov a vytvoril testy konvergencie. Objavil množstvo nekonečných radov, vrátane rozvoja trigonometrických funkcií do Taylorových radov. Jeho študenti a nasledovníci ďalej rozširovali jeho dielo o ďalšie rozvoje do radov a aproximácie až do 16. storočia v škole Kerala.

V 17. storočí v Európe James Gregory (1638–1675) publikoval niekoľko MacLaurinových radov. V roku 1715 vytvoril Brook Taylor všeobecnú metódu pre konštrukciu Taylorových radov pre všetky funkcie, pre ktoré sa to dá. Leonhard Euler zase v 18. storočí rozvinul teóriu hypergeometrických radov a q-radov. Euler uvažoval rad

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma}\, x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)}\, x^2 + \cdots ,$$

o ktorom Gauss publikoval príspevok v roku 1812. Obsahuje jednoduchšie kritérium konvergencie a otázky zvyškov a oboru konvergencie.

Cauchy trval na striktných kritériách konvergencie: ukázal, že ak dva rady sú konvergentné, ich súčin nemusí byť konvergentný, a tak sa začína objavovanie efektívnych kritérií konvergencie. Pojmy konvergencie a divergencie boli však zavedené dávno predtým v roku 1668 už spomínaným Gregorym. Leonhard Euler and Gauss dokázali rozličné kritériá, Colin MacLaurin predpokladal niektoré Cauchyho objavy.

Henrik Abel v roku 1826 vo svojom príspevku o binomických radoch

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

poopravil niektoré Caychyho závery a podal úplnú sumáciu radu pre komplexné hodnoty parametrov m a x. Poukázal na potrebu uvažovať spojitosť v otázkach konvergencie nekonečných (funkcionálnych) radov.

Cauchyho metódy neviedli k všeobecným, ale skôr špeciálnym kritériám. To isté môžeme povedať o Raabem (1832), De Morganovi (z roku 1842), ktorého neplatnosť logaritmického testu na istých oblastiach ukázali DuBois-Reymond (1873) a Pringsheim (1889). Ďalšie špeciálne kritériá vytvoril Bertrand (1842), Bonnet (1843), Malmsten (1846, 1847, to druhé bez integrovania), Stokes (1847), Paucker (1852), Čebyšev (1852) a Arndt (1853).

Všeobecné kritériá začínajú Kummerom (1835) a boli študované Eisensteinom (1847), Weierstrassom v jeho rozličných príspevkoch k teórii funkcií, Dinim (1867), DuBois-Reymondom (1873) a mnohými ďalšími.

4.1 Základné pojmy

V celej tejto kapitole budeme používať poznatky z predchádzajúcej kapitoly o limitách postupností. Uvažujme postupnosť reálnych čísel $(a_n)_1^\infty$. Tejto postupnosti priradíme postupnosť $(s_n)_1^\infty$ nasledovne:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2 = s_1 + a_2, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + \cdots + a_n = s_{n-1} + a_n. \end{aligned}$$

Symbol $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$, alebo skrátene $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, budeme nazývať *nekonečný číselný rad* alebo kratšie rad. Prvok a_n nazývame n-tý člen radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Postupnosť $(s_n)_1^\infty$ nazývame *postupnosť čiastočných súčtov radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a prvok s_n n-tý čiastočný súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nekonečný rad vyzerá formálne ako súčet nekonečne veľa sčítancov, ale operácia súčtu je definovaná len pre konečne veľa sčítancov. *Čo teda máme rozumieť pod súčtom tohto radu*? Pozrime sa na jeden príklad z histórie: Guido Grandi (1671–1742) uvažoval rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots,$$

ktorý dnes nazývame *Grandiho radom.* Grandi uvažoval nasledujúce preuzátvorkovanie tohto radu, čím dostal

$$\begin{gathered} 1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \ldots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1, \\ (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \ldots = 0 + 0 + \cdots = 0. \end{gathered}$$

Grandiho výpočet bol teda nasledujúci

$$\begin{aligned} 0 &= 0+0+0+0+\dots = (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots \\ &= 1-(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 1-0-0-0-\dots \\ &= 1, \end{aligned}$$

čo si Grandi ako kňaz vyložil ako symbol stvorenia sveta Bohom z ničoho („ex nihilo"). To vyvolalo búrlivú polemiku, ktorej sa popri Grandim zúčastnil Leibniz, Nicolaus Bernoulli a ďalší. V týchto diskusiách sa upresňovali pojmy súčet nekonečného číselného radu, konvergencia a divergencia týchto radov. Dnes vieme, že Grandi sa dopustil dvoch omylov: skúmaný rad nemá konečný súčet (je divergentný) a okrem toho pri svojom výpočte použil asociatívny zákon pre sčítanie, ktorý vo všeobecnosti pre nekonečne veľa sčítancov neplatí. Odpoveď na otázku súčtu radu dáva nasledujúca definícia.

Definícia 4.1. *Súčtom radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame konečnú limitu postupnosti jeho čiastočných súčtov a zapisujeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s < +\infty$. Rad sa nazýva *konvergentný*, akk konverguje postupnosť jeho čiastočných súčtov. Rad, ktorý nie je konvergentný, nazývame *divergentný*.

Ako sme už v úvode spomenuli, pojmy konvergencie a divergencie poprvýkrát použil v súvislosti so sčítaním číselných radov James Gregory. Z uvedenej definície vyplýva, že o súčte radu môžeme hovoriť len pri konvergentných radoch. V prípade divergentného radu môžeme rozlíšiť tri prípady divergencie:

(i) ak $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, hovoríme, že rad diverguje do $+\infty$;

(ii) ak $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$, hovoríme, že rad diverguje do $-\infty$;

(iii) ak $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, hovoríme, že rad osciluje.

Ak sa teda vrátime ku Grandiho radu, ten je divergentný (osciluje), pretože $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$, atď., z čoho máme, že vybraná postupnosť $(s_{2n})_1^{\infty}$ z postupnosti $(s_n)_1^{\infty}$ konverguje k 0, ale vybraná postupnosť $(s_{2n+1})_1^{\infty}$ konverguje k 1. Zaujímavé je ešte spomenúť, že Euler a Fourier používali pre súčet s Grandiho radu hodnotu $\frac{1}{2}$, ku ktorej sa dá dopracovať (nesprávnou!) úvahou[1]

$$s = 1+(-1)+1+(-1)+\dots = 1-[1+(-1)+1+\dots] = 1-s \;\Rightarrow s = \frac{1}{2}.$$

Poznámka 4.2. Priamo z definície vyplýva, že ak $p \in \mathbb{N}$, tak rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=p+1}^{\infty} a_n$ buď oba konvergujú alebo oba divergujú. Inými slovami, *na konvergenciu (divergenciu) radu nemá vplyv chovanie sa konečného počtu jej členov*, čo plynie z limity postupnosti.

[1] Leibniz k tomu poznamenal, že ak niekde ukončíme proces sčítania tohto radu (t.j. zoberieme nejaký čiastočný súčet), dostaneme buď 0 alebo 1 s rovnakou „pravdepodobnosťou", takže najpravdepodobnejšia hodnota je priemer čísel 0 a 1, t.j. $\frac{1}{2}$. Leibniz k tomu dodáva, že „ide skôr o metafyzický ako matematický dôkaz".

Položme si otázku, aké vlastnosti musí mať rad, aby konvergoval, t.j. aby existovala konečná limita postupnosti čiastočných súčtov. Z definície je zrejmý úzky súvis medzi nekonečnými radmi a postupnosťami, ktorý sa niekde ešte zvýrazňuje tým, že rad sa definuje ako dvojica postupností $((a_n)_1^\infty, (s_n)_1^\infty)$. Teda vety o konvergencii radov sa dajú previesť na vety o konvergencii postupností a obrátene. Uplatnením tohto poznatku máme priamo jednu nutnú a postačujúcu podmienku pre konvergenciu radov.

Veta 4.3 (Cauchyho-Bolzanovo kritérium konvergencie radov). *Rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje práve vtedy, keď*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall m \in \mathbb{N})\ |s_{n+m} - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon.$$

Ako triviálny dôsledok tohto tvrdenia (pre $m = 1$) dostávame, že ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ |s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| < \varepsilon,$$

teda dostávame poznatok známy už Pietrovi Mengolimu v roku 1650.

Veta 4.4 (nutná podmienka konvergencie radu). *Ak rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, potom* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Alternatívne sa o platnosti uvedenej vety môžeme presvedčiť použitím vzťahu $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$ a prejdením k limite pre $n \to \infty$.

Poznámka 4.5. Je treba upozorniť, že podmienka nulovej limity postupnosti členov radu nie je postačujúca k jeho konvergencii, ako sa o tom dá jednoducho presvedčiť v prípade harmonického radu. Treba si to zapamätať, pretože v opačnom prípade to máva (pre študentov) smutné následky.

✠ Úlohy na premýšľanie

◇ Určte n-tý čiastočný súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a na základe toho rozhodnite, či tento rad konverguje, kde

$$a_n = \frac{n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

◇ Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a existuje $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$. Dokážte!

◇ Nájdite príklad konvergentného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, aby $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$ neexistovala.

◇ Konverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, ak

(i) pre každé $p \in \mathbb{N}$ je $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}) = 0$?

(ii) pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $\lim\limits_{p\to\infty}(a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}) = 0$?

4.2 Operácie s číselnými radmi

Ako sme uviedli v prípade Grandiho radu, skutočnosť, že s nekonečnými súčtami sa nedá zachádzať ako s konečnými, bola zdrojom viacerých omylov v dejinách matematiky. Základnými operáciami s nekonečnými radmi je súčet dvoch konvergentných radov a vynásobenie konvergentného radu reálnou konštantou, čo môžeme považovať za obdobu „distributívneho zákona" pre sčítanie pre konečné súčty.

Veta 4.6. *Nech rady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sú konvergentné. Potom*

(i) rad $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *konverguje a naviac, ak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$*, tak* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = a + b$*;*

(ii) rad $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ *konverguje pre každé* $k \in \mathbb{R}$ *a platí* $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \cdot a$*. Naviac, ak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ *konverguje, kde* $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, potom konverguje aj rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Dôkaz. (i) Označme $(A_n)_1^{\infty}$, $(B_n)_1^{\infty}$ a $(C_n)_1^{\infty}$ postupnosti čiastočných súčtov radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$. Potom $\lim_{n\to\infty} A_n = a$, $\lim_{n\to\infty} B_n = b$ a $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$C_n = (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n) = (a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n) = A_n+B_n,$$

odkiaľ plynie, že $\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty}(A_n + B_n) = a + b$, t.j. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

(ii) Nech $(A_n)_1^{\infty}$ a $(K_n)_1^{\infty}$ sú postupnosti čiastočných súčtov radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$. Potom $\lim_{n\to\infty} A_n = a$ a $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$K_n = ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n = k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = kA_n,$$

odkiaľ $\lim_{n\to\infty} K_n = ka$, t.j. $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = ka$. Ak naopak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ a $k \neq 0$, podľa vyššie dokázaného konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}(ka_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Tvrdenie (i) môžeme matematickou indukciou rozšíriť na ľubovoľný konečný počet sčítancov. Triviálne tiež veta platí pre rozdiel. Z konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ ale neplynie konvergencia radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, ako sa môžeme presvedčiť na príklade radov $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.

Z príkladu Grandiho radu sa môžeme poučiť ešte o tom, že medzi členy nekonečného číselného radu nemôžeme ľubovoľne umiestniť zátvorky, t.j. *neplatí asociatívny zákon vo všeobecnosti.* Iba v prípade konvergentného radu môžeme združovať členy ľubovoľne bez toho, aby to ovplyvnilo súčet radu. Táto skutočnosť je sformulovaná v nasledujúcej vete, ktorú môžeme pokojne nazvať „asociatívnym zákonom" pre konvergentné rady.

Veta 4.7. *Nech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentný rad a* $(k_n)_1^\infty$ *je rastúca postupnosť prirodzených čísel. Položme*

$$b_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1},\ b_2 = a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2},\ \ldots,\ b_n = a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje a platí* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dôkaz. Ak $(A_n)_1^\infty$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $(B_n)_1^\infty$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, potom $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$B_n = b_1 + \cdots + b_n = a_1 + \cdots + a_{k_n} = A_{k_n},$$

t.j. $(B_n)_1^\infty$ je vybraná postupnosť z konvergentnej postupnosti $(A_n)_1^\infty$, a teda aj $(B_n)_1^\infty$ konverguje. □

Poznamenajme, že obrátená veta neplatí, napr. pre Grandiho rad a postupnosť $k_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ je $b_n = 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, teda rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentný. Analógiu komutatívneho zákona (o prerovnaní členov) uvedieme neskôr, ale prezradíme, že ani pre konvergentné rady nemusí platiť. K jeho platnosti budeme potrebovať silnejšiu vlastnosť, tzv. absolútnu konvergenciu radu.

✠ Úlohy na precvičenie

◇ Riešte v $\mathbb{R}$: $\log x + \log \sqrt{x} + \log \sqrt[4]{x} + \log \sqrt[8]{x} + \cdots = 2$.

◇ Ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje do $+\infty$, čo sa dá povedať o rade $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$?

◇ Ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ osciluje, čo sa dá povedať o rade $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$?

◇ Platí nasledujúce tvrdenie: Ak rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergujú, tak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje a platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$?

4.3 Rady s nezápornými členmi

Teraz sa budeme zaoberať radmi, ktoré s výnimkou konečného počtu členov majú rovnaké znamienko. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že všetky členy skúmaných radov sú nezáporné, čo vyplýva z definície súčtu radu a z toho, že existencia limity postupnosti nezávisí od toho, či zmeníme konečný počet členov.

Nech teda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s nezápornými členmi, t.j. $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \geq 0$. V takomto prípade je postupnosť $(s_n)_1^\infty$ čiastočných súčtov neklesajúca, pretože $(\forall n \in \mathbb{N})\ s_{n+1} = s_n + a_n \geq s_n$. Ak je naviac táto postupnosť zhora ohraničená, tak podľa Vety o konvergencii monotónnej ohraničenej postupnosti existuje jej limita, teda rad s nezápornými členmi je konvergentný alebo divergentný do $+\infty$, nikdy ale nemôže oscilovať.

Tvrdenie 4.8. *Rad s nezápornými členmi je konvergentný práve vtedy, keď postupnosť jeho čiastočných súčtov je ohraničená.*

Nájsť súčet radu je vo všeobecnosti veľmi komplikovaná vec a už aj pri jednoduchých radoch to môže predstavovať problém pri vyjadrení postupnosti čiastočných súčtov. Preto sa častokrát uspokojíme len s vedomosťou, či daný rad konverguje alebo diverguje. Cauchyho-Bolzanovo kritérium, významné svojou univerzálnosťou, spôsobuje obvykle taktiež určité výpočtové ťažkosti pri praktickom použití na skúmanie konvergencie daného radu. Preto v teórii nekonečných číselných radov existuje viacero kritérií konvergencie (divergencie). Na rozdiel od Cauchyho-Bolzanovho kritéria dávajú iba postačujúcu podmienku pre konvergenciu radu, avšak sú jednoduché a vždy je možné použiť to, ktoré je výhodné pri skúmaní konkrétneho radu. Uvedieme niekoľko z nich, ktoré nám poslúžia pri počítaní príkladov.

Prvá skupina kritérií je známa pod spoločným názvom *porovnávacie kritériá*. Ich spoločným znakom je to, že skúmaný rad určitým spôsobom porovnáme s vhodným známym radom a na základe tohto porovnania vyslovíme záver o konvergencii alebo divergencii skúmaného radu.

Veta 4.9 (porovnávacie kritérium). *Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sú rady s nezápornými členmi a $a_n \le b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Potom z konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ vyplýva konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, resp. z divergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ vyplýva divergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Dôkaz. Keďže vynechanie konečného počtu členov radu nerozhoduje o konvergencii, môžeme predpokladať, že $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \le b_n$. Nech $(A_n)_1^\infty$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $(B_n)_1^\infty$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Zrejme $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \le B_n$.

Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, potom konverguje aj postupnosť $(B_n)_1^\infty$, a teda je zhora ohraničená, t.j. $(\exists H \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ B_n \le H$. Potom $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \le H$, teda $(A_n)_1^\infty$ je zhora ohraničená. Keďže je neklesajúca, tak podľa Vety o konvergencii monotónnej ohraničenej postupnosti je konvergentná, čo znamená, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný.

Ak diverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, potom diverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, pretože ak by konvergoval, potom by podľa predchádzajúcej časti konvergoval aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, čo je spor. □

Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ z predchádzajúcej vety sa zvykne nazývať *majorantný rad* k radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *minorantný rad* k radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Veta teda hovorí, že rad s nezápornými členmi konverguje, ak k nemu dokážeme nájsť majorantný konvergentný rad a diverguje, ak k nemu nájdeme minorantný divergentný rad.

Veta 4.10 (limitné porovnávacie kritérium). *Nech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sú rady s nezápornými členmi a existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Ak $L < +\infty$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *je konvergentný rad, tak konverguje aj rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*. Ak* $L > 0$ *a diverguje rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*, potom diverguje aj rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Dôkaz. Nech $L < +\infty$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Potom z definície limity

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon, \tag{4.1}$$

odkiaľ $a_n < (L+\varepsilon)b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Keďže podľa Vety 4.6 (ii) rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(L+\varepsilon)b_n$ konverguje, podľa porovnávacieho kritéria konverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nech $L > 0$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje. Ak $0 < L < +\infty$, potom z (4.1) platí $(L-\varepsilon)b_n < a_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Z divergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(L-\varepsilon)b_n$ podľa porovnávacieho kritéria vyplýva divergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Ak $L = +\infty$, tak podľa definície nevlastnej limity $(\forall K > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ \frac{a_n}{b_n} > K$, t.j. zo vzťahu $a_n > Kb_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ vyplýva divergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Nasledujúca skupina kritérií vhodne využíva porovnanie skúmaného radu s geometrickým radom (Cauchyho a d'Alembertovo kritérium). Porovnaním s inými radmi môžeme dostať iné kritériá, z ktorých spomenieme len jedno často používané pri počítaní (tzv. Raabeho kritérium).

Veta 4.11 (Cauchyho odmocninné kritérium). *Nech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s nezápornými členmi.*

(i) Ak $(\forall n \in \mathbb{N})\ \sqrt[n]{a_n} \le q < 1$*, tak rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje. Ak pre nekonečne veľa čísel* $n \in \mathbb{N}$ *platí nerovnosť* $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$*, rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

(ii) Ak existuje

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \quad q \in \mathbb{R}^*,$$

tak pre $q < 1$ *je rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentný a pre* $q > 1$ *je rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentný.*

Dôkaz. Dôkaz prevedieme iba pre prípad (ii), prípad (i) je analogický.

Ak $q < 1$, zoberme $\varepsilon > 0$ tak, aby $q + \varepsilon < 1$. Potom

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)\ \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1,$$

t.j. $a_n < (q+\varepsilon)^n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Keďže rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(q+\varepsilon)^n$ je konvergentný geometrický rad, z porovnávacieho kritéria aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Ak $q > 1$, tak $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, teda $a_n \geq 1$, z čoho $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 1$. Z nutnej podmienky konvergencie radu potom plynie, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. □

Veta 4.12 (d'Alembertovo podielové kritérium). *Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s kladnými členmi.*

(i) Ak $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, tak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Ak $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, tak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(ii) Ak existuje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad q \in \mathbb{R}^*,$$

tak pre $q < 1$ je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentný a pre $q > 1$ je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentný.

Dôkaz. Opäť uvedieme iba dôkaz limitnej časti, dôkaz nelimitnej časti je analogický.

Ak $q < 1$, zoberme $\varepsilon > 0$ tak, aby $q + \varepsilon < 1$. Potom

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)\ q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon,$$

t.j. $(q-\varepsilon)a_n < a_{n+1} < (q+\varepsilon)a_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Indukciou dostávame, že $(\forall k \in \mathbb{N})\ a_{n_0+k} \leq (q+\varepsilon)^k a_{n_0}$. Keďže rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(q+\varepsilon)^n$ je konvergentný geometrický rad, z porovnávacieho kritéria konverguje aj rad $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$. Keďže konečný počet členov nerozhoduje o konvergencii radu, je celý rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentný.

Ak $q > 1$, tak $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, t.j. postupnosť $(a_n)_1^{\infty}$ je neklesajúca pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, a preto $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, teda rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. □

Poznámka 4.13. Obe predchádzajúce vety mali nelimitnú a limitnú časť, kde v limitnej časti nebola zahrnutá možnosť $q = 1$, pretože v takom prípade o konvergencii radu nevieme rozhodnúť – pre oba rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ podľa limitných verzií odmocninného a podielového kritéria je $q = 1$, ale prvý je divergentný a druhý konvergentný. D'Alembertovo kritérium sa obvykle ľahšie uplatňuje pri počítaní príkladov, pretože sa ľahšie počíta podiel ako n-tá odmocnina. Na druhej strane je však Cauchyho kritérium silnejšie v tom zmysle, že ak d'Alembertovo kritérium klasifikuje rad za konvergentný, potom určite aj Cauchyho kritérium ukazuje na konvergenciu radu. Ak sa však podľa Cauchyho kritéria nedá určiť charakter radu, nedá sa to urobiť ani d'Alembertovým kritériom. Preto uvedieme ešte jedno vhodné kritérium.

Veta 4.14 (Raabeho kritérium). *Nech* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s kladnými členmi.*

(i) Ak $(\exists r \in \mathbb{R}, r > 1)$ *také, že* $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq r$ *pre skoro všetky* $n \in \mathbb{N}$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) Ak existuje

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = q, \quad q \in \mathbb{R}^*,$$

tak pre $q > 1$ *je rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentný a pre* $q < 1$ *je rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentný.*

Dôkaz tohto kritéria nebudeme robiť, ani ho vyžadovať. Je zaujímavé si všimnúť, že žiadne z uvedených kritérií neumožňuje rozhodnúť o konvergencii harmonického radu. Dá sa ukázať, že Raabeho kritérium je silnejšie ako podielové v tom zmysle, že ak sa dá rozhodnúť o konvergencii radu d'Alembertovým kritériom, tak aj Raabeho. Takto sa dá postupovať ďalej a odvodzovať silnejšie kritériá, avšak každé silnejšie kritérium býva zložitejšie na formuláciu a používanie. Existuje mnoho ďalších kritérií na overenie konvergencie radov s nezápornými členmi (po prebratí potrebného aparátu zavedieme ešte jedno kritérium, ktoré je inej povahy ako všetky doterajšie, pretože spája nekonečné rady s integrálom). Žiadne z nich ale nie je univerzálne, t.j. nie je možné pomocou neho rozhodnúť o konvergencii (divergencii) všetkých radov. Jediným takýmto kritériom je iba Cauchyho-Bolzanovo, ktoré sa ale v praktických výpočtoch ťažko aplikuje.

Na záver uvedieme ešte jedno zaujímavé kritérium, ktoré dáva aj nutnú podmienku konvergencie radu a to tak, že namiesto pôvodného radu sleduje správanie sa „kondenzovaného radu".

Veta 4.15 (Cauchyho kondenzačné kritérium). *Nech* $(a_n)_1^{\infty}$ *je nerastúca postupnosť nezáporných čísel. Rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje práve vtedy, keď konverguje rad* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Dôkaz. Nech

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$
$$B_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n},$$

sú čiastočné súčty radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$. Keďže oba rady sú s nezápornými členmi, tak $(A_n)_1^{\infty}$ a $(B_n)_0^{\infty}$ sú neklesajúce.

Nutná podmienka: nech rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje, t.j. postupnosť $(B_n)_0^{\infty}$ je zhora ohraničená. Potom z nerastúcosti postupnosti $(A_n)_1^{\infty}$ máme, že $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned} A_{2^{n+1}} &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2^n} + \cdots + a_{2^{n+1}} \\ &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^n} + \cdots + a_{2^{n+1}}) \\ &\leq a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \cdots + (a_{2^n} + \cdots + a_{2^n}) = B_n, \end{aligned}$$

t.j. $(A_n)_1^{\infty}$ je zhora ohraničená, a teda konvergentná, čiže rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Postačujúca podmienka: ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned} A_{2^n} &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2^n} \\ &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) \\ &\geq a_1 + a_2 + (a_4 + a_4) + (a_8 + a_8 + a_8 + a_8) + \cdots + (a_{2^n} + \cdots + a_{2^n}) \\ &\geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{n-1} a_{2^n} \\ &= \frac{1}{2} (a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots + 2^n a_{2^n}) = \frac{1}{2} B_n, \end{aligned}$$

t.j. $(B_n)_0^{\infty}$ je zhora ohraničená, a teda konvergentná, čiže rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje. □

Môžeme si všimnúť, že Cauchyho kondenzačné kritérium transformuje rad na rad, ktorý konverguje (alebo diverguje) rýchlejšie ako pôvodný rad. Napríklad, Riemannov rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$, je konvergentný práve vtedy, keď konverguje geometrický rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-p})^n,$$

ktorý konverguje pre $|q| < 1 \Leftrightarrow 2^{1-p} < 1 \Leftrightarrow p > 1$.

Z Cauchyho kondenzačného kritéria tiež plynie, že nutná podmienka konvergencie radu sa pre isté konvergentné rady dá „vylepšiť“, t.j. nielenže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ale dokonca $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$.

Veta 4.16 (Olivierova). *Nech $(a_n)_1^{\infty}$ je nerastúca postupnosť nezáporných čísel. Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$.*

Dôkaz. Podľa Cauchyho kondenzačného kritéria konverguje rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$, t.j. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n a_{2^n} = 0$. Pre ľubovoľné pevné $n \in \mathbb{N}$ zoberme $m \in \mathbb{N}$ také, že $2^n \leq m \leq 2^{n+1}$. Potom

$$0 \leq m a_m \leq m a_{2^n} \leq 2^{n+1} a_{2^n} = 2 \cdot 2^n a_{2^n} \to 0$$

pre $n \to \infty$, čo podľa vety o zovretí znamená, že $\lim\limits_{m\to\infty} m a_m = 0$. □

✠ Úlohy na premýšľanie

◇ Nájdite príklad radu s kladnými členmi, o konvergencii ktorého je možné rozhodnúť Cauchyho kritériom, ale nejde rozhodnúť d'Alembertovým.
◇ Nájdite príklad radu s kladnými členmi, o konvergencii ktorého je možné rozhodnúť Raabeho kritériom, ale nejde rozhodnúť Cauchyho.
◇ Nájdite príklad radu s kladnými členmi, o konvergencii ktorého je možné rozhodnúť Raabeho kritériom, ale nejde rozhodnúť d'Alembertovým.
◇ Nájdite príklad radu s kladnými členmi, o konvergencii ktorého je možné rozhodnúť Cauchyho kritériom, ale nejde rozhodnúť Raabeho.

4.4 Absolútne a relatívne konvergentné rady

Vybavili sme už číselné rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ktoré majú niekoľko kladných a niekoľko záporných členov. Ak je záporných členov iba konečný počet, narábame s radom pri zisťovaní jeho konvergencie ako by mal len kladné členy (lebo konečný počet členov nemá vplyv na konvergenciu radu). Ak sú všetky členy radu záporné, môžeme zisťovať konvergenciu kladného radu $\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)$ a takto môžeme vybaviť aj prípad konečného počtu kladných členov. Preto zostáva jediný podstatný prípad, t.j. rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má nekonečne veľa kladných členov a nekonečne veľa členov záporných.

Zaveďme pre $a \in \mathbb{R}$ označenie

$$a^+ = \max\{a, 0\}, \quad a^- = \max\{-a, 0\}.$$

Zrejme $a^+ \geq 0$, $a^- \geq 0$, $a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$. Ak teda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný rad, môžeme uvažovať dva nekonečné rady s nezápornými členmi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Z Vety 4.6 potom vyplýva, že ak oba tieto rady konvergujú, potom konvergujú aj rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Neplatí to však naopak, t.j. z konvergencie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nevyplýva konvergencia radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$! Ak však konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^+ + a_n^-)$, potom postupnosť jeho čiastočných súčtov je ohraničená, takže sú ohraničené aj postupnosti čiastočných súčtov radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, a teda oba tieto rady sú konvergentné (pozri Tvrdenie 4.8). Z toho vyplýva, že aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný. Takto sme dostali nasledujúci výsledok.

Tvrdenie 4.17. *Rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergujú práve vtedy, keď konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.*

Toto tvrdenie dáva podnet k definícii nového významného pojmu tzv. absolútne konvergentného radu.

Definícia 4.18. Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolútne konverguje*, akk konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Všimnime si, že súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ vždy existuje, pretože ide o rad s nezápornými členmi, ale môže byť aj $+\infty$ (teda divergovať do $+\infty$). Vzájomný vzťah medzi pojmami konvergencie a absolútnej konvergencie nekonečných číselných radov sme si už stručne v úvahách vyššie uviedli, ale pre istotu ho ešte poriadne sformulujeme a dokážeme.

Veta 4.19. *Ak rad konverguje absolútne, tak konverguje.*

Dôkaz. Uvažujme absolútne konvergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Keďže $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq |a_n|$, tak $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq a_n + |a_n| \leq |a_n| + |a_n| = 2|a_n|$. Podľa Vety 4.6 rad $2\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, a teda z porovnávacieho kritéria konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, kde $c_n := a_n + |a_n|$. Keďže $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergujú, konverguje podľa Vety 4.6 aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - |a_n|)$. □

Opačná implikácia vo všeobecnosti neplatí, stačí napríklad uvažovať *Leibnizov rad* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, ktorého konvergenciu vyšetríme o chvíľu. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje relatívne* (neabsolútne). V ďalšej kapitole uvidíme, že s absolútne konvergentnými radmi môžeme narábať v istom zmysle ako s konečnými sumami – môžeme ich navzájom násobiť, prerovnať, atď. Pre relatívne konvergentné rady to nemusí platiť. Kritériá konvergencie pre rady s nezápornými členmi sú zároveň kritériá pre absolútnu konvergenciu, nebudeme ich prepisovať do reči absolútnej konvergencie, len namiesto postupnosti $(a_n)_1^{\infty}$ zoberieme postupnosť $(|a_n|)_1^{\infty}$.

Ešte jeden špeciálny prípad radov uvedieme. Ide o rady, ktoré neustále striedajú znamienka, teda majú nekonečne veľa kladných a nekonečne veľa záporných členov.

Definícia 4.20. Nekonečný číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame *alternujúci*, akk $(\forall n \in \mathbb{N})\ \operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$.

Ak vylúčime prípady radov, ktorých všetky členy sú nulové, môžeme každý alternujúci rad zapísať v tvare $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ alebo v tvare $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, kde $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n > 0$. Pre túto skupinu radov je možné (za pridania podmienky nerastúcosti postupnosti členov radu) považovať nutnú podmienku konvergencie radu aj za postačujúcu! Toto zistenie pochádza z roku 1682 od Leibniza.

Veta 4.21 (Leibnizovo kritérium). *Nech $(a_n)_1^\infty$ je nerastúca postupnosť kladných čísel. Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ je konvergentný práve vtedy, keď $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Dôkaz. Nutná podmienka je jasná, pretože

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 = \lim_{n\to\infty} |(-1)^{n+1}a_n| = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}a_n = 0.$$

Postačujúca podmienka: Nech $(s_n)_1^\infty$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$. Pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Keďže každý sčítanec je nezáporný (lebo $(a_n)_1^\infty$ je nerastúca), tak $s_2 \le s_4 \le \cdots \le s_{2n}$, t.j. vybraná postupnosť $(s_{2n})_1^\infty$ je neklesajúca. Podobne pre postupnosť

$$s_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n} - a_{2n+1})$$

sú výrazy v zátvorkách nezáporné, a teda $s_1 \ge s_3 \ge \cdots \ge s_{2n+1}$, t.j. $(s_{2n+1})_1^\infty$ je nerastúca. Keďže $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$a_1 - a_2 = s_2 \le s_{2n} < s_{2n} + a_{2n+1} = s_{2n+1} \le s_1 = a_1,$$

sú podľa vety o konvergencii monotónnej ohraničenej postupnosti obe postupnosti $(s_{2n})_1^\infty$ a $(s_{2n+1})_1^\infty$ konvergentné a konvergujú k rovnakej hodnote s, pretože

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0.$$

Potom podľa Vety 3.26 aj $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, a teda rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ je konvergentný a má súčet s. $\square$

Zostáva nám v našich úvahách vybaviť ešte prípad relatívne konvergentných radov s ľubovoľnými členmi. K tomu uvedieme nasledujúce dve užitočné kritériá, ktorých dôkazy je možné nájsť napr. v [2].

Veta 4.22 (Abelovo a Dirichletovo kritérium). *Nech $(b_n)_1^\infty$ je monotónna postupnosť. Potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje v každom z nasledujúcich prípadov:*

(A) rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a postupnosť $(b_n)_1^\infty$ je ohraničená;

(D) postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je ohraničená a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Kritérium (A) pre konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ sa označuje *Abelovo*, ktorý ho dokázal v roku 1826 a kritérium (D) dokázal v roku 1863 *Dirichlet*.

✠ Úlohy na precvičenie

◇ Odvoďte Abelovo a Leibnizovo kritérium z Dirichletovho.

◇ Dokážte, že ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje a postupnosť $(b_n)_1^{\infty}$ je ohraničená, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

4.5 Prerovnanie, súčet a súčin radov

Ako sme videli v úvode pri Grandiho rade, s nekonečnými súčtami nemôžeme narábať rovnako ako s konečnými. Preto na úvod tejto časti uvedieme analógiu komutatívneho zákona, tzv. prerovnanie nekonečných radov. Pripomeňme, že bijekcia $\varphi : M \to M$ je zobrazenie, ktoré je prosté a na, t.j. $\varphi(M) = M$.

Definícia 4.23. Hovoríme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je *prerovnaním radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, akk existuje bijekcia $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taká, že $(\forall n \in \mathbb{N})\ b_n = a_{\varphi(n)}$.

Inými slovami, prerovanie radu nie je nič iné, ako preskupenie jeho členov, teda n-tý člen prerovnaného radu je $\varphi(n)$-tým členom pôvodného radu. Naopak, n-tý člen pôvodného radu je $\overline{\varphi}(n)$-tým členom v prerovnanom rade, kde $\overline{\varphi}$ je inverzná bijekcia k φ.

Napríklad, Leibnizov rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ môžeme prerovnať tak, že vezmeme striedavo vždy tri kladné a jeden záporný člen

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4} + \dots,$$

teda $\varphi(n) = \{(1,1), (2,3), (3,5), (4,2), (5,7), (6,9), \dots\}$.

Nasledujúca veta je spomínanou analógiou komutatívneho zákona pre absolútne konvergentné rady.

Veta 4.24. *Ak rad konverguje absolútne, potom každé jeho prerovnanie konverguje absolútne.*

Dôkaz. Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolútne konvergentný rad. Potom

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall m \in \mathbb{N})\ |a_{n+1}| + \cdots + |a_{m+n}| < \varepsilon.$$

Ak φ je bijekcia na $\mathbb{N}$, tak $(\exists p \in \mathbb{N})\ \{1, 2, \dots, n_0\} \subseteq \{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(p)\}$. Nech teraz $n > p$ a $m \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Potom pre $k = \max\{\varphi(n+1), \dots, \varphi(n+m)\}$ platí

$$|a_{\varphi(n+1)}| + \cdots + |a_{\varphi(n+m)}| \le |a_{n_0+1}| + \cdots + |a_k| < \varepsilon.$$

Podľa Cauchyho-Bolzanovho kritéria rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{\varphi(n)}|$ konverguje, teda rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ je absolútne konvergentný. □

Dôsledkom tohto tvrdenia je nasledujúce kritérium absolútnej konvergencie radu.

Dôsledok 4.25. Rad konverguje absolútne práve vtedy, keď každé jeho prerovnanie konverguje k tomu istému súčtu.

Vyvstáva otázka, ako sa chovajú relatívne konvergentné rady pri prerovnaní. Túto otázku zodpovedal Bernhard Riemann, kde môžeme vidieť, ako labilné sú tieto rady vzhľadom k prerovnaniu.

Veta 4.26 (Riemannova o prerovnaní). *Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je relatívne konvergentný rad a $s \in \mathbb{R}$ je ľubovoľné. Potom existuje také jeho prerovnanie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = s$, existuje také jeho prerovnanie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ diverguje a existuje také jeho prerovnanie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\zeta(n)}$, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\zeta(n)}$ osciluje.*

Myšlienkou dôkazu prerovnania k predpísanému súčtu je prerovnať daný rad nasledujúcim spôsobom: najprv ponecháme kladné členy, pokiaľ neprekročíme predpísaný súčet. Potom začneme odčítavať záporné členy, až kým čiastočný súčet radu bude menší ako predpísaný súčet a rovnakým spôsobom pokračujeme ďalej. Nakoniec je potrebné ukázať, že takto preskupený rad naozaj konverguje k vopred určenému číslu. Podobne sa to urobí pre $s = +\infty$ a pre osciláciu radu. Exaktný dôkaz možno nájsť v [3]. Z tejto Riemannovej vety tiež vyplýva, že aj z niektorých divergentných radov je možné prerovnaním vytvoriť relatívne konvergentné rady s ľubovoľne dopredu zadaným súčtom.

Na záver urobíme ešte malé pojednanie o súčine radov. Pripomeňme si, ako robíme súčin radov v prípade konečných radov $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i$ a $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j$: podľa distributívneho zákona vytvoríme všetky možné súčiny $a_i b_j$, ktoré potom sčítame, t.j.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j.$$

Dôležité je, že pri ľubovoľnom usporiadaní takto vzniknutých súčinov $a_i b_j$ dostaneme ten istý výsledok. Podobne môžeme postupovať aj v prípade nekonečných radov, kde dostaneme nekonečnú maticu čísel

$$\begin{array}{cccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n & \dots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n & \dots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
a_mb_1 & a_mb_2 & a_mb_3 & \dots & a_mb_n & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Tu nás ale Riemannova veta varuje, že výsledok nemusí byť ten istý, ak určitým spôsobom sčítame tieto súčiny. Zrejme existuje nekonečne veľa spôsobov, ako sčítať tieto prvky. My uvedieme len nasledujúce dva typy súčinov radov.

Dirichletovým súčinom radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ rozumieme rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, kde

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_n + \cdots + a_n b_n + a_n b_{n-1} + \cdots + a_n b_1,$$

čo odpovedá sčítaniu „po štvorcoch“

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_1b_1 & & a_1b_2 & & a_1b_3 & & a_1b_4 & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
a_2b_1 & \leftarrow & a_2b_2 & & a_2b_3 & & a_2b_4 & \ldots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & \\
a_3b_1 & \leftarrow & a_3b_2 & \leftarrow & a_3b_3 & & a_3b_4 & \ldots \\
 & & & & & & \downarrow & \\
a_4b_1 & \leftarrow & a_4b_2 & \leftarrow & a_4b_3 & \leftarrow & a_4b_4 & \ldots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Veta 4.27. *Nech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = b$ *sú konvergentné rady a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *je ich Dirichletov súčin. Potom* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *konverguje a platí* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = a \cdot b$.

Dôkaz. Ak A_n sú čiastočné súčty radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a B_n čiastočné súčty radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, potom $C_n = A_n \cdot B_n$ sú čiastočné súčty radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, $n \in \mathbb{N}$ (rozpíšte si poriadne!). Keďže $A_n \to a$ a $B_n \to b$ pre $n \to \infty$, potom $C_n \to a \cdot b$ pre $n \to \infty$, t.j. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = a \cdot b$. $\square$

Pre ilustráciu si uvedieme ešte jeden typ súčinu, pre ktorý však predchádzajúca veta platiť nebude.

Cauchyho súčinom radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ rozumieme rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, kde

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1 = \sum_{i+j=n+1} a_i b_j,$$

čo zase odpovedá sčítaniu „po diagonálach“

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_1b_1 & & a_1b_2 & & a_1b_3 & & a_1b_4 & \ldots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
a_2b_1 & & a_2b_2 & & a_2b_3 & & a_2b_4 & \ldots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
a_3b_1 & & a_3b_2 & & a_3b_3 & & a_3b_4 & \ldots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
a_4b_1 & & a_4b_2 & & a_4b_3 & & a_4b_4 & \ldots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Naozaj, rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ sú podľa Leibnizovho kritéria konvergentné, ale ich Cauchyho súčin diverguje, pretože

$$c_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}} \right)$$

a $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned} |c_n| &= \frac{1}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{1}} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = 1, \end{aligned}$$

z čoho máme, že neplatí nutná podmienka konvergencie radu, a teda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ diverguje. Pre Cauchyho súčin teda Veta 4.27 neplatí, ale platí jej nasledujúca modifikácia, ktorej dôkaz je možné nájsť v [3].

Veta 4.28 (Mertensova). *Nech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = b$ *sú konvergentné rady, z ktorých aspoň jeden je absolútne konvergentný. Potom ich Cauchyho súčin* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *konverguje a platí* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = a \cdot b$.

Dôsledkom Mertensovej vety je, že pre dva absolútne konvergentné rady aj ich Cauchyho súčin je absolútne konvergentný.

✠ Úlohy na precvičenie

◇ Nech $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$. Určte Cauchyho súčin radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{-n}$ so sebou.

◇ Nájdite súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ a súčty nasledujúcich radov, ktoré vzniknú jeho prerovnaním:

(i) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots;$

(ii) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots;$

(iii) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \ldots.$

◇ Dokážte, že platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1.$$

4.6 O elementárnych funkciách ešte raz

V tejto časti sa na chvíľu vrátime k zavedeniu niektorých základných elementárnych funkcií a ukážeme ich ďalšiu definíciu, ktorá súvisí s funkcionálnymi radmi, resp. s rozvojom funkcií do takýchto radov. Keďže pojem funkcionálneho radu ani aparát narábania s ním nepoznáme, pozrieme sa naň ako na nekonečný číselný rad s parametrom a vyšetríme konvergenciu tohto radu v závislosti na tomto parametri. Bude to pre nás mať ďalekosiahle následky, pretože je to mechanizmus, ktorý neskôr umožní definovať elementárne funkcie analogicky v komplexnej oblasti.

Uvažujme rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ s parametrom $x \in \mathbb{R}$. Podľa d'Alembertovho kritéria je tento rad absolútne konvergentný, pretože

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1.$$

Znamená to, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ má tento rad súčet, teda je to funkcia definovaná na množine všetkých reálnych čísel. Túto funkciu nazývame *exponenciálna funkcia*, t.j.

$$\mathrm{e}^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Niekto by mohol právom namietať, že ako vieme, že súčet takéhoto radu je presne exponenciálna funkcia, ktorú sme definovali v časti 2.3 z axiomatiky reálnych čísel, resp. pri zavedení Eulerovho čísla v časti 3.5? Áno, je to oprávnená otázka, na ktorú sa dá jednoznačne odpovedať dôkazom tohto faktu, na ktorý nám, žiaľ, nezostáva čas. Musíme snaživého čitateľa odkázať napr. na [1], časť 3.4.1. Chceme iba poukázať na iný spôsob definovania týchto funkcií na základe vytvoreného aparátu, ktorý sa dá použiť aj v iných situáciách, nielen z axiomatickej výstavby.

Je jasné, že $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ a $\mathrm{e}^0 = 1$. Demonštrujme teraz využitie uvedeného aparátu napríklad na odvodenie vzťahu $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}$. Keďže rady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ sú absolútne konvergentné pre každé $x, y \in \mathbb{R}$, podľa Mertensovej vety je aj ich Cauchyho súčin absolútne konvergentný a platí

$$\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

kde $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}(x+y)^n$$

podľa binomickej vety. Teda

$$\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \mathrm{e}^{x+y}.$$

Z uvedeného priamo vyplýva, že $e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1$, teda $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. Podobne by sa dalo pokračovať v odvodzovaní ďalších vzťahov, z ktorých by niektoré išli ľahšie, iné ťažšie (prenechávame čitateľovi).

Podobným exaktným spôsobom môžeme definovať aj goniometrické funkcie *sínus* a *kosínus*, t.j.

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \quad \text{a} \quad \cos x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

ako aj mnohé ďalšie funkcie. Opäť je potrebné sa presvedčiť, že uvedené rady konvergujú pre každé $x \in \mathbb{R}$, čo však jednoducho dostaneme napr. z d'Alembertovho kritéria (opäť absolútne konvergujú). Odtiaľto sa dá jednoducho vidieť, že sin je nepárna a cos párna funkcia. A takto by sme mohli pokračovať ďalej, na čo však už nezostáva čas. Našťastie sa k týmto (a mnohým ďalším) čarokrásnym formulkám dostaneme o rok v treťom kurze matematickej analýzy. Už teraz sa na to (Vás) teším!